

平成30年度 大分大学2次試験前期日程(数学問題)

工・経済・教育・医学部 平成30年2月25日

- 工学部は, [1] ~ [4] 数I・II・III・A・B (100分)
- 経済学部は, [1] ~ [3], [5] 数I・II・A・B (100分)
- 教育学部は, [1], [2], [5] 数I・II・A・B (80分)
- 医学部は, [6] ~ [8] 数I・II・III・A・B (80分)

[1] a を定数, x を実数とし,

$$y = 9^x + \frac{1}{9^x} - 4a \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right)$$

とする. $t = 3^x + \frac{1}{3^x}$ とおく.

- (1) t のとり得る値の範囲を求めなさい.
- (2) y を t の式で表しなさい.
- (3) y の最小値とそのときの x の値を, a を用いてそれぞれ表しなさい.

[2] $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とし,

$$f(\theta) = \sin 3\theta - \cos 3\theta - 3 \sin 2\theta + 3(\sin \theta + \cos \theta)$$

とする.

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とするとき, t のとり得る値の範囲を求めなさい.
- (2) (1) のとき, $f(\theta)$ を t を用いて表しなさい.
- (3) 方程式 $f(\theta) = k$ が異なる3つの実数解をもつとき, 定数 k の値の範囲を求めなさい.

[3] p, q, u, v を正の実数とする. 空間に5点 $O(0, 0, 0)$, $P(p, 0, 0)$, $Q(0, q, 0)$, R, S がある. \vec{OR} と \vec{OS} はともに $\vec{n} = (-u, -v, 1)$ に垂直で, \vec{PR} と \vec{QS} はともに $\vec{e} = (0, 0, 1)$ に平行である. \vec{OR} と \vec{OS} のなす角を θ とする.

- (1) 2点 R, S の座標を p, q, u, v を用いて表しなさい.
- (2) $\cos \theta$ の値を u, v を用いて表しなさい.
- (3) $\triangle OPQ$ と $\triangle ORS$ の面積の比を u, v を用いて表しなさい.

4 $x > 0$ とし,

$$f(x) = \log x, \quad g(x) = \log x^2$$

とする.

- (1) a を正の定数とする. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, \log a)$ における接線の方程式を求めなさい.
- (2) 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めなさい.
- (3) 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および (2) で求めた直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

5 $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle BAC = 60^\circ$ の $\triangle ABC$ がある.

- (1) 点 P が $\triangle ABC$ の内心であるとき, $\angle BPC$ の大きさを求めなさい.
- (2) 点 P が $\triangle ABC$ の外心であるとき, 線分 BP の長さを求めなさい.
- (3) 点 P が $\triangle ABC$ の重心であるとき, $\triangle PBC$ の面積を求めなさい.

6 次の初項と漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えなさい。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 一般項 a_n を求めなさい。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を調べなさい。

7 5枚の硬貨を表を上にして横一列に並べる。1個のサイコロを投げて出た目が k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) のとき、左から k 番目の硬貨の表裏を入れ替え、6の目が出たら何もしない。この操作を続けて行うとき、以下の問いに答えなさい。ただし、サイコロの目はいずれも同様な確からしさで出るとする。

- (1) サイコロを n 回投げた時点で裏になっている硬貨が n 枚である確率を求めなさい。ただし、 n は5以下の正の整数とする。
- (2) サイコロを4回投げた時点で硬貨がすべて表である確率を求めなさい。
- (3) サイコロを4回投げた時点で裏になっている硬貨が t 枚である確率を $P(t)$ とする。このとき、 $\sum_{t=1}^4 tP(t)$ の値を求めなさい。

8 原点 $O(0, 0)$ と点 $A(0, 2)$ を直径の両端とする円 C がある。円 C の周上を動く点 Q と原点 O を通る直線を l とし、点 A における円 C の接線を m として、 l と m の交点を R とする。そして、点 R と x 座標が等しく、かつ点 Q と y 座標が等しい点を P とする。ただし、点 Q は原点 O とは異なるとする。このとき以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 P の軌跡の方程式を求め、 $y = f(x)$ の形で表しなさい。
- (2) 上の (1) で得られた $y = f(x)$ について増減や凹凸を調べ、概形を描きなさい。
- (3) 曲線 $y = f(x)$, x 軸, 直線 $x = -2$ および直線 $x = 2\sqrt{3}$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

