平成 31 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育・医学部　平成 31 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を 1 でない正の定数，x，y を $5^x = 2^y = a$ を満たす実数とする．

(1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$ とするとき，a の値を求めなさい．

(2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = b$ とするとき，a^b の値を求めなさい．

(3) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 2$ とするとき，a の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ △ABC において，点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろす．線分 AH を直径とする円 O と辺 AB，AC の交点をそれぞれ D，E とし，円 O の半径を 1，BH $= 1$，CE $= 3$ とする．

(1) 線分 DB の長さを求めなさい．

(2) 線分 HC と線分 CA の長さをそれぞれ求めなさい．

(3) ∠EDH の大きさを求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $C_1 : y = -\dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$，曲線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{x}$ $(x < 0)$，直線 $\ell : y = -x$，点 $\mathrm{P}\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$ とし，点 Q は C_2 上を動くとする．

(1) 曲線 C_1 と 2 つの直線 ℓ，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S_1 を求めなさい．

(2) 線分 PQ の長さが最小になる点 Q の x 座標を a とするとき，a の値を求めなさい．

(3) (2) で求めた a について，曲線 C_2 と 2 つの直線 ℓ，$x = a$ で囲まれた部分の面積 S_2 を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある．

$$\begin{aligned}
&a_1 = 3,\ b_1 = 1\\
&2a_{n+1} = 5a_n + b_n + 2^{n+1} + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)\\
&2b_{n+1} = a_n + 5b_n - 2^{n+1} + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}$$

(1) $c_n = a_n + b_n$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を n の式で表しなさい．

(2) $d_n = a_n - b_n$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項 d_n を n の式で表しなさい．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表しなさい．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．S_n を n の式で表しなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $t \geqq 1$ とし，

$$f(t) = \int_0^1 |(x+t)(x-t+1)|\,dx$$

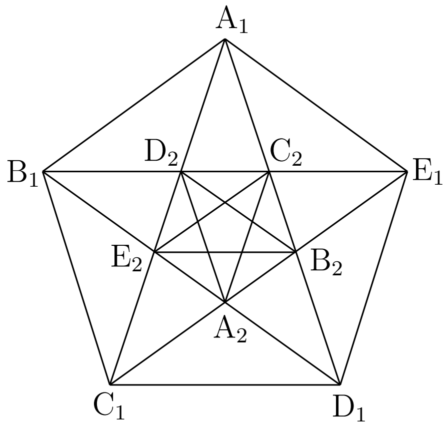
とする．

(1) $f(3)$ の値を求めなさい．

(2) $f(t)$ を t を用いて表しなさい．

(3) $f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 一辺の長さがaの正五角形$A_1B_1C_1D_1E_1$がある．対角線を結んで，内部に正五角形$A_2B_2C_2D_2E_2$を図のように作る．さらに正五角形$A_2B_2C_2D_2E_2$の対角線を結んで，内部に正五角形$A_3B_3C_3D_3E_3$を作る．この操作を繰り返し，正五角形$A_kB_kC_kD_kE_k$の内部に正五角形$A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}E_{k+1}$を作るとき，以下の問いに答えなさい．



(1) 正五角形$A_1B_1C_1D_1E_1$の対角線B_1E_1の長さを求めなさい．

(2) 正五角形$A_kB_kC_kD_kE_k$の一辺の長さをl_kとする．無限級数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} l_k$の収束，発散について調べ，収束するならば和を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 三角形ABCを底面とする四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA} = \mathrm{BC} = 3$，$\mathrm{OB} = \mathrm{CA} = \sqrt{13}$，$\mathrm{OC} = \mathrm{AB} = 4$とし，外接球面(4頂点O，A，B，Cのすべてを通る一つの球面)の中心をPとする．このとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}} + z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$の形で表しなさい．ただし，$x$，$y$，$z$は実数とする．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 微分可能なxの関数$f(x)$，$g(x)$について以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$とその導関数$f'(x)$について，$f'(x) - f(x) = 0$が任意の実数xに対して成り立つとき，関数$f(x) \cdot e^{-x}$は定数関数であることを示しなさい．ただし，eは自然対数の底とする．

(2) $g(x)$とその導関数$g'(x)$について，$g'(x) - g(x) = x^2$が任意の実数xに対して成り立ち，さらに$g(0) = 0$とする．このとき，$x > 0$においてつねに$g(x) > 0$となることを示しなさい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $5^x = 2^y = a$ より

$$x = \log_5 a = \frac{1}{\log_a 5},\quad y = \log_2 a = \frac{1}{\log_a 2} \quad \cdots (*)$$

