平成29年度　大分大学2次試験前期日程(数学問題)
工・経済・教育・医学部　平成29年2月25日

- 工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (100分)
- 経済学部　$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (100分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ 数I・II・A・B (80分)
- 医学部　$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数I・II・III・A・B (80分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1辺の長さが1の正四面体PABCにおいて，辺PA，BC，PB，ACの中点をそれぞれK，L，M，Nとする．線分KL，MNの中点をそれぞれQ，Rとし，△ABCの重心をGとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}$とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表し，点QとRが一致することを示しなさい．

(2) 3点P，Q，Gが同一直線上にあることを示しなさい．また，PQ : QGを求めなさい．

(3) PG⊥ABを示しなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a，bを1より大きい定数とし，$\log_{ab} x+\log_{ab} y=2$とする．

(1) xyをa，bの式で表しなさい．

(2) $ax+by$の最小値をa，bの式で表しなさい．

(3) $(ax-1)^2+(by-1)^2$の最小値をa，bの式で表しなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a_1=3$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k=4a_n+1\ (n=1,2,3,\cdots)$で定められる数列$\{a_n\}$がある．

(1) nを2以上の自然数とするとき，a_{n+1}をa_n，a_{n-1}で表しなさい．

(2) $a_{n+1}-2a_n$をnの式で表しなさい．

(3) a_nをnの式で表しなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x)=2-e^{-\frac{x^2}{2}}$とする．

(1) 関数$y=f(x)$の増減，グラフの凹凸を調べ，極値，変曲点を求めなさい．また，そのグラフをかきなさい．

(2) kを定数とする．方程式$f(x)=k$の異なる実数解の個数を求めなさい．

(3) すべての実数xに対して，不等式$f(x)\leqq 1+\dfrac{1}{2}x^2$が成り立つことを示しなさい．

5 $0 \leqq t \leqq 1$ とし，関数 $f(x) = x^2 - 4|x-1|$ に対して，

$$S(t) = \int_t^{2t} f(x)\,dx$$

とする．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2) $S(t)$ を求めなさい．

(3) $S(t)$ の最大値と最小値を求めなさい．

6 $\triangle$ABC において AB $= 5$，AC $= 3$ とし $\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を P とする．頂点 C から直線 AP に下ろした垂線と，直線 AP，AB との交点をそれぞれ D，E とする．

(1) 線分 BE の長さを求めなさい．

(2) 辺 BC の中点を M とするとき，線分 MD の長さを求めなさい．

(3) AD : DP を求めなさい．

7 同じ大きさと重さの白石と黒石がそれぞれ m 個と n 個ある．これらの石から k 個を無作為に抽出し，その中の白石の数を X とする．ただし m，n，k は自然数で $1 \leqq k < m$，$1 \leqq k < n$ である．以下の問いに答えなさい．

(1) 整数 i に対して $X = i$ の確率 $p(i,\ k \mid m,\ n)$ を求めなさい．ただし，組合せの記号 ${}_q\mathrm{C}_r$ を用いて結果を表現しなさい．

(2) $m = 4$，$n = 6$，$k = 3$ のときの X の期待値を求めなさい．

(3) 一般の m，n，k に対して X の期待値を求めなさい．

8 複素数 $x = 1 - \sqrt{3}\,i$ について以下の問いに答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $x = 1 - \sqrt{3}\,i$ を解とする実数係数の 2 次方程式を作りなさい．

(2) $x^n\ (n = 1, 2, \ldots)$ を求めなさい．

(3) 自然数 m に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k$ を求めなさい．

9 放物線 $y = -x^2$ と $y = x^2 - 2x$ のそれぞれの上を動く点を P と Q とする．現在時刻 $t = 0$ で $\mathrm{P} = (0,\ 0)$，$\mathrm{Q} = (1, -1)$ にあり，それぞれの放物線上を速さ 1 で P は x 座標が増加する方向に，Q は x 座標が減少する方向に動く．以下の問いに答えなさい．

