

平成 29 年度 大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工・経済・教育・医学部 平成 29 年 2 月 25 日

- 工学部は, [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部は, [1], [3], [5], [6] 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育学部は, [1], [3], [5] 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は, [7] ~ [9] 数 I・II・III・A・B (80 分)

[1] 1 辺の長さが 1 の正四面体 PABC において, 辺 PA, BC, PB, AC の中点をそれぞれ K, L, M, N とする. 線分 KL, MN の中点をそれぞれ Q, R とし, $\triangle ABC$ の重心を G とする. また, $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$ とおく.

- (1) \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表し, 点 Q と R が一致することを示しなさい.
- (2) 3 点 P, Q, G が同一直線上にあることを示しなさい. また, $PQ : QG$ を求めなさい.
- (3) $PG \perp AB$ を示しなさい.

[2] a, b を 1 より大きい定数とし, $\log_{ab} x + \log_{ab} y = 2$ とする.

- (1) xy を a, b の式で表しなさい.
- (2) $ax + by$ の最小値を a, b の式で表しなさい.
- (3) $(ax - 1)^2 + (by - 1)^2$ の最小値を a, b の式で表しなさい.

[3] $a_1 = 3$, $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

- (1) n を 2 以上の自然数とすると, a_{n+1} を a_n, a_{n-1} で表しなさい.
- (2) $a_{n+1} - 2a_n$ を n の式で表しなさい.
- (3) a_n を n の式で表しなさい.

[4] $f(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする.

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減, グラフの凹凸を調べ, 極値, 変曲点を求めなさい. また, そのグラフをかきなさい.
- (2) k を定数とする. 方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めなさい.
- (3) すべての実数 x に対して, 不等式 $f(x) \leq 1 + \frac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示しなさい.

5 $0 \leq t \leq 1$ とし, 関数 $f(x) = x^2 - 4|x - 1|$ に対して,

$$S(t) = \int_t^{2t} f(x) dx$$

とする.

- (1) $y = f(x)$ のグラフをかきなさい.
- (2) $S(t)$ を求めなさい.
- (3) $S(t)$ の最大値と最小値を求めなさい.

6 $\triangle ABC$ において $AB = 5$, $AC = 3$ とし $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を P とする. 頂点 C から直線 AP に下ろした垂線と, 直線 AP , AB との交点をそれぞれ D , E とする.

- (1) 線分 BE の長さを求めなさい.
- (2) 辺 BC の中点を M とするとき, 線分 MD の長さを求めなさい.
- (3) $AD : DP$ を求めなさい.

7 同じ大きさと重さの白石と黒石がそれぞれ m 個と n 個ある. これらの石から k 個を無作為に抽出し, その中の白石の数を X とする. ただし m, n, k は自然数で $1 \leq k < m, 1 \leq k < n$ である. 以下の問いに答えなさい.

- (1) 整数 i に対して $X = i$ の確率 $p(i, k | m, n)$ を求めなさい. ただし, 組合せの記号 ${}_qC_r$ を用いて結果を表現しなさい.
- (2) $m = 4, n = 6, k = 3$ のときの X の期待値を求めなさい.
- (3) 一般の m, n, k に対して X の期待値を求めなさい.

8 複素数 $x = 1 - \sqrt{3}i$ について以下の問いに答えなさい. ただし, i は虚数単位とする.

- (1) $x = 1 - \sqrt{3}i$ を解とする実数係数の 2 次方程式を作りなさい.
- (2) x^n ($n = 1, 2, \dots$) を求めなさい.

- (3) 自然数 m に対して $\sum_{k=1}^{3m} (-2)^{-k} x^k$ を求めなさい.

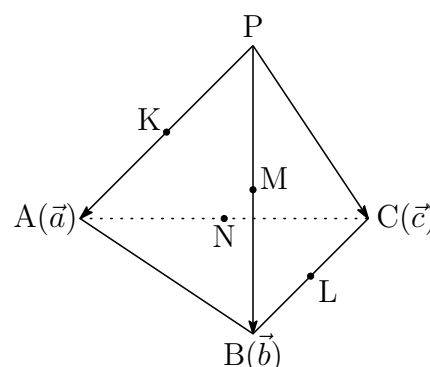
9 放物線 $y = -x^2$ と $y = x^2 - 2x$ のそれぞれの上を動く点を P と Q とする. 現在時刻 $t = 0$ で $P = (0, 0), Q = (1, -1)$ にあり, それぞれの放物線上を速さ 1 で P は x 座標が増加する方向に, Q は x 座標が減少する方向に動く. 以下の問いに答えなさい.