正解

- 1 (1) 相加・相乗平均の大小関係により

$$t = 3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} \quad \text{よって} \quad t \geq 2$$

なお、等号が成立するのは $3^x = \frac{1}{3^x}$ すなわち $x = 0$

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= 9^x + \frac{1}{9^x} - 4a \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) \\ &= \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right)^2 - 2 - 4a \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) = t^2 - 4at - 2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad (1), (2) \text{の結果から} \quad y = t^2 - 4at - 2 = (t - 2a)^2 - 4a^2 - 2 \quad (t \geq 2)$$

(i) $2a < 2$, すなわち, $a < 1$ のとき

$$t = 2 \text{で最小値} \quad \mathbf{2 - 8a}$$

このとき, (1) の結果から $x = 0$

(ii) $2 \leq 2a$, すなわち, $1 \leq a$ のとき

$$t = 2a \text{で最小値} \quad \mathbf{-4a^2 - 2}$$

$$\text{このとき} \quad 3^x + \frac{1}{3^x} = 2a \quad \text{ゆえに} \quad (3^x)^2 - 2a \cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad 3^x = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \quad \text{ゆえに} \quad x = \log_3(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

2 (1) $t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$

(2) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1 = t^2 - 1 \quad \dots \textcircled{1}$

$\sin 3\theta + \sin \theta = 2 \sin 2\theta \cos \theta$, $\cos 3\theta - \cos \theta = -2 \sin 2\theta \sin \theta$ より

$$\sin 3\theta = 2 \sin 2\theta \cos \theta - \sin \theta,$$

$$\cos 3\theta = -2 \sin 2\theta \sin \theta + \cos \theta$$

ゆえに $\sin 3\theta - \cos 3\theta = (\sin \theta + \cos \theta)(2 \sin 2\theta - 1)$
 $= t\{2(t^2 - 1) - 1\} = 2t^3 - 3t \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② より $f(\theta) = \sin 3\theta - \cos 3\theta - 3 \sin 2\theta + 3(\sin \theta + \cos \theta)$
 $= 2t^3 - 3t - 3(t^2 - 1) + 3t = 2t^3 - 3t^2 + 3$

別解 $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$, $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ より

$$\begin{aligned} \sin 3\theta - \cos 3\theta &= 3(\sin \theta + \cos \theta) - 4(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)\{3 - 4(1 - \sin \theta \cos \theta)\} \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(2 \sin 2\theta - 1) \\ &= t\{2(t^2 - 1) - 1\} = 2t^3 - 3t \end{aligned}$$

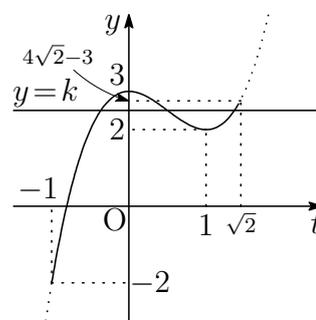
(3) $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 3$ ($-1 \leq t \leq \sqrt{2}$) とおくと

$$g'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t - 1)$$

$g(t)$ の増減は次のようになる.

t	-1	\dots	0	\dots	1	\dots	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	-2	\nearrow	3	\searrow	2	\nearrow	$4\sqrt{2} - 3$

$y = g(t)$ のグラフは, 右の図のようになる.



$f(\theta) = k$ が異なる 3 つの実数解をもつとき, $y = g(t)$ のグラフと直線 $y = k$ が異なる 3 つの共有点をもつときであるから

$$2 < k \leq 4\sqrt{2} - 3$$

3 (1) $\overrightarrow{PR} = s\vec{e}$, $\overrightarrow{QS} = t\vec{e}$ とおくと (s, t は実数)

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + s\vec{e} = (p, 0, 0) + s(0, 0, 1) = (p, 0, s)$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + t\vec{e} = (0, q, 0) + t(0, 0, 1) = (0, q, t)$$