(1) 点 $\mathrm{P} = (x, -x^2)$ とするとき，Q の座標を求めなさい．

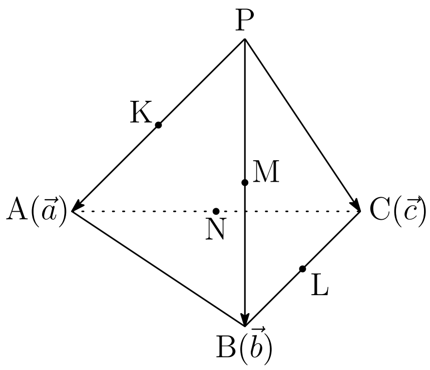
(2) 動点 P と Q の距離の 2 乗の最小値とそのときの P の座標を求めなさい．

(3) 関数 $g(x) = \dfrac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1}) + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}$ を x で微分しなさい．

(4) 動点 P と Q の距離の 2 乗が最小となる時刻 t を求めなさい．ただし，(2) の P の x 座標を a として，求める時刻を表現してもよい．

解答例

1 (1) 4点K，L，M，Nは，辺PA，BC，PB，ACの中点であるから，右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{PK}} = \frac{1}{2}\vec{a}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PL}} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \frac{1}{2}\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PN}} = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$$

2点Q，Rは線分KL，MNの中点であるから，上の諸式より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PK}}+\overrightarrow{\mathrm{PL}}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{PN}}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

上の2式から，点QとRは一致する．

(2) 点Gは△ABCの重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}) = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \quad \cdots①$$

上式および(1)の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{PG}}$

よって，3点P，Q，Gは同一直線上にある．また　$\mathbf{PQ : QG = 3 : 1}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}-\vec{a}$ であるから，これと①より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) \\ &= \frac{1}{3}(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}) \quad \cdots②\end{aligned}$$

このとき，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

これらを②に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$　よって　$\mathbf{PG \perp AB}$ ■

2 (1) $\log_{ab} x + \log_{ab} y = 2 \cdots$ ① より　$\log_{ab} xy = 2$

よって　　$xy = (ab)^2 = \boldsymbol{a^2b^2}$

(2) ① の真数により，$x,\ y > 0$．また，$a,\ b > 1$ であるから　$ax > 0$，$by > 0$

したがって，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$ax + by \geqq 2\sqrt{ax{\cdot}by} = 2\sqrt{abxy}$$

これに ① の結果を代入すると　$ax + by \geqq 2ab\sqrt{ab}$　$\cdots$ ②

② において，等号が成立するのは，$ax = by$ のときで，$k > 0$ を用いて

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{a} = k \quad \text{ゆえに} \quad x = bk,\quad y = ak$$

とおき，(1) の結果に代入すると　$ak{\cdot}bk = a^2b^2$　ゆえに　$k = \sqrt{ab}$

よって　　$ax + by$ は，$x = b\sqrt{ab}$，$y = a\sqrt{ab}$ のとき，

最小値 $\boldsymbol{2ab\sqrt{ab}}$ をとる．

(3) $\vec{u} = (1,\ 1)$，$\vec{v} = (ax - 1,\ by - 1)$ とおくと，$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq (\vec{a}{\cdot}\vec{b})^2$ であるから

$$(1^2 + 1^2)\{(ax - 1)^2 + (by - 1)^2\} \geqq \{1(ax - 1) + 1(by - 1)\}^2$$

したがって　　$(ax - 1)^2 + (by - 1)^2 \geqq \dfrac{1}{2}(ax + by - 2)^2$　$\cdots$ ③

③ において，等号が成立するのは，$\vec{u}/\!/\vec{v}$ のときで，

$$ax - 1 = by - 1 \quad \text{ゆえに} \quad ax = by$$

(2) と同様の議論により　$x = b\sqrt{ab},\ y = a\sqrt{ab}$

②，③ により，$a,\ b > 1$ であるから $2ab\sqrt{ab} - 2 > 0$ に注意して

$$(ax - 1)^2 + (by - 1)^2 \geqq \frac{1}{2}(2ab\sqrt{ab} - 2)^2 = 2(ab\sqrt{ab} - 1)^2$$

よって　　$(ax - 1)^2 + (by - 2)^2$ は，$x = b\sqrt{ab}$，$y = a\sqrt{ab}$ のとき，

最小値 $\boldsymbol{2(ab\sqrt{ab} - 1)^2}$ をとる．

■

$\boxed{3}$ (1) (∗) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n + 1 \ (n = 1, 2, 3)$ より