- (1) 点 $P = (x, -x^2)$ とするとき, Q の座標を求めなさい.
- (2) 動点 P と Q の距離の 2 乗の最小値とそのときの P の座標を求めなさい.
- (3) 関数 $g(x) = \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1}$ を x で微分しなさい.
- (4) 動点 P と Q の距離の 2 乗が最小となる時刻 t を求めなさい. ただし, (2) の P の x 座標を a として, 求める時刻を表現してもよい.

正解

- 1 (1) 4点K, L, M, Nは, 辺PA, BC, PB, ACの中点であるから, 右の図から

$$\begin{aligned}\vec{PK} &= \frac{1}{2}\vec{a}, & \vec{PL} &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{PM} &= \frac{1}{2}\vec{b}, & \vec{PN} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a})\end{aligned}$$



2点Q, Rは線分KL, MNの中点であるから, 上の諸式より

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \frac{1}{2}(\vec{PK} + \vec{PL}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{PR} &= \frac{1}{2}(\vec{PM} + \vec{PN}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

上の2式から, 点QとRは一致する.

- (2) 点Gは $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\vec{PG} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \dots \textcircled{1}$$

上式および(1)の結果から $\vec{PQ} = \frac{3}{4}\vec{PG}$

よって, 3点P, Q, Gは同一直線上にある. また $PQ : QG = 3 : 1$

- (3) $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ であるから, これと $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}\vec{PG} \cdot \vec{AB} &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{3}(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a}) \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

このとき, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

これらを $\textcircled{2}$ に代入すると $\vec{PG} \cdot \vec{AB} = 0$ よって $PG \perp AB$

2 (1) $\log_{ab} x + \log_{ab} y = 2 \cdots \textcircled{1}$ より $\log_{ab} xy = 2$

よって $xy = (ab)^2 = a^2 b^2$

(2) $\textcircled{1}$ の真数により, $x, y > 0$. また, $a, b > 1$ であるから $ax > 0, by > 0$ したがって, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$ax + by \geq 2\sqrt{ax \cdot by} = 2\sqrt{abxy}$$

これに $\textcircled{1}$ の結果を代入すると $ax + by \geq 2ab\sqrt{ab} \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ において, 等号が成立するのは, $ax = by$ のときで, $k > 0$ を用いて

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{a} = k \quad \text{ゆえに} \quad x = bk, \quad y = ak$$

とおき, (1) の結果に代入すると $ak \cdot bk = a^2 b^2$ ゆえに $k = \sqrt{ab}$

よって $ax + by$ は, $x = b\sqrt{ab}, y = a\sqrt{ab}$ のとき,

最小値 $2ab\sqrt{ab}$ をとる.

(3) $\vec{u} = (1, 1), \vec{v} = (ax - 1, by - 1)$ とおくと, $|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ であるから

$$(1^2 + 1^2)\{(ax - 1)^2 + (by - 1)^2\} \geq \{1(ax - 1) + 1(by - 1)\}^2$$

したがって $(ax - 1)^2 + (by - 1)^2 \geq \frac{1}{2}(ax + by - 2)^2 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{3}$ において, 等号が成立するのは, $\vec{u} // \vec{v}$ のときで,

$$ax - 1 = by - 1 \quad \text{ゆえに} \quad ax = by$$

(2) と同様の議論により $x = b\sqrt{ab}, y = a\sqrt{ab}$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ により, $a, b > 1$ であるから $2ab\sqrt{ab} - 2 > 0$ に注意して

$$(ax - 1)^2 + (by - 1)^2 \geq \frac{1}{2}(2ab\sqrt{ab} - 2)^2 = 2(ab\sqrt{ab} - 1)^2$$

よって $(ax - 1)^2 + (by - 1)^2$ は, $x = b\sqrt{ab}, y = a\sqrt{ab}$ のとき,

最小値 $2(ab\sqrt{ab} - 1)^2$ をとる.

