平成 28 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育・医学部　平成 28 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 大きさ 1 のベクトル $\vec{a}$ と，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{b}$ のなす角を θ とする．

(1) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小となるような実数 t の値を $|\vec{b}|$，θ を用いて表しなさい．

(2) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる．$|\vec{b}|$ および $\cos\theta$ の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を 0 でない実数とする．2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ がある．

(1) 2 つの放物線は異なる 2 点で交わることを示しなさい．

(2) 2 つの放物線の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$\beta-\alpha$ を a の式で表しなさい．

(3) 2 つの放物線で囲まれた部分の面積 S を a の式で表しなさい．

(4) (3) で定めた面積 S の最小値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ A と B の 2 つの箱がある．箱 A には，赤玉が 1 個，青玉が 4 個，黄玉が 5 個入っている．箱 B には，当りくじが 3 本，はずれくじが 7 本入っている．

箱 A から玉を 1 つ取り出し，それが赤玉のときは箱 B からくじを 5 本，青玉のときは 3 本，黄玉のときは 2 本引くとする．

(1) 青玉を取り出し，当たりくじを少なくとも 1 本引く確率を求めなさい．

(2) 当たりくじを少なくとも 1 本引く確率を求めなさい．

(3) 当たりくじをちょうど 1 本引く確率を求めなさい．

4 2つの曲線 $y = x + 2\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ と $y = x - 2\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ をつないでできる曲線を C とする．

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい．

(2) k を実数とする．曲線 C と直線 $y = k$ が異なる2点で交わるための k の値の範囲を求めなさい．

(3) 曲線 C で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めなさい．

5 初項3の数列 $\{a_n\}$ がある．$b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は初項6，公比3の等比数列である．

(1) $c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とするとき，$c_{n+1} - c_n$ を求めなさい．

(2) a_n を n の式で表しなさい．

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とするとき，S_n を n の式で表しなさい．

6 0 でない実数 r が $|r| < 1$ のとき，以下の問いに答えなさい．ただし，自然数 n に対して $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$，$\lim_{n\to\infty} n(n-1)r^n = 0$ である．

(1) $R_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$ と $S_n = \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}$ を求めなさい．

(2) $T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2}$ を求めなさい．

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k$ を求めなさい．

7 自然数 n に対して関数 $y = 2nx - x^2$ のグラフと x 軸で囲まれた領域 (境界線を含む)R_n を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 R_n に含まれる格子点 (x 座標と y 座標がともに整数である点) の数 S_n を求めなさい．

(2) 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2n,\ 0)$，および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域 (境界を含む) に含まれる格子点の数 T_n を求めなさい．

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{S_n}$ を求めなさい．

8 中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}|3\vec{a}+t\vec{b}|^2&=9|\vec{a}|^2+6t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\&=|\vec{b}|^2t^2+6t|\vec{b}|\cos\theta+9\\&=|\vec{b}|^2\left(t+\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}\right)^2-9\cos^2\theta+9\end{aligned}$$

$|3\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき，$|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は最小となる．

よって，$\boldsymbol{t=-\dfrac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}}$ のとき，$|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は最小となる．

(2) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ が $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $2\sqrt{2}$ をとるから，(1) の結果より

$$-\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}=-\frac{1}{2},\quad -9\cos^2\theta+9=(2\sqrt{2})^2$$

ゆえに　$|\vec{b}|=6\cos\theta>0$，$9\cos^2\theta=1$　よって　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{3}}$**，**$\boldsymbol{|\vec{b}|=2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ の共有点の x 座標は

$$x^2=-x^2+2ax+\frac{1}{2a^2}\quad ゆえに\quad 2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}=0\quad\cdots(*)$$

方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=(-a)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2a^2}\right)=a^2+\frac{1}{a^2}>0$$

よって，2 つの放物線は，異なる 2 点で交わる．

(2) 方程式 $(*)$ の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{4a^2}$　$\cdots(**)$

したがって　
$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=a^2-4\left(-\frac{1}{4a^2}\right)=a^2+\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

$\alpha<\beta$ より，$\beta-\alpha>0$ であるから　$\boldsymbol{\beta-\alpha=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}}$

(3) $(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}&=2\left(x^2-ax-\frac{1}{4a^2}\right)\\&=2\left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}\\&=2(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ は $y=x^2$ の上側にあるから

