平成27年度　大分大学2次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成27年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (100分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数I・II・A・B (100分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 数I・II・A・B (80分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (80分)

$\boxed{1}$ a を実数とする．円 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ と直線 $y=ax+1$ が異なる2点A，Bで交わっている．

(1) a の値の範囲を求めなさい．

(2) 弦ABの長さが最大になるときの a の値を求めなさい．

(3) 弦ABの長さが2になるときの a の値を求めなさい．

$\boxed{2}$ $\triangle$ABCにおいて，辺ABを2 : 1に内分する点をP，辺ACを1 : 2に内分する点をQとし，辺BC上に点Rがあるとする．

(1) 線分PQの中点をMとし，点A，M，Rが一直線上にあるとき，BR : RCを求めなさい．

(2) $\triangle$ABCの重心Gと $\triangle$PRQの重心Hが一致するとき，BR : RCを求めなさい．

(3) 直線AR，BQ，CPが一点で交わるとき，BR : RCを求めなさい．

$\boxed{3}$ k を実数とする．関数 $y=|x(x-1)|$ のグラフと直線 $y=kx$ が異なる3点を共有している．これらで囲まれた2つの部分の面積の和を S とする．

(1) k の値の範囲を求めなさい．

(2) S を k の式で表しなさい．

(3) S が最小になるときの k の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $C: 4x^2+9y^2=36\ (x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ が第 1 象限にある．点 P における曲線 C の接線を ℓ とする．

(1) y_1 の値を求めなさい．

(2) 接線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を求めなさい．

(4) 曲線 C，接線 ℓ，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=n^4+6n^3+11n^2+6n$$

で表されるとする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n=4n(n+1)(n+2)$ であることを示しなさい．

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}\ (n=1,2,3,\cdots)$ によって定まる数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を n の式で表しなさい．

$\boxed{\textbf{6}}$ 方程式 $y^2 = x^6(1 - x^2)$ が表す図形で囲まれた面積を求めなさい．

$\boxed{\textbf{7}}$ 方程式 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ の解で，実部と虚部がともに正のものを x_1，実部が負で虚部が正のものを x_2，実部と虚部がともに負のものを x_3，実部が正で虚部が負のものを x_4 とする．

(1) この方程式を解きなさい．

(2) ${x_1}^k$ $(k = 1, 2, \cdots, 6)$ を計算しなさい．

(3) 与方程式の解 x_i と自然数 n に対して，${x_i}^{4n} + {x_i}^{2n} + 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を求めなさい．

$\boxed{\textbf{8}}$ 正の実数 p_i，q_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ を満たすとき，次の問いに答えなさい．

(1) 不等式 $\log x \leqq x - 1$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) 不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$ が成り立つことを証明しなさい．

(3) $\displaystyle F = \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ の最小値を求めなさい．

(4) 正の実数 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，$\displaystyle G = \sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i$ の最小値を求めなさい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ より　　$(x-2)^2+(y-4)^2=5$　$\cdots(*)$

円 $(*)$ の中心 $(2,\ 4)$ から直線 $ax-y+1=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|\,a{\cdot}2-4+1\,|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}\quad\cdots①$$

また，円 $(*)$ の半径 r は　　$r=\sqrt{5}$

円と直線が異なる 2 点で交わるとき，$d<r$ であるから

$$\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{5}\quad 整理すると\quad a^2+12a-4>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a<-6-2\sqrt{10},\ -6+2\sqrt{10}<a}$

(2) 直線 $y=ax+1$ が円の中心 $(2,\ 4)$ を通るときであるから

$$4=a{\cdot}2+1\quad これを解いて\quad \boldsymbol{a=\frac{3}{2}}$$

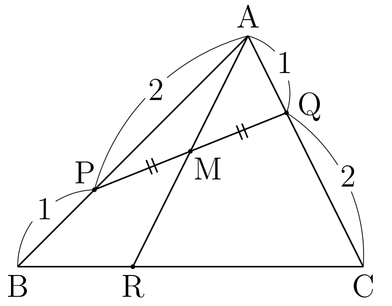
(3) $d^2+\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2=r^2$ であるから

$$d^2+1^2=(\sqrt{5})^2\qquad ゆえに\qquad d=2$$

これを ① に代入すると

$$\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}=2\qquad よって\qquad \boldsymbol{a=\frac{5}{12}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) M は線分 PQ の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