\overrightarrow{OR} と \overrightarrow{OS} はともに $\vec{n} = (-u, -v, 1)$ に垂直であるから

$$p \cdot (-u) + s \cdot 1 = 0, \quad q \cdot (-v) + t \cdot 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = pu, \quad t = qv$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OR} = (p, 0, pu), \quad \overrightarrow{OS} = (0, q, qv)$$

$$\text{よって} \quad R(p, 0, pu), \quad S(0, q, qv)$$

(2) (1) の結果から $\overrightarrow{OR} = p(1, 0, u)$, $\overrightarrow{OS} = q(0, 1, v)$

$p > 0, q > 0$ より, \overrightarrow{OR} と \overrightarrow{OS} のなす角 θ は, 2つのベクトル

$$\vec{r} = \frac{1}{p}\overrightarrow{OR} = (1, 0, u), \quad \vec{s} = \frac{1}{q}\overrightarrow{OS} = (0, 1, v)$$

のなす角であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{|\vec{r}| |\vec{s}|} = \frac{uv}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}} = \frac{uv}{\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}$$

(3) $O(0, 0, 0)$, $P(p, 0, 0)$, $Q(0, q, 0)$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積は $\frac{1}{2}pq$

$\overrightarrow{OR} = p\vec{r}$, $\overrightarrow{OS} = q\vec{s}$ より

$$\begin{aligned} \triangle ORS &= \frac{1}{2}pq\sqrt{|\vec{r}|^2|\vec{s}|^2 - (\vec{r} \cdot \vec{s})^2} \\ &= \frac{1}{2}pq\sqrt{(1+u^2)(1+v^2) - (uv)^2} \\ &= \frac{1}{2}pq\sqrt{1+u^2+v^2} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \triangle OPQ : \triangle ORS = 1 : \sqrt{1+u^2+v^2}$$

- 4 (1) $f(x) = \log x$ より $f'(x) = \frac{1}{x}$
 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - \log a = \frac{1}{a}(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{a} + \log a - 1$$

- (2) $g(x) = \log x^2$ より $g'(x) = \frac{2}{x}$
 $y = g(x)$ 上の点 $(b, g(b))$ における接線の方程式は

$$y - \log b^2 = \frac{2}{b}(x - b)$$

$$\text{すなわち} \quad y = \frac{2x}{b} + 2 \log b - 2$$

これと (1) で求めた接線が一致するとき

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{b}, \quad \log a - 1 = 2 \log b - 2$$

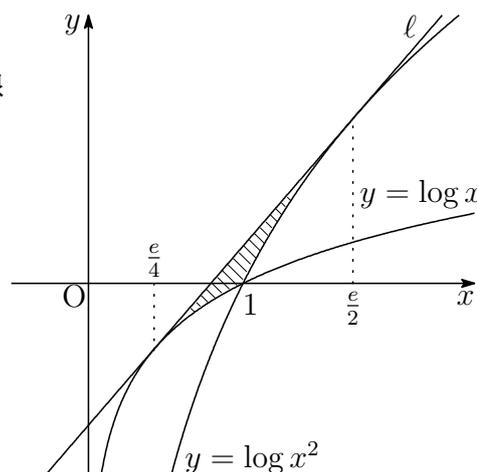
上の第 1 式から $b = 2a$ これを第 2 式に代入して整理すると

$$2 \log 2a - \log a = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \log 4a = 1 \quad \text{すなわち} \quad a = \frac{e}{4}$$

$$a = \frac{e}{4} \text{ を (1) の結果に代入して } y = \frac{4x}{e} - \log 4$$

- (3) $b = 2a = \frac{e}{2}$, 求める面積は上の図の斜線部分で, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{e}{4}}^{\frac{e}{2}} \left(\frac{4x}{e} - \log 4 \right) dx - \int_{\frac{e}{4}}^1 \log x dx - \int_1^{\frac{e}{2}} \log x^2 dx \\ &= \left[\frac{2x^2}{e} - x \log 4 \right]_{\frac{e}{4}}^{\frac{e}{2}} - \left[x(\log x - 1) \right]_{\frac{e}{4}}^1 - \left[2x(\log x - 1) \right]_1^{\frac{e}{2}} \\ &= \frac{3}{8}e - 1 \end{aligned}$$