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left\{\left(-x^2+2ax+\frac{1}{2a^2}\right)-x^2\right\}dx\\&=-\int_\alpha^\beta\left(2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}\right)dx\\&=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-2\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\&=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(4) 相加平均・相乗平均の関係により

$$a^2+\frac{1}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2$$

上式において等号が成立するのは　$a^2=\dfrac{1}{a^2}$　すなわち　$a=\pm1$

したがって　　$S=\dfrac{1}{3}\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq\dfrac{1}{3}\cdot2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$a=\pm1$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 箱 A から青玉を取り出す確率は $\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

箱 B からくじ 3 本引くとき，少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$1-\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{17}{24}$$

よって，求める確率は $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{17}{24}=\boldsymbol{\dfrac{17}{60}}$

(2) (1) と同様に，箱 A から赤玉を取り出し，箱 B から少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{1}{10}\left(1-\frac{{}_7\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5}\right)=\frac{11}{120}$$

また，箱 A から黄玉を取り出し，箱 B から少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{5}{10}\left(1-\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{4}{15}$$

よって，求める確率は，これと (1) の結果により

$$\frac{11}{120}+\frac{17}{60}+\frac{4}{15}=\boldsymbol{\frac{77}{120}}$$

(3) 箱 A から赤玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{1}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{1}{24}$$

箱 A から青玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{4}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{21}{100}$$

箱 A から黄玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{5}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{30}$$

よって，求める確率は $\dfrac{1}{24}+\dfrac{21}{100}+\dfrac{7}{30}=\boldsymbol{\dfrac{97}{200}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2つの曲線を次のようにおく.

$$C_1 : y = x + 2\cos x \ \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$
$$C_2 : y = x - 2\cos x \ \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$

C_1 について　$y' = 1 - 2\sin x$，$y'' = -2\cos x \geqq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$

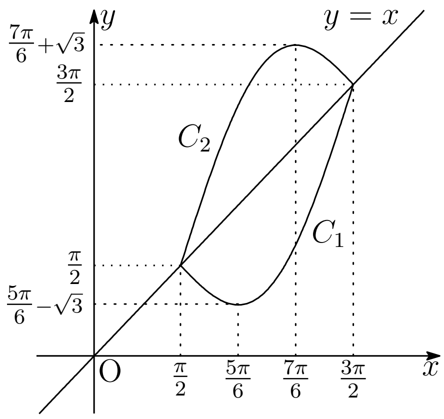
$x = \dfrac{5\pi}{6}$ で極小値 $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ をとる．下に凸.

また，C_2 について　$y' = 1 + 2\sin x$，$y'' = 2\cos x \leqq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{3\pi}{2}$

$x = \dfrac{7\pi}{6}$ で極大値 $\dfrac{7\pi}{6} + \sqrt{3}$ をとる．上に凸.

以上の結果から，グラフの概形は次のようになる.



(2) C の概形から，$y = k$ が異なる2点で交わるための k の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} < k < \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}}$$

(3) $\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}>0$ であるから，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\{(x-2\cos x)^2-(x+2\cos x)^2\}\,dx \\ &= 8\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(-x\cos x)\,dx \\ &= 8\pi\Big[-x\sin x-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{16\pi^2} \end{aligned}$$

補足 C_1 と C_2 で囲まれ部分の面積 S は　　$S=8$

C_1 と C_2 は点 $(\pi,\ \pi)$ に関して対称で，この図形の重心である．

したがって，x 軸から重心までの距離 h は　　$h=\pi$

よって，求める回転体の体積 V は，パップス・ギュルダンの定理[1] により

$$V=2\pi hS=2\pi{\cdot}\pi{\cdot}8=16\pi^2$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\{b_n\}$ は初項 6，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n=6{\cdot}3^{n-1}=2{\cdot}3^n$$

$b_n=a_{n+1}-3a_n$ に上の結果を代入すると

$$2{\cdot}3^n=a_{n+1}-3a_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}$$