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= (4a_n + 1) - (4a_{n-1} + 1) \\ &= \boldsymbol{4a_n - 4a_{n-1}} \end{aligned}$$

(2) $n = 1$ を (∗) に代入すると

$$a_1 + a_2 = 4a_1 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a_2 = 3a_1 + 1 = 3\cdot3 + 1 = 10$$

(1) の結果から $\quad a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1}) \quad (n \geqq 2)$

したがって，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は，初項が $a_2 - 2a_1$，公比が 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1)\cdot2^{n-1} = (10 - 2\cdot3)\cdot2^{n-1} = \boldsymbol{2^{n+1}}$$

(3) (2) の結果から $\quad \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = 1$

したがって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項が $\dfrac{a_1}{2}$，公差が 1 の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + (n-1)\cdot1 = \frac{3}{2} + n - 1 = \frac{2n+1}{2}$$

よって $\quad \boldsymbol{a_n = (2n+1)\cdot2^{n-1}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $f(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ f''(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x)(1-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

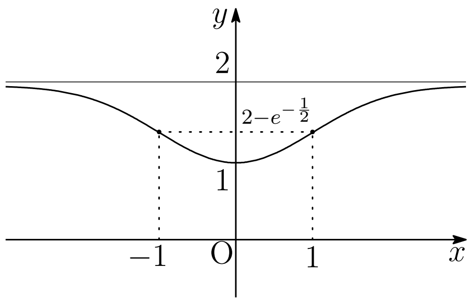
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	変曲点 $2 - e^{-\frac{1}{2}}$	↘	極小 1	↗	変曲点 $2 - e^{-\frac{1}{2}}$	↗

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$

よって，極小値 $\boldsymbol{f(0) = 1}$，変曲点 $\boldsymbol{(\pm1,\ 2 - e^{-\frac{1}{2}})}$

グラフの概形は次のようになる．



(2) 方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数であるから，(1) の結果より

$\boldsymbol{k<1,\ 2 \leqq k}$ **のとき**	**0 個,**
$\boldsymbol{k=1}$ **のとき**	**1 個,**
$\boldsymbol{1<k<2}$ **のとき**	**2 個**

(3) $g(x)=1+\dfrac{1}{2}x^2-f(x)$ とおくと

$$g(0)=1-f(0)=1-1=0,$$
$$g'(x)=x-f'(x)=x-xe^{-\frac{1}{2}x^2}=x(1-e^{-\frac{1}{2}x^2})$$

$x>0$ のとき，$g'(x)>0$ であるから，$g(0)=0$ より

$$g(x) \geqq 0 \quad (x \geqq 0)$$

これから，$x \leqq 0$ のとき，$g(-x) \geqq 0$ となり，$g(x)=g(-x)$ であるから

$$g(x) \geqq 0 \quad (x \leqq 0)$$

よって，すべての実数 x に対して

$$g(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) \leqq 1+\frac{1}{2}x^2$$

解説 凸関数 $y=e^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式は　$y=x+1$
したがって，すべての実数 x に対して

$$e^x \geqq x+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2-e^x \leqq 1-x$$

x を $-\dfrac{x^2}{2}$ に置き換えることにより　　$2-e^{-\frac{x^2}{2}} \leqq 1+\dfrac{1}{2}x^2$ ■

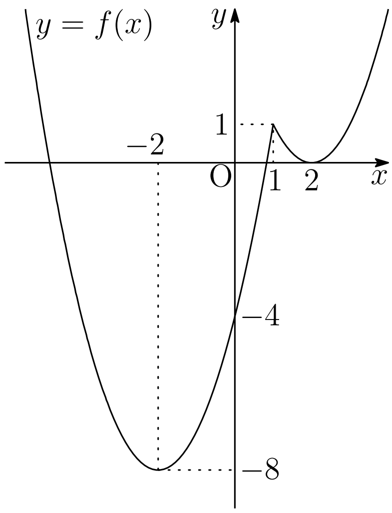
$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y = x^2 - 4|x-1|$

(i) $x \geqq 1$ のとき，$|x-1| = x-1$ より

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4(x-1) \\ &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

(ii) $x < 1$ のとき，$|x-1| = -x+1$ より

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4(-x+1) \\ &= x^2 + 4x - 4 \\ &= (x+2)^2 - 8 \end{aligned}$$