条件から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 A，M，R が一直線上にあるから，実数 k を用いて

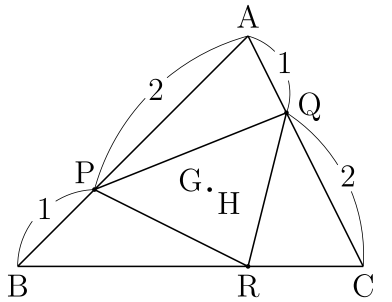
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{6}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

R は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = 2$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　よって　$\mathbf{BR : RC = 1 : 2}$

(2) G は △ABC の重心であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

H は △PQR の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}\right)$$

これに $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}\right) = \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから

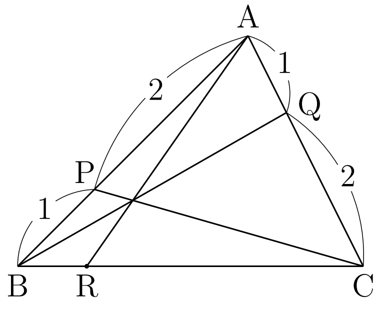
$$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　よって　$\mathbf{BR : RC = 2 : 1}$

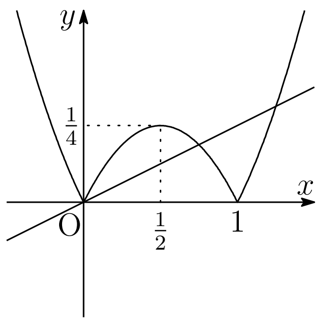
(3) チェバの定理により　　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = 1$

したがって　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{2}{1}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}} = \dfrac{1}{4}$

よって　　$\mathbf{BR : RC = 1 : 4}$



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $|x(x-1)| = \begin{cases} x^2 - x & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ -x^2 + x & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$



したがって

$$y = |x(x-1)| \quad \cdots (*)$$

のグラフは，右の図のようになる．

$y = -x^2 + x$ を微分すると　$y' = -2x + 1$

$y = -x^2 + x$ の $x = 0$ における接線の傾きは　　$y' = 1$

$(*)$ グラフと直線 $y = kx$ が異なる 3 つの共有点をもつ k の値の範囲は

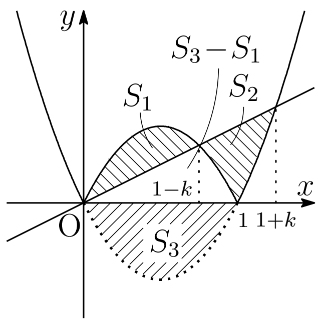
$$\boldsymbol{0 < k < 1}$$

(2) $(*)$ のグラフと直線 $y = kx$ の共有点の x 座標は

$x \leqq 0,\ 1 \leqq x$ のとき　　$x(x-1) = kx$　これを解いて　$x = 1 + k$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　　$-x(x-1) = kx$　これを解いて　$x = 1 - k$

右の図について，求める面積 S は



$$S = S_1 + S_2, \quad S_1 = \frac{1}{6}(1-k)^3, \quad S_3 = \frac{1}{6},$$

$$S_3 + (S_3 - S_1) + S_2 = \frac{1}{6}(1+k)^3 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \frac{1}{6}(1+k)^3 + 2S_1 - 2S_3 \\ &= \frac{1}{6}(1+k)^3 + 2 \times \frac{1}{6}(1-k)^3 - 2 \times \frac{1}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(-k^3 + 9k^2 - 3k + 1)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{dS}{dk} = -\dfrac{1}{2}(k^2 - 6k + 1)$　$\dfrac{dS}{dk} = 0$ とすると　$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$

ここで　　$0 < 3 - 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$

したがって，$0 \leqq k \leqq 1$ における S の増減表は，次のようになる．

k	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dk}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k = 3 - 2\sqrt{2}}$

4 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ は $C : 4x^2+9y^2=36$ 上の点であるから

$$4\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+{y_1}^2=36 \quad \text{ゆえに} \quad {y_1}^2=1$$