したがって　$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \log_a 5 + \log_a 2 = \log_a 10 \quad \cdots ①$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$ より　$\log_a 10 = \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$a^{\frac{1}{2}} = 10$　よって　$\boldsymbol{a = 100}$

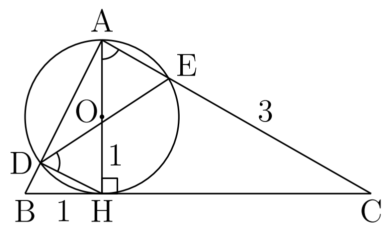
(2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = b$ より，① から　$\log_a 10 = b$ よって　$\boldsymbol{a^b = 10}$

(3) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 2$ より，$(*)$ から

$$\log_a 5 - \log_a 2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_a \frac{5}{2} = 2$$

したがって　$a^2 = \dfrac{5}{2}$　　$a > 0$ であるから　$a = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\triangle$ABH に三平方の定理を適用すると



$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

方べきの定理により　$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DB} = \mathrm{BH}^2$

$\sqrt{5}\cdot\mathrm{DB} = 1^2$　よって　$\mathbf{DB} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

(2) $\mathrm{CA} = x$ とおくと　$\mathrm{HC}^2 = \mathrm{CA}^2 - \mathrm{AH}^2 = x^2 - 4$

方べきの定理により　$\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CE} = \mathrm{HC}^2$

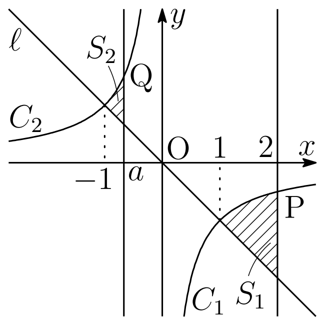
$$x\cdot 3 = x^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-4) = 0$$

$x > 0$ より　$x = 4$，$\mathrm{HC}^2 = 4^2 - 2^2$　よって　$\mathbf{CA = 4,\ \ HC = 2\sqrt{3}}$

(3) (2) の結果から　$\cos\angle\mathrm{CAH} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{CA}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\angle\mathrm{CAH} = 60^\circ$

円周角の定理により　　$\angle\mathrm{EDH} = \angle\mathrm{EAH} = \mathbf{60^\circ}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) S_1 は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S_1 = \int_1^2 \left\{-\frac{1}{x} - (-x)\right\} dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \log x\right]_1^2$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{2} - \log 2}$$

(2) C_2 上の点を $\mathrm{Q}\left(t, -\frac{1}{t}\right)$ とし $(t < 0)$，$g(t) = \mathrm{PQ}^2$ とおくと

$$g(t) = (t-2)^2 + \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2$$
$$g'(t) = 2(t-2) + 2\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{t^2} = 2(t-2) + \frac{t-2}{t}\cdot\frac{1}{t^2}$$
$$= (t-2)\left(2 + \frac{1}{t^3}\right) = \frac{(t-2)(2t^3+1)}{t^3}$$

t	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$	(0)
$g'(t)$	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき，$g(t)$ は最小，すなわち，PQ は最小であるから　$\boldsymbol{a = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

解説　$C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ と点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を $g(t) = \mathrm{PQ}^2$ とおくと

$$g(t) = (t - x_0)^2 + (f(t) - y_0)^2,$$
$$g'(t) = 2(t - x_0) + 2(f(t) - y_0)f'(t)$$

C 上の点 Q における接ベクトルを $\vec{v} = (1,\ f'(t))$ とすると，$g'(t) = 2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}$.
$g'(t) = 0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{v}$ となるから，直線 PQ は Q における法線である．
したがって，C 上の点 Q の法線で点 P を通るものとして求めてもよい．

(3) $-1 < a$ に注意して

$$S_2 = \int_{-1}^a \left\{-\frac{1}{x} - (-x)\right\} dx = \left[\frac{x^2}{2} - \log|x|\right]_{-1}^a$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 - 1) - \log|a| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1\right) - \log 2^{-\frac{1}{3}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{2}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log 2}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_1=3,\ b_1=1$

$$(*)\begin{cases} 2a_{n+1}=5a_n+b_n+2^{n+1}+4 & (n=1,2,3,\cdots) \\ 2b_{n+1}=a_n+5b_n-2^{n+1}+4 & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式の辺々を加えて整理すると

