平成 26 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成 26 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B・C (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $k>0$ とし，$f(x)=x(x+k)(x+2k)$ とおく．曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) 関数 $f(x)$ は異なる 2 つの極値をもつことを示しなさい．

(2) 曲線 C 上の極値をとる点を P，Q とする．線分 PQ の中点 R の座標を求めなさい．

(3) 点 R が曲線 C 上にあることを示し，点 R における曲線 C の接線の方程式を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 原点 O を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の球面 S 上に 3 点 A，B，C があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=5,\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$$

をみたしている．三角形 ABC の重心を G とし，直線 OG と球面 S の交点のうち G から遠い方を P とする．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表しなさい．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b を実数とし，$f(x)=(ax+b\cos x)\sin x$ とおく．関数 $f(x)$ が

$$f'(0)=2,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=4$$

をみたすとき，a，b の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 100から999までの自然数の集合を全体集合Uとし，そのうち14で割ると3余るものの集合をA，9の倍数の集合をBとおく.

(1) A，Bの要素の個数を求めなさい.

(2) $A \cap B$の要素のうち，最小のものと最大のものを求めなさい.

(3) Uの要素が1つずつ書かれた玉の入った袋から玉を2個取り出す．このとき，2個の玉に書かれている数がいずれも14で割ると3余り，かつ9で割り切れない場合の確率を求めなさい.

$\boxed{\mathbf{5}}$ a，bを実数とし，$f(x) = 2^{2x-1} - a{\cdot}2^x + b$とおく.

(1) $a = 3$，$b = 4$のとき，方程式$f(x) = 0$の解を求めなさい.

(2) $a > 0$，$b = 0$のとき，方程式$f(x) = 0$の解を求めなさい.

(3) 方程式$f(x) = 0$が異なる2つの実数解をもつとき，点$(a,\ b)$の表す領域を図示しなさい.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 正三角形ABCがあり，点Xは正三角形ABCの頂点を移動する点である．サイコロを投げて5の目が出たとき点Xは時計回りに隣の頂点に移動し，6の目が出たとき点Xは反時計回りに隣の頂点に移動し，それ以外の目が出たとき点Xは移動しない．はじめに点Xは頂点Aにあるとし，サイコロをn回投げたとき点Xが頂点Aにある確率をP_nとする.

(1) P_1，P_2，P_3を求めなさい.

(2) P_{n+1}をP_nを用いて表しなさい.

(3) P_nを求めなさい.

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の各問いに答えなさい.

(1) n本中のk本の当たりが入ったクジをn人で順番に引く．引いたクジは元に戻さないとして，i番中にクジを引く人の当たる確率が$\dfrac{k}{n}$であることを示しなさい．ただし，$0 < k < n$とする.

(2) 関数$y_1 = \sin x$と$y_2 = 2\sin(a - x)$について，$y = y_1 + y_2$の最大値が$\sqrt{7}$になるとき，定数aの値を求めなさい.

(3) 放物線$y = ax^2$と直線$y = bx$で囲まれる部分の面積を2等分する直線$x = p$を求めなさい．ただし，$a,\ b > 0$とする.

$\boxed{\mathbf{8}}$ 数列の和について次の一連の問いに答えなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ を示しなさい．

(2) 多項式 $(k+1)^3 - k^3$ の展開を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示しなさい．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めなさい．結果は因数分解すること．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 次の一連の問いに答えなさい．

(1) 自然数 m に対して，$x > 0$ のとき $e^x > \dfrac{x^m}{m!}$ であることを示しなさい．

(2) 自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ を示しなさい．

(3) 自然数 n に対して $\displaystyle\Gamma_K(n) = \int_0^K x^{n-1}e^{-x}\,dx$ とするとき，$\displaystyle\lim_{K\to\infty} \Gamma_K(n)$ を求めなさい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x(x+k)(x+2k) = x^3 + 3kx^2 + 2k^2x$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 6kx + 2k^2$$