P は第 1 象限にあるから，$y_1>0$ に注意して　$\boldsymbol{y_1=1}$

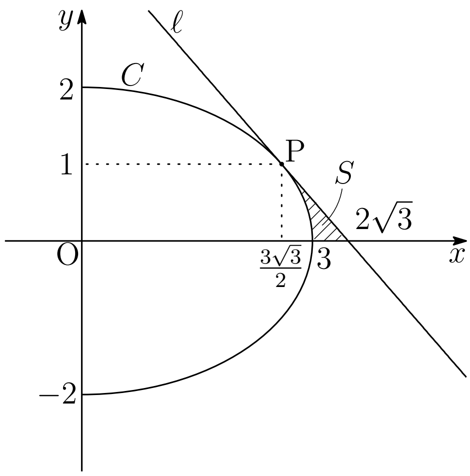
(2) (1) の結果から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$ における C の接線 ℓ は

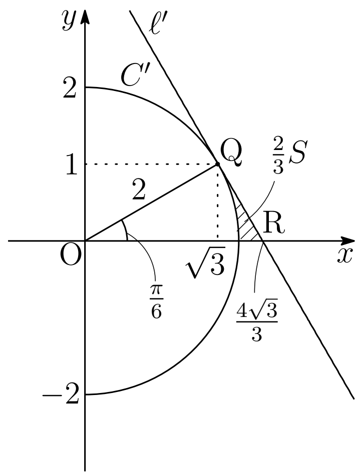
$$4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}x+9\cdot 1y=36 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{2\sqrt{3}x+3y=12}$$

(3) (2) で求めた ℓ の方程式に $y=0$ を代入すると

$$2\sqrt{3}x=12 \qquad \text{よって，求める } x \text{ 座標は} \qquad \boldsymbol{x=2\sqrt{3}}$$

(4) 曲線 C および接線 ℓ を y 軸をもとに x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ だけ縮小したものを，それぞれ C'，ℓ' とすると，C'，ℓ'，x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2}{3}S$ である．





したがって，右上の図から

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S&=\triangle\mathrm{OQR}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 1-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $S_n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ より　$S_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$

$n = 1$ のとき　$a_1 = S_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)\{(n+3) - (n-1)\} \\ &= 4n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つ．

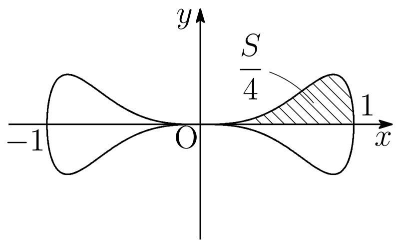
よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n = 4n(n+1)(n+2)$

(2) (1) の結果から　$b_k = \dfrac{1}{a_k} = \dfrac{1}{4k(k+1)(k+2)}$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+3)}{16(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 曲線 $y^2 = x^6(1-x^2)$ は，x 軸および y 軸に関して対称である．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において

$$y = x^3\sqrt{1-x^2}$$



よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{4} &= \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \{-x(1-x^2)+x\}\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \{-x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\}\,dx \\ &= \left[\,\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^1 = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

よって　　$S = \mathbf{\dfrac{8}{15}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 方程式 $x^6 = 1 \cdots ①$ の解は

$$x = \cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

方程式 ① から

$$(x^2-1)(x^4+x^2+1) = 0$$

方程式 $x^4+x^2+1=0$ の解は $x \neq \pm 1$ であるから，この方程式の解は

$$x = \cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi \quad (j = 1, 2, 4, 5) \qquad \cdots (*)$$

条件から

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ x_2 &= \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ x_3 &= \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ x_4 &= \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$x_1{}^k = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k = \cos\frac{k}{3}\pi + i\sin\frac{k}{3}\pi$$

よって $\quad x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$x_1{}^2 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x_1{}^3 = \cos\pi + i\sin\pi = \boldsymbol{-1}$$

$$x_1{}^4 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x_1{}^5 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x_1{}^6 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = \boldsymbol{1}$$