$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ であるから　　$c_{n+1}-c_n=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) $c_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{3}{3}=1$，および (1) の結果から，$\{c_n\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列であるから

$$c_n=1+\frac{2}{3}(n-1)=\frac{1}{3}(2n+1)$$

$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より，$a_n=3^nc_n$ であるから

$$a_n=3^n{\cdot}\frac{1}{3}(2n+1)=\boldsymbol{(2n+1){\cdot}3^{n-1}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(3) $b_n = 6{\cdot}3^{n-1}$ および $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ より

$$\sum_{k=1}^{n} 6{\cdot}3^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - 3a_k)$$
$$3(3^n - 1) = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - 3\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \cdots (*)$$

このとき，条件および (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n,$$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} &= S_n + a_{n+1} - a_1 \\ &= S_n + (2n+3){\cdot}3^n - 3\end{aligned}$$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$3(3^n - 1) = \{S_n + (2n+3){\cdot}3^n - 3\} - 3S_n$$

これを S_n について解くと　　$\boldsymbol{S_n = n{\cdot}3^n}$

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) $(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}$ より，$|r| < 1$ のとき

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \boldsymbol{\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$$

次に，S_n について

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} \quad \cdots ①, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2} \quad \cdots ②$$

とおくと，① − ② $\times r$ より $(r \neq 1)$

$$\begin{aligned}S_n - rS_n &= \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} - r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2} \\ (1-r)S_n &= -nr^n + \sum_{k=1}^{n}\{kr^{k-1} - r(k-1)r^{k-2}\} \\ &= -nr^n + \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = -nr^n + \frac{1 - r^n}{1 - r}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S_n = -\frac{nr^n}{1 - r} + \frac{1 - r^n}{(1 - r)^2}}$

(2) T_n について

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)r^{k-2}\quad\cdots③,\quad T_n=\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(k-2)r^{k-3}\quad\cdots④$$

とおくと，③ − ④ × r より，② に注意して $(r\neq 1)$

$$\begin{aligned}T_n-rT_n&=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)r^{k-2}-r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(k-2)r^{k-3}\\(1-r)T_n&=-n(n-1)r^{n-1}+2\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-2}\\&=-n(n-1)r^{n-1}-2nr^{n-1}+2\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2}\\&=-n(n+1)r^{n-1}+2S_n\\&=-n(n+1)r^{n-1}-\frac{2nr^n}{1-r}+\frac{2(1-r^n)}{(1-r)^2}\end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{T_n=-\frac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r}-\frac{2nr^n}{(1-r)^2}+\frac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}}$$

(3) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$，$\lim_{n\to\infty}n(n-1)r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}n(n+1)r^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)r^n+2nr^n}{r}=0$$

上の諸式により

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{nr^n}{1-r}+\frac{1-r^n}{(1-r)^2}\right\}=\frac{1}{(1-r)^2}\\\lim_{n\to\infty}T_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r}-\frac{2nr^n}{(1-r)^2}+\frac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}\right\}=\frac{2}{(1-r)^3}\end{aligned}$$

よって $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}k^2r^k&=r^2\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)r^{k-2}+r\sum_{k=0}^{\infty}kr^{k-1}\\&=r^2\times\frac{2}{(1-r)^3}+r\times\frac{1}{(1-r)^2}=\boldsymbol{\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}}\end{aligned}$$

別解 $f(r)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k=\frac{1}{1-r}$ とおくと $(0<|r|<1)$

$$f'(r)=\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}=\frac{1}{(1-r)^2},\quad f''(r)=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2}=\frac{2}{(1-r)^3}$$

したがって

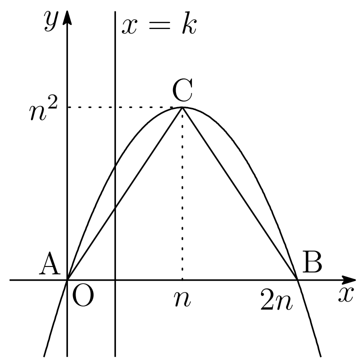
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\{k(k-1)+k\}r^k\\ &= r^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2}+r\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}\\ &= r^2f''(r)+rf'(r)=\frac{2r^2}{(1-r)^3}+\frac{r}{(1-r)^2}=\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ (1) 関数 $y=2nx-x^2=-(x-n)^2+n^2$ のグラフの頂点を C とすると　　C$(n,\ n^2)$