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)+4$$

$c_n=a_n+b_n$ より　$c_{n+1}=3c_n+4$　ゆえに　$c_{n+1}+2=3(c_n+2)$

$\{c_n+2\}$ は，初項 $c_1+2=(a_1+b_1)+2=6$，公比 3 の等比数列であるから

$$c_n+2=6\cdot3^{n-1}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{c_n=2\cdot3^n-2}$$

(2) $(*)$ の第 1 式と第 2 式の辺々の差をとり，整理すると

$$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)+2^{n+1}$$

$d_n=a_n-b_n$ より　$d_{n+1}=2d_n+2^{n+1}$　ゆえに　$\dfrac{d_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{d_n}{2^n}+1$

$\left\{\dfrac{d_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{d_1}{2}=\dfrac{a_1-b_1}{2}=1$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{d_n}{2^n}=1+(n-1)\cdot1\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{d_n=n\cdot2^n}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$a_n+b_n=2\cdot3^n-2$
$a_n-b_n=n\cdot2^n$

上の 2 式から，b_n を消去して整理すると　$\boldsymbol{a_n=n\cdot2^{n-1}+3^n-1}$

(4) (3) の結果から　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k\cdot2^{k-1}+3^k-1)$，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} T_n &= 1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1} \\ 2T_n &= 1\cdot2+2\cdot2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n \end{aligned}$$

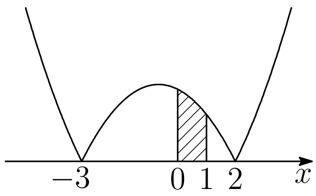
ゆえに　$-T_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n=\dfrac{2^n-1}{2-1}-n\cdot2^n$
$=-(n-1)2^n-1$

$T_n=(n-1)\cdot2^n+1$ により

$$\begin{aligned} S_n &= T_n+\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=(n-1)\cdot2^n+1+\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n \\ &= \boldsymbol{(n-1)\cdot2^n+\frac{3^{n+1}}{2}-n-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(t)=\displaystyle\int_0^1 |(x+t)(x-t+1)|\,dx \quad \cdots(*)$

(1) $(*)$ に $t=3$ を代入して



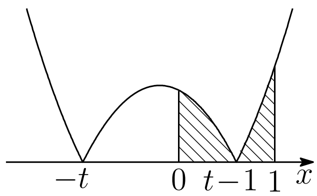
$$\begin{aligned} f(3)&=\int_0^1 |(x+3)(x-2)|dx \\ &=\int_0^1 \{-(x+3)(x-2)\}dx \\ &=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^1=\mathbf{\frac{31}{6}} \end{aligned}$$

(2) $g(x)=(x+t)(x-t+1)=x^2+x-t(t-1)$ とおき，その原始関数の1つを

$$G(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-t(t-1)x \quad \cdots(**)$$

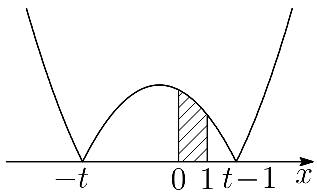
とおく．$t \geqq 1$ より，$-t<0 \leqq t-1$ に注意して

(i) $t-1 \leqq 1$，すなわち，$1 \leqq t \leqq 2$ のとき



$$\begin{aligned} f(t)&=\int_0^1 |g(x)|\,dx \\ &=-\int_0^{t-1} g(x)\,dx+\int_{t-1}^1 g(x)\,dx \\ &=G(1)+G(0)-2G(t-1) \end{aligned}$$

(ii) $1 \leqq t-1$，すなわち，$2 \leqq t$ のとき



$$\begin{aligned} f(t)&=\int_0^1 |g(x)|\,dx \\ &=-\int_0^1 g(x)\,dx=G(0)-G(1) \end{aligned}$$

$(**)$ より $\qquad G(0)=0,\quad G(1)=-t^2+t+\dfrac{5}{6},$

$$\begin{aligned} G(t-1)&=\frac{1}{3}(t-1)^3+\frac{1}{2}(t-1)^2-t(t-1)^2 \\ &=-\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t+\frac{1}{6} \end{aligned}$$

上式および (i)，(ii) の結果から

$$\boldsymbol{f(t)=\begin{cases} \dfrac{4}{3}t^3-4t^2+3t+\dfrac{1}{2} & (1 \leqq t \leqq 2) \\ t^2-t-\dfrac{5}{6} & (2 \leqq t) \end{cases}}$$