$$\boxed{3} \quad (1) \quad (*) \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \\ &= (4a_n + 1) - (4a_{n-1} + 1) \\ &= 4a_n - 4a_{n-1} \end{aligned}$$

(2) $n = 1$ を (*) に代入すると

$$a_1 + a_2 = 4a_1 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

$$(1) \text{ の結果から} \quad a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1}) \quad (n \geq 2)$$

したがって、数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は、初項が $a_2 - 2a_1$ 、公比が 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1) \cdot 2^{n-1} = (10 - 2 \cdot 3) \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果から} \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = 1$$

したがって、数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項が $\frac{a_1}{2}$ 、公差が 1 の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + (n-1) \cdot 1 = \frac{3}{2} + n - 1 = \frac{2n+1}{2}$$

$$\text{よって} \quad a_n = (2n+1) \cdot 2^{n-1}$$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad f(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ より}$$

$$f'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x)(1-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

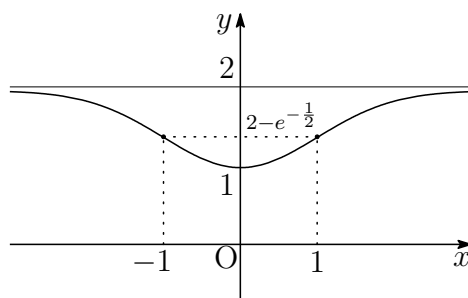
$f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	↘	変曲点 $2 - e^{-\frac{1}{2}}$	↘	極小 1	↗	変曲点 $2 - e^{-\frac{1}{2}}$	↗

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

よって、極小値 $f(0) = 1$ 、変曲点 $(\pm 1, 2 - e^{-\frac{1}{2}})$

グラフの概形は次のようになる.



- (2) 方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数は, $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の共有点の個数であるから, (1) の結果より

$$\begin{aligned} k < 1, 2 \leq k \text{ のとき} & \quad 0 \text{ 個,} \\ k = 1 \text{ のとき} & \quad 1 \text{ 個,} \\ 1 < k < 2 \text{ のとき} & \quad 2 \text{ 個} \end{aligned}$$

- (3) $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 - f(0) = 1 - 1 = 0, \\ g'(x) &= x - f'(x) = x - xe^{-\frac{1}{2}x^2} = x(1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}) \end{aligned}$$

$x > 0$ のとき, $g'(x) > 0$ であるから, $g(0) = 0$ より

$$g(x) \geq 0 \quad (x \geq 0)$$

これから, $x \leq 0$ のとき, $g(-x) \geq 0$ となり, $g(x) = g(-x)$ であるから

$$g(x) \geq 0 \quad (x \leq 0)$$

よって, すべての実数 x に対して

$$g(x) \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) \leq 1 + \frac{1}{2}x^2$$

解説 凸関数 $y = e^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の方程式は $y = x + 1$ したがって, すべての実数 x に対して

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2 - e^x \leq 1 - x$$

$$x \text{ を } -\frac{x^2}{2} \text{ に置き換えることにより} \quad 2 - e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 1 + \frac{1}{2}x^2$$

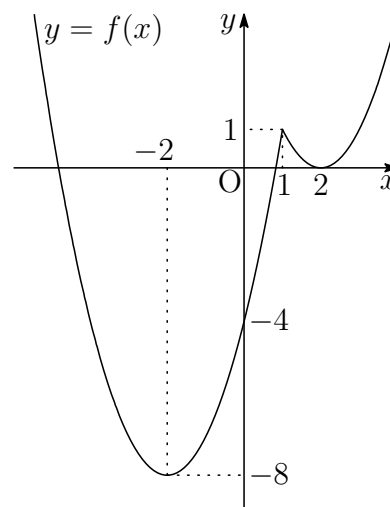
5 (1) $y = x^2 - 4|x - 1|$

(i) $x \geq 1$ のとき, $|x - 1| = x - 1$ より

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4(x - 1) \\ &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x - 2)^2 \end{aligned}$$

(ii) $x < 1$ のとき, $|x - 1| = -x + 1$ より

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4(-x + 1) \\ &= x^2 + 4x - 4 \\ &= (x + 2)^2 - 8 \end{aligned}$$



したがって, $y = f(x)$ のグラフは, 右の図のようになる.