R_n に含まれる直線 $x=k$ (k は整数) 上の格子点の個数は，

$$-(k-n)^2+n^2+1$$

グラフは直線 $x=n$ に関して対称であるから



$$\begin{aligned}S_n &= 2\sum_{k=0}^{n-1}\{-(k-n)^2+n^2+1\}+n^2+1\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}(-k^2+n^2+1)+n^2+1\\ &= 2\left\{-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n(n^2+1)\right\}+n^2+1\\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}n^3+\frac{5}{3}n+1}\end{aligned}$$

(2) 直線 AC の傾きは n であるから，(1) と同様に直線 $x=k$ (k は整数) 上の格子点の個数は，$nk+1$ であるから

$$
\begin{aligned}
T_n &= 2\sum_{k=0}^{n-1}(nk+1)+n^2+1 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\{n(k-1)+1\}+n^2+1 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}(nk-n+1)+n^2+1 \\
&= 2\left\{n\times\frac{1}{2}n(n+1)+(-n+1)n\right\}+n^2+1 \\
&= \boldsymbol{n^3+2n+1}
\end{aligned}
$$

(3) (1)，(2) の結果から

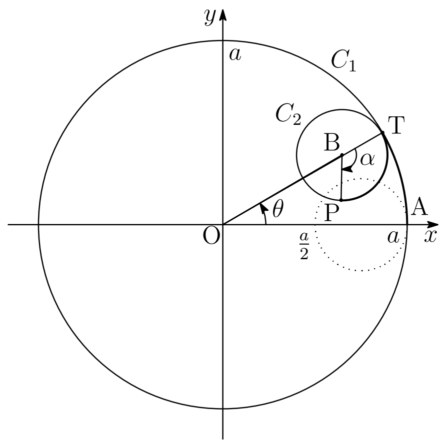
$$
\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n+1}{\frac{4}{3}n^3+\frac{5}{3}n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{3}+\frac{5}{3n^2}+\frac{1}{n^3}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}
$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) C_1 と C_2 の接点を T，$\alpha=\angle\mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$
a\theta=\frac{a}{4}\times\alpha \quad ゆえに \quad \alpha=4\theta
$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \frac{a}{4}(\cos(\theta-\alpha),\sin(\theta-\alpha)) \\
&= \frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta)) \\
&= \boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta,-\sin 3\theta)}
\end{aligned}
$$



(2) $\mathrm{OB} = \mathrm{OT} - \mathrm{BT} = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)\\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4}a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

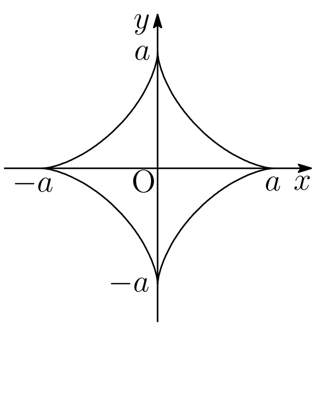
したがって $$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)\\ &= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 4\theta) = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta\end{aligned}$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\,d\theta\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = \Big[-3a\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{6a}\end{aligned}$$

解説 (2) の結果は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$



となり，その軌跡はアストロイドである．
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと

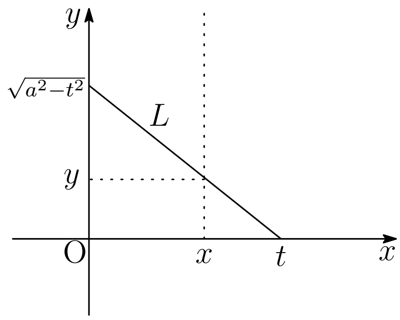
$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) &= a\left(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\right)\\ &= 3a\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)\\ &= \frac{3}{2}a\sin 2\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)\end{aligned}$$

ゆえに $$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \frac{3}{2}a|\sin 2\theta|$$

アストロイド (astroid) の x 軸および y 軸に関する対称性により

$$
\begin{aligned}
s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} a \sin 2\theta\, d\theta = 3a\Big[-\cos 2\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a
\end{aligned}
$$

補足 長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．
右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について



$$
y = -\frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t}x + \sqrt{a^2 - t^2} \quad \cdots (*)
$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$
\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2 - t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{a^2 x - t^3}{t^2\sqrt{a^2 - t^2}}
$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$
これを $(*)$ に代入すると

$$
y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
y^2 &= x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \\
&= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2 \\
&= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3
\end{aligned}
$$

よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．