(3) $(*)$ から，方程式 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ の解について，$x^6 = 1$ に注意して

$$x^{4n} = (x^6)^n x^{-2n} = \left(\cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi\right)^{-2n} = \cos\frac{2nj}{3}\pi - i\sin\frac{2nj}{3}\pi$$

$$x^{2n} = \left(\cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi\right)^{2n} = \cos\frac{2nj}{3}\pi + i\sin\frac{2nj}{3}\pi$$

したがって $\quad x^{4n} + x^{2n} + 1 = 2\cos\frac{2nj}{3}\pi + 1$

このとき，$j = 1,\ 2,\ 4,\ 5$ であるから $(2 = 3 - 1,\ 4 = 3 + 1,\ 5 = 6 - 1)$

$$x^{4n} + x^{2n} + 1 = 2\cos\frac{2n}{3}\pi + 1$$

すなわち $\quad x_i{}^{4n} + x_i{}^{2n} + 1 = 2\cos\frac{2n}{3}\pi + 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

よって $\quad x_i{}^{4n} + x_i{}^{2n} + 1 = \begin{cases} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{(n \equiv 0 \pmod 3)\ のとき)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(n \not\equiv 0 \pmod 3)\ のとき)} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f(x)=x-1-\log x$ とおくと　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$f(x)\geqq 0$　すなわち　$x-1-\log x\geqq 0$

よって　　$\log x\leqq x-1$

(2) (ギブスの不等式 (Gibbs' inequality))

(1) の結果から

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\log\frac{q_i}{p_i}\leqq\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{q_i}{p_i}-1\right)=\sum_{i=1}^{n}(q_i-p_i)=0$$

よって　$$\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\geqq\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_i\quad\cdots①$$

また，① の等号が成立するのは，

$$\frac{q_i}{p_i}=1\quad\text{すなわち}\quad p_i=q_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

(3) $c=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_iq_i$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_i-\log c=\sum_{i=1}^{n}p_i\log\frac{q_i}{c}\leqq\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{q_i}{c}-1\right)=0$$

したがって　$$\log c\geqq\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_i\quad\cdots②$$

また，② の等号が成立するのは

$$\frac{q_i}{c}=1\quad\text{すなわち}\quad q_i=c=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

このとき，①，② から　$$\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\geqq\log\frac{1}{n}\geqq\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_i$$

よって，F は，$p_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\log\dfrac{1}{n}}$ をとる．

(4) $A=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$p_i=\dfrac{a_i}{A}$ とおくと，(3) の結果から

$$\begin{aligned}G&=\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i=\sum_{i=1}^{n}Ap_i\log Ap_i\\&=A\sum_{i=1}^{n}p_i(\log A+\log p_i)\\&=A\log A+A\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\\&\geqq A\log A+A\log\frac{1}{n}=A\log\frac{A}{n}\end{aligned}$$

よって
$$G\geqq A\log\frac{A}{n}\quad\cdots(*)$$

(3) の結果から，$(*)$ で等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき．

ここで，$g(x)=x\log x$ とおくと　$g'(x)=1+\log x$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

したがって

$$\begin{aligned}A\log\frac{A}{n}&=n\times\frac{A}{n}\log\frac{A}{n}\\&=n\times g\left(\frac{A}{n}\right)\geqq n\times g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{n}{e}\end{aligned}$$

よって
$$A\log\frac{A}{n}\geqq-\frac{n}{e}\quad\cdots(**)$$

$(**)$ で等号が成立するのは，$\dfrac{A}{n}=\dfrac{1}{e}$ のとき．

$(*)$，$(**)$ から
$$G\geqq A\log\frac{A}{n}\geqq-\frac{n}{e}$$

とくに，$G=-\dfrac{n}{e}$ となるのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$，$\dfrac{A}{n}=\dfrac{1}{e}$ より

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{e}$$

のときである．よって，求める G の最小値は　$\boldsymbol{-\dfrac{n}{e}}$

別解 (4) で用いた $g(x)$ により

$$G = \sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i = \sum_{i=1}^{n} g(a_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{n}{e}$$

よって $$G \geqq -\frac{n}{e}$$

上式において，等号が成立するのは

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{e}$$

のときである．よって，求める G の最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{n}{e}}$