したがって，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

(2) $S(t) = \displaystyle\int_t^{2t} f(x)\,dx \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ より

(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{2t} (x^2 + 4x - 4)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x\right]_t^{2t} = \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{2} < t \leqq 1$ のとき，(i) の結果に注意して

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^1 (x^2 + 4x - 4)\,dx + \int_1^{2t} (x^2 - 4x + 4)\,dx \\ &= \int_t^1 (x^2 + 4x - 4)\,dx + \int_1^{2t} \{(x^2 + 4x - 4) + (-8x + 8)\}\,dx \\ &= \int_t^{2t} (x^2 + 4x - 4)\,dx + \int_1^{2t} (-8x + 8)\,dx \\ &= \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t + \Big[-4x^2 + 8x\Big]_1^{2t} = \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4 \end{aligned}$$

(i)，(ii) より $\quad \boldsymbol{S(t) = \begin{cases} \dfrac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4 & \left(\dfrac{1}{2} < t \leqq 1\right) \end{cases}}$

(3) (2) の結果から

$$0 < t < \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad S'(t) = 7t^2 + 12t - 4 = (7t-2)(t+2)$$

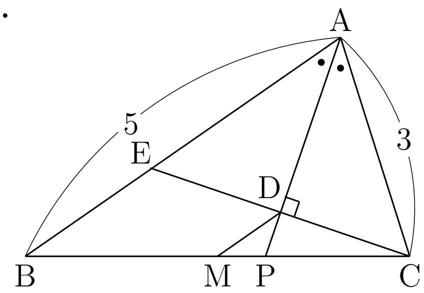
$$\frac{1}{2} < t < 1 \text{ のとき} \quad S'(t) = 7t^2 - 20t + 12 = (7t-6)(t-2)$$

したがって，$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{7}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{6}{7}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	0	$\searrow$	極小 $-\frac{88}{147}$	$\nearrow$	$-\frac{5}{24}$	$\nearrow$	極大 $\frac{20}{49}$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

よって　最大値 $\boldsymbol{S\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{20}{49}}$，　最小値 $\boldsymbol{S\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{88}{147}}$ ■

6 (1) △ACD と △AED において，AD は共通．



条件より　$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{EAD}$

$\mathrm{AD}\perp\mathrm{CD}$ より　$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ADE}$

したがって　$\triangle\mathrm{ACD} \equiv \triangle\mathrm{AED}$

$\mathrm{AC} = \mathrm{AE} = 3$ より　$\mathrm{BE} = \mathrm{AB} - \mathrm{AE}$

$= 5 - 3 = \mathbf{2}$

(2) 2 点 M，D はそれぞれ CB，CE の中点であるから，中点連結定理により

$$\mathrm{MD} = \frac{1}{2}\mathrm{BE} = \frac{1}{2}\cdot 2 = \mathbf{1}$$

(3) AP は ∠A の二等分線であるから　BP : PC = AB : AC = 5 : 3

△APB と直線 CE にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DP}}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DP}}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} = 1$$

よって　　**AD : DP = 4 : 1** ■

$\boxed{7}$ (1) 白玉 m 個と黒玉 n 個から k 個取り出すとき，白玉を i 個，黒玉を $k-i$ 個取り出す確率であるから

$$\boldsymbol{p(i,\ k \mid m,\ n) = \frac{{}_m\mathrm{C}_i\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-i}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_k}}$$

(2) $m=4$，$n=6$，$k=3$ のとき，(1) の結果を利用することにより，X の期待値 (確率変数 X の平均) は

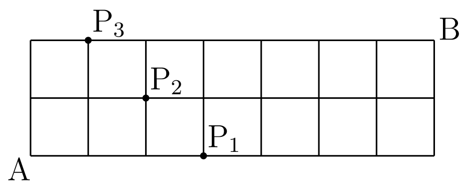
$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{3} i\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_i\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i}}{{}_{10}\mathrm{C}_3} \\
&= \frac{1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\,(1\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_2 + 2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_1 + 3\cdot{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_6\mathrm{C}_0) \\
&= \frac{1}{120}(1\cdot4\cdot15 + 2\cdot6\cdot6 + 3\cdot4\cdot1) = \frac{144}{120} = \boldsymbol{\frac{6}{5}}
\end{aligned}$$