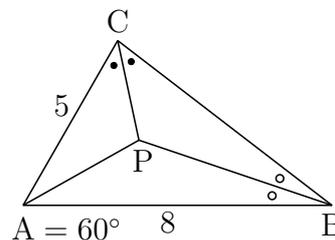


- 5 (1) PA, PB, PC はそれぞれ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の二等分線であるから, $B = 2\beta$, $C = 2\gamma$ とおくと

$$2\beta + 2\gamma = 180^\circ - A = 120^\circ$$

ゆえに $\beta + \gamma = 60^\circ$

よって $\angle BPC = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 120^\circ$



- (2) 余弦定理により

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ = 49 \quad \text{よって} \quad BC = 7$$

BP は $\triangle ABC$ の外接円の半径であるから, 正弦定理により

$$2BP = \frac{BC}{\sin A} = \frac{7}{\sin 60^\circ}$$

よって $BP = \frac{7}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

- (3) $\triangle ABC = \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$

辺 BC の中点を M とすると, P は AM を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\triangle PBC = \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{10}{3}\sqrt{3}$$

6 (1) 特性方程式 $x = 1 + \frac{1}{x}$, すなわち, $x^2 - x - 1 = 0$

の2つの解を $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

上の2式から $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} = -\frac{a_n - \alpha}{\alpha a_n} \quad \dots \textcircled{1}$

同様に $a_{n+1} - \beta = -\frac{a_n - \beta}{\beta a_n} \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② から $\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ ゆえに $\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} \frac{1 - \alpha}{1 - \beta}$

$\alpha + \beta = 1$ より $\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \frac{\beta^n}{\alpha^n}$ したがって $a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \quad \dots (*)$

よって $a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2\{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n\}}$

(2) (*) より $a_n = \frac{\alpha\{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^n\}}{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^n}$

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- 7 (1) n 回投げたとき, 5 以下の異なる目が n 回出る確率であるから

$$\frac{{}_5P_n}{6^n}$$

- (2) 4 回投げたとき, 硬貨がすべて表であるのは, 次の (i)~(iii) の場合である.

(i) 6 の目が 4 回出るとき ... 6666 の 1 通り

(ii) 6 の目が 2 回出るとき (A は 5 以下の正の整数)

$$\text{「A,A,6,6」} \cdots {}_5C_1 \cdot \frac{4!}{2!2!} = 5 \cdot 6 = 30 \text{ (通り)}$$

(iii) 6 の目が出ないとき (A, B は 5 以下の異なる正の整数)

$$\text{「A,A,B,B」} \cdots {}_5C_2 \cdot \frac{4!}{2!2!} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ (通り)}$$

$$\text{「A,A,A,A」} \cdots {}_5C_1 = 5 \text{ (通り)}$$

(i)~(iii) より, 求める確率は

$$(1 + 30 + 65) \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{96}{1296} = \frac{2}{27}$$

- (3) 4 回投げた時点で裏になっている枚数と確率について, 次のようになる.

(a) 裏になっている硬貨が 1 枚のとき (A,B は 5 以下の異なる正の整数)

$$\text{「A,6,6,6」} \cdots {}_5C_1 \cdot \frac{4!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (通り)}$$

$$\text{「A,A,B,6」} \cdots {}_5P_2 \cdot \frac{4!}{2!} = 20 \cdot 12 = 240 \text{ (通り)}$$

$$\text{「A,A,A,6」} \cdots {}_5C_1 \cdot \frac{4!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (通り)}$$

$$\text{よって } (20 + 240 + 20) \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{280}{1296}$$

(b) 裏になっている硬貨が 2 枚のとき (A,B,C は 5 以下の異なる正の整数)

$$\text{「A,B,6,6」} \cdots {}_5C_2 \cdot \frac{4!}{2!} = 10 \cdot 12 = 120 \text{ (通り)}$$

$$\text{「A,A,B,C」} \cdots {}_5 \cdot {}_4C_2 \cdot \frac{4!}{2!} = 5 \cdot 6 \cdot 12 = 360 \text{ (通り)}$$

$$\text{「A,A,A,B」} \cdots {}_5P_2 \cdot \frac{4!}{3!} = 20 \cdot 4 = 80 \text{ (通り)}$$

$$\text{よって } (120 + 360 + 80) \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{560}{1296}$$