(2) $S(t) = \int_t^{2t} f(x) dx$ ($0 \leq t \leq 1$) より

(i) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{2t} (x^2 + 4x - 4) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x \right]_t^{2t} = \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t \end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2} < t \leq 1$ のとき, (i) の結果に注意して

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^1 (x^2 + 4x - 4) dx + \int_1^{2t} (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \int_t^1 (x^2 + 4x - 4) dx + \int_1^{2t} \{(x^2 + 4x - 4) + (-8x + 8)\} dx \\ &= \int_t^{2t} (x^2 + 4x - 4) dx + \int_1^{2t} (-8x + 8) dx \\ &= \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t + \left[-4x^2 + 8x \right]_1^{2t} = \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4 \end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{ より } S(t) = \begin{cases} \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2} \right) \\ \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4 & \left(\frac{1}{2} < t \leq 1 \right) \end{cases}$$

(3) (2) の結果から

$$0 < t < \frac{1}{2} \text{ のとき } S'(t) = 7t^2 + 12t - 4 = (7t - 2)(t + 2)$$

$$\frac{1}{2} < t < 1 \text{ のとき } S'(t) = 7t^2 - 20t + 12 = (7t - 6)(t - 2)$$

したがって、 $0 \leq t \leq 1$ における $S(t)$ の増減表は

t	0	...	$\frac{2}{7}$...	$\frac{1}{2}$...	$\frac{6}{7}$...	1
$S'(t)$		-	0	+		+	0	-	
$S(t)$	0	↘	極小 $-\frac{88}{147}$	↗	$-\frac{5}{24}$	↗	極大 $\frac{20}{49}$	↘	$\frac{1}{3}$

よって 最大値 $S\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{20}{49}$, 最小値 $S\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{88}{147}$

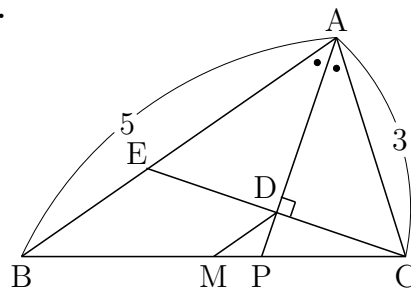
6 (1) $\triangle ACD$ と $\triangle AED$ において, AD は共通.

条件より $\angle CAD = \angle EAD$

$AD \perp CD$ より $\angle ADC = \angle ADE$

したがって $\triangle ACD \equiv \triangle AED$

$AC = AE = 3$ より $BE = AB - AE$
 $= 5 - 3 = 2$



(2) 2点 M, D はそれぞれ CB, CE の中点であるから, 中点連結定理により

$$MD = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

(3) AP は $\angle A$ の二等分線であるから $BP : PC = AB : AC = 5 : 3$

$\triangle APB$ と直線 CE にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AD}{DP} \cdot \frac{PC}{CB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AD}{DP} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

よって $AD : DP = 4 : 1$

- 7 (1) 白玉 m 個と黒玉 n 個から k 個取り出すとき、白玉を i 個、黒玉を $k-i$ 個取り出す確率であるから

$$p(i, k | m, n) = \frac{m C_i \cdot n C_{k-i}}{m+n C_k}$$

- (2) $m = 4, n = 6, k = 3$ のとき、(1) の結果を利用することにより、 X の期待値 (確率変数 X の平均) は

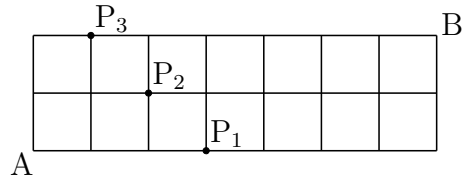
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^3 i \cdot \frac{4 C_i \cdot 6 C_{3-i}}{10 C_3} \\ &= \frac{1}{10 C_3} (1 \cdot 4 C_1 \cdot 6 C_2 + 2 \cdot 4 C_2 \cdot 6 C_1 + 3 \cdot 4 C_3 \cdot 6 C_0) \\ &= \frac{1}{120} (1 \cdot 4 \cdot 15 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 1) = \frac{144}{120} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

別解 $i \cdot 4 C_i = 4 \cdot 3 C_{i-1}$ であるから ($i = 1, 2, 3$)