別解 $i\cdot{}_4\mathrm{C}_i = 4\cdot{}_3\mathrm{C}_{i-1}$ であるから $(i=1,2,3)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} i\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_i\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i}}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{4}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\sum_{i=1}^{3}{}_3\mathrm{C}_{i-1}\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i}$$

${}_3\mathrm{C}_{i-1}\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i}$ は，下図の地点 A から地点 P_i を通って地点 B へ行く道順の総数に等しいから $(i=1,2,3)$，次式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{3}{}_3\mathrm{C}_{i-1}\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i} = {}_9\mathrm{C}_2$$



よって　$E(X) = \dfrac{4}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\times{}_9\mathrm{C}_2 = \dfrac{4}{120}\times 36 = \boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$

(3) $1 \leqq i \leqq k$ のとき，$i\cdot{}_m\mathrm{C}_i = m\cdot{}_{m-1}\mathrm{C}_{i-1}$ であるから，(1) の結果より

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{k} i\cdot\frac{{}_m\mathrm{C}_i\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-i}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_k} = \frac{m}{{}_{m+n}\mathrm{C}_k}\sum_{i=1}^{k}{}_{m-1}\mathrm{C}_{i-1}\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-i} \\
&= \frac{m}{{}_{m+n}\mathrm{C}_k}\times{}_{m+n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\
&= \frac{m\cdot k!(m+n-k)!}{(m+n)!}\times\frac{(m+n-1)!}{(k-1)!(m+n-k)!} \\
&= \boldsymbol{\frac{mk}{m+n}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $1+\sqrt{3}\,i$ と $1-\sqrt{3}\,i$ を解にもつ2次方程式は

$$x^2-\{(1+\sqrt{3}\,i)+(1-\sqrt{3}\,i)\}x+(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)=0$$

よって　　$\boldsymbol{x^2-2x+4=0}$

(2) $x=1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$x^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=\boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)}$$

(3) $t=(-2)^{-1}x$ とおくと，(1) の結果から，$t^2+t+1=0$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k&=\sum_{k=1}^{3m}t^k=\sum_{j=0}^{m-1}(t^{3j+1}+t^{3j+2}+t^{3j+3})\\&=\sum_{j=0}^{m-1}t^{3j+1}(1+t+t^2)=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

別解 $t=(-2)^{-1}x$ とおくと　$t=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

したがって　　$t^{3m}=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi=1$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k=\sum_{k=1}^{3m}t^k=\frac{t(t^{3m}-1)}{t-1}=\boldsymbol{0}$　■

$\boxed{9}$ (1) 放物線 $y=-x^2$ と $y=x^2-2x$ は点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ に関して対称であり，現在時刻 $t=0$ で，$\mathrm{P}=(0,\ 0)$ と $\mathrm{Q}=(1,-1)$ は，点Aに関して対称である．このとき，動点P，Qは，点Aに関して対称であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-(x,-x^2)\\&=(1-x,\ x^2-1)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{Q}=(1-x,\ x^2-1)}$

(2) P$(x, -x^2)$，Q$(1-x,\ x^2-1)$ より，$f(x)=\mathrm{PQ}^2$ とおくと

$$f(x)=(1-2x)^2+(2x^2-1)^2=4x^4-4x+2$$
$$f'(x)=16x^3-4=4(4x^3-1)$$

$f'(x)=0$ の解を a とすると　　$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

よって，求める最小値は

$$f(a)=4a^4-4a+2=4a^3\cdot a-4a+2$$
$$=4\cdot\frac{1}{4}a-4a+2=-3a+2=\boldsymbol{-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}+2}$$

そのときの P の座標は

$$(a, -a^2)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)}$$

(3) $g(x)=\dfrac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}$ より

$$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1+x^2}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}=\boldsymbol{\sqrt{x^2+1}}$$

(4) 放物線 $y=-x^2$ 上の原点から $(a, -a^2)$ までの弧長が t に等しいから

$$t=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+(-2x)^2}\,dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{4x^2+1}\,dx=\int_0^a g'(2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}g(2x)\right]_0^a=\frac{1}{2}\{g(2a)-g(0)\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\log(2a+\sqrt{4a^2+1})+\frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+1}}$$

■