(c) 裏になっている硬貨が3枚のとき (A,B,Cは5以下の異なる正の整数)

$$\text{「A,B,C,6」} \cdots {}_5C_3 \cdot 4! = 10 \cdot 24 = 240 \text{ (通り)}$$

$$\text{よって } 240 \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{240}{1296}$$

(d) 裏になっている硬貨が4枚のとき (A,B,C,Dは5以下の異なる正の整数)

$$\text{「A,B,C,D」} \cdots {}_5C_4 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120 \text{ (通り)}$$

$$\text{よって } 120 \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{120}{1296}$$

(a)~(d) から, 求める値は

$$\sum_{t=1}^4 tP(t) = 1 \cdot \frac{280}{1296} + 2 \cdot \frac{560}{1296} + 3 \cdot \frac{240}{1296} + 4 \cdot \frac{120}{1296} = \frac{2600}{1296} = \frac{\mathbf{325}}{\mathbf{162}}$$

注意 (3) は確率変数 t の平均 (期待値) を求める問題.

$$\sum_{t=0}^4 P(t) = 1$$

上式を満たすことを確認して計算する必要がある.

t	0	1	2	3	4	計
$P(t)$	$\frac{96}{1296}$	$\frac{280}{1296}$	$\frac{560}{1296}$	$\frac{240}{1296}$	$\frac{120}{1296}$	1

- 8 (1) l と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると ($0 < \theta < \pi$), 右の図から

$$OQ = 2 \sin \theta, \quad OR = \frac{2}{\sin \theta}$$

したがって, $P(x, y)$ の座標は

$$x = OR \cos \theta = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta},$$

$$y = OQ \sin \theta = 2 \sin^2 \theta$$

上の 2 式から

$$2 \sin^2 \theta = \frac{2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{8}{4 + \left(\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2} \quad \text{よって} \quad y = \frac{8}{4 + x^2}$$

- (2) $f(x) = \frac{8}{4 + x^2}$ より

$$f'(x) = \frac{-16x}{(4 + x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-16(4 + x^2)^2 - (-16x) \cdot 2(4 + x^2) \cdot 2x}{(4 + x^2)^4} = \frac{16(3x^2 - 4)}{(4 + x^2)^3}$$

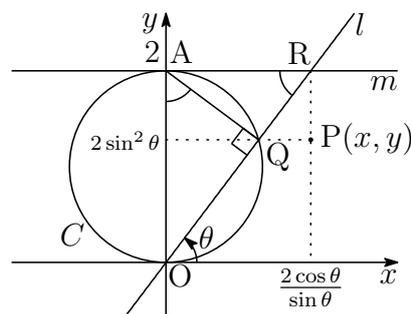
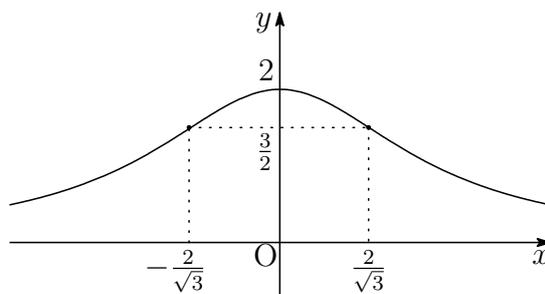
$y = f(x)$ の増減・凹凸は次のようになる.

x	...	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$...	0	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{3}{2}$	↗	2	↘	$\frac{3}{2}$	↘

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

よって 極大値 $f(0) = 2$, 変曲点 $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right)$

また, グラフの概形は次のようになる.



(3) (1) の結果から, 求める面積を S とすると

$$S = \int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{8}{4+x^2} dx$$

$$x = 2 \tan \theta \text{ とおくと } \frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c} x & -2 \rightarrow 2\sqrt{3} \\ \theta & -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$\text{よって } S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8}{4+(2 \tan \theta)^2} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4 d\theta = \left[4\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{3}\pi$$