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 i \cdot \frac{4 C_i \cdot 6 C_{3-i}}{10 C_3} = \frac{4}{10 C_3} \sum_{i=1}^3 3 C_{i-1} \cdot 6 C_{3-i}$$

$3 C_{i-1} \cdot 6 C_{3-i}$ は、下図の地点 A から地点 P_i を通って地点 B へ行く道順の総数に等しいから ($i = 1, 2, 3$)、次式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^3 3 C_{i-1} \cdot 6 C_{3-i} = 9 C_2$$



$$\text{よって } E(X) = \frac{4}{10 C_3} \times 9 C_2 = \frac{4}{120} \times 36 = \frac{6}{5}$$

- (3) $1 \leq i \leq k$ のとき、 $i \cdot m C_i = m \cdot m-1 C_{i-1}$ であるから、(1) の結果より

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^k i \cdot \frac{m C_i \cdot n C_{k-i}}{m+n C_k} = \frac{m}{m+n C_k} \sum_{i=1}^k m-1 C_{i-1} \cdot n C_{k-i} \\ &= \frac{m}{m+n C_k} \times m+n-1 C_{k-1} \\ &= \frac{m \cdot k! (m+n-k)!}{(m+n)!} \times \frac{(m+n-1)!}{(k-1)! (m+n-k)!} \\ &= \frac{mk}{m+n} \end{aligned}$$

8 (1) $1 + \sqrt{3}i$ と $1 - \sqrt{3}i$ を解にもつ 2 次方程式は

$$x^2 - \{(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i)\}x + (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = 0$$

よって $x^2 - 2x + 4 = 0$

(2) $x = 1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ より

$$x^n = 2^n \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

(3) $t = (-2)^{-1}x$ とおくと, (1) の結果から, $t^2 + t + 1 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3m} (-2)^{-k} x^k &= \sum_{k=1}^{3m} t^k = \sum_{j=0}^{m-1} (t^{3j+1} + t^{3j+2} + t^{3j+3}) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} t^{3j+1} (1 + t + t^2) = 0 \end{aligned}$$

別解 $t = (-2)^{-1}x$ とおくと $t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

したがって $t^{3m} = \cos 2m\pi + i \sin 2m\pi = 1$

よって $\sum_{k=1}^{3m} (-2)^{-k} x^k = \sum_{k=1}^{3m} t^k = \frac{t(t^{3m} - 1)}{t - 1} = 0$

9 (1) 放物線 $y = -x^2$ と $y = x^2 - 2x$ は点 $A \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ に関して対称であり, 現在時刻 $t = 0$ で, $P = (0, 0)$ と $Q = (1, -1)$ は, 点 A に関して対称である. このとき, 動点 P, Q は, 点 A に関して対称であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) - (x, -x^2) \\ &= (1 - x, x^2 - 1) \end{aligned}$$

よって $Q = (1 - x, x^2 - 1)$

(2) $P(x, -x^2)$, $Q(1-x, x^2-1)$ より, $f(x) = PQ^2$ とおくと

$$f(x) = (1-2x)^2 + (2x^2-1)^2 = 4x^4 - 4x + 2$$

$$f'(x) = 16x^3 - 4 = 4(4x^3 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ の解を } a \text{ とすると } a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

したがって, $f(x)$ の増減表は

x	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗

よって, 求める最小値は

$$\begin{aligned} f(a) &= 4a^4 - 4a + 2 = 4a^3 \cdot a - 4a + 2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4} a - 4a + 2 = -3a + 2 = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} + 2 \end{aligned}$$

そのときの P の座標は

$$(a, -a^2) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \right)$$

(3) $g(x) = \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1}$ より

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1 + x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

(4) 放物線 $y = -x^2$ 上の原点から $(a, -a^2)$ までの弧長が t に等しいから

$$\begin{aligned} t &= \int_0^a \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + (-2x)^2} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{4x^2 + 1} dx = \int_0^a g'(2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} g(2x) \right]_0^a = \frac{1}{2} \{g(2a) - g(0)\} \\ &= \frac{1}{4} \log(2a + \sqrt{4a^2 + 1}) + \frac{1}{2} a \sqrt{4a^2 + 1} \end{aligned}$$