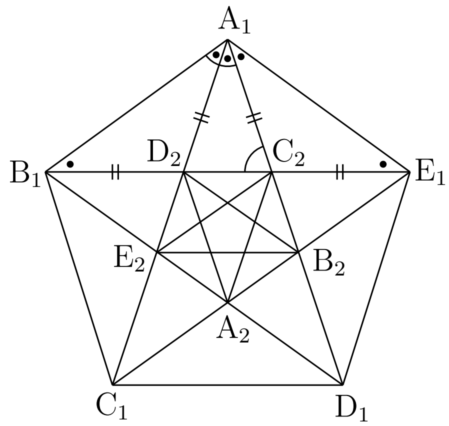
(3) (2) の結果から

$$f'(t) = \begin{cases} (2t-1)(2t-3) & (1 < t \leqq 2) \\ 2t-1 & (2 \leqq t) \end{cases}$$

t	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{6}$	$\nearrow$

よって　最小値 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) 正五角形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ は，円に内接し，それぞれの辺に対する円周角が 36° であることに注意して



$$B_1D_2 = A_1D_2 = A_1C_2 = C_2E_1 = x$$

とおくと，$B_1A_1 = B_1C_2 = a$ より

$$C_2D_2 = B_1C_2 - B_1D_2 = a - x$$

$\triangle B_1C_2A_1 \backsim \triangle A_1D_2C_2$ より

$$a : x = x : a - x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

$x > 0$ に注意して，これを解くと　$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$

よって　　$B_1E_1 = B_1C_2 + C_2E_1 = a + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a}$

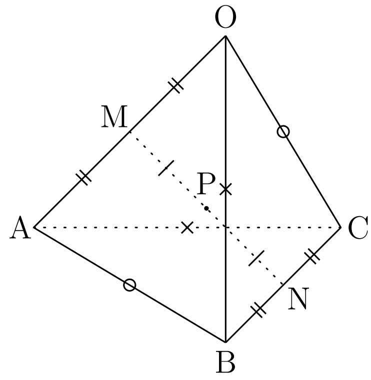
(2) $C_2D_2 = a - x = a - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a$　ゆえに　$\dfrac{C_2D_2}{C_1D_1} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

したがって，数列 $\{l_k\}$ は初項 a，公比 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ の等比数列である．

$\left|\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ より，次の無限級数は収束し，その和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k = \frac{a}{1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{2}a}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ 2辺OA，BCの中点をそれぞれM，Nとすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \quad \cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，②の辺々を加えて2倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + (\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{MN}\perp\mathrm{BC}, \quad \mathrm{MN}\perp\mathrm{OA}$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{BC}$ より，線分MNの中点をPとすると　$\mathrm{PO} = \mathrm{PA} = \mathrm{PB} = \mathrm{PC}$

したがって，点Pは4点O，A，B，Cを通る球の中心である．

よって　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f'(x)-f(x)=0$ より，$f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}=0$ であるから

$$f'(x)\cdot e^{-x}+f(x)(e^{-x})'=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left\{f(x)\cdot e^{-x}\right\}'=0$$

上の第 2 式を積分すると

$$f(x)\cdot e^{-x}=C \quad (C\text{ は定数})$$

(2) $g'(x)-g(x)=x^2$ より，$g'(x)\cdot e^{-x}-g(x)\cdot e^{-x}=x^2e^{-x}$ であるから

$$g'(x)\cdot e^{-x}+g(x)(e^{-x})'=x^2e^{-x} \quad \text{ゆえに} \quad \left\{g(x)\cdot e^{-x}\right\}'=x^2e^{-x}$$

上の第 2 式を積分すると

$$\begin{aligned} g(x)\cdot e^{-x} &= \int x^2\cdot e^{-x}\,dx \\ &= -(x^2+2x+2)e^{-x}+C_1 \quad (C_1\text{は積分定数}) \end{aligned}$$

$g(0)=0$ より　$-2+C_1=0$　ゆえに　$C_1=2$

したがって　$g(x)=2e^x-2-2x-x^2,$

$g'(x)=2e^x-2-2x,$

$g''(x)=2(e^x-1)$

上式より，$x>0$ において，$g''(x)>0$ であるから，$g'(x)$ は単調増加で

$$x>0 \text{ において} \quad g'(x)>g'(0)=0$$

さらに，$x>0$ において，$g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は単調増加で

$$x>0 \text{ において} \quad g(x)>g(0)=0$$