2 次方程式 $f'(x) = 0 \cdots (*)$ の判別式を D とすると，$k > 0$ より

$$D/4 = (3k)^2 - 3\cdot 2k^2 = 3k^2 > 0$$

$(*)$ の異なる 2 つの実数解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，$f(x)$ は異なる 2 つの極値をもつ．

(2) $(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2k, \quad \alpha\beta = \frac{2}{3}k^2$$

したがって，$f(x)$ を $f'(x)$ で割った商 $\frac{1}{3}x + \frac{k}{3}$，余り $-\frac{2}{3}k^2x - \frac{2}{3}k^3$ により

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{k}{3}\right)f'(x) - \frac{2}{3}k^2x - \frac{2}{3}k^3$$

上式および解と係数の関係により

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= -\frac{2}{3}k^2(\alpha + \beta) - \frac{4}{3}k^3 \\ &= -\frac{2}{3}k^2(-2k) - \frac{4}{3}k^3 = 0 \end{aligned}$$

2 点 P，Q の中点 R の座標は

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2},\ \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(-k,\ 0)}$$

(3) $f(-k) = 0$ であるから，R は C 上の点である．

$$f'(-k) = 3(-k)^2 + 6k(-k) + 2k^2 = -k^2$$

したがって，C 上の点 $\mathrm{R}(-k,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y - 0 = -k^2(x + k) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -k^2x - k^3}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) ABC は原点 O を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円周上にあるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ であるから

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| &= \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}| \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{8+8+8+2\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6} \\
&= \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{6} = \boldsymbol{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

(2) P は直線 OG と球面 S の交点のうち G から遠い方であるから，実数 $k < 0$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG}} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = -k|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$$

と表される．これに $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| = \sqrt{6}$ を代入すると

$$2\sqrt{2} = -k\cdot\sqrt{6} \quad \text{これを解いて} \quad k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{\mathrm{OG}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\
&= \boldsymbol{-\frac{2\sqrt{3}}{9}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果により

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= -\frac{2\sqrt{3}}{9}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{9}(8+4+6) = -4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角は　　$\mathbf{150^\circ}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x) = (ax + b\cos x)\sin x = ax\sin x + \dfrac{b}{2}\sin 2x$ を微分すると

$$f'(x) = a\sin x + ax\cos x + b\cos 2x$$

$f'(0) = 2$ より　　　　$\boldsymbol{b = 2}$

このとき，$f(x) = ax\sin x + \sin 2x$ となるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax\sin x + \sin 2x)\,dx \\ &= \left[-ax\cos x + a\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a + 1\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 4$ であるから

$$a + 1 = 4 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 3}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)
$$A = \{a \mid a = 14m + 3\,(m \text{ は整数}),\ 100 \leqq a \leqq 999\}$$
$$B = \{b \mid b = 9n\,(n \text{ は整数}),\ 100 \leqq b \leqq 999\}$$

ゆえに　$100 \leqq 14m + 3 \leqq 999, \quad 100 \leqq 9n \leqq 999$

m，n が整数であることに注意してこれらを解くと

$$7 \leqq m \leqq 71, \quad 12 \leqq n \leqq 111$$

A の要素の個数 $n(A)$ および B の要素の個数 $n(B)$ は

$$n(A) = 71 - 7 + 1 = \mathbf{65},$$
$$n(B) = 111 - 12 + 1 = \mathbf{100}$$

(2) $c \in A \cap B$ とすると，(1) の結果から

$$c = 14m + 3 = 9n \quad \text{ゆえに} \quad c - 45 = 14(m-3) = 9(n-5)$$

$m - 3$ は 9 を因数にもつので，$m - 3 = 9k$ とおくと (k は整数)

$$c - 45 = 14{\cdot}9k \quad \text{すなわち} \quad c = 126k + 45$$

ゆえに　$A \cap B = \{c \mid c = 126k + 45\,(c \text{ は整数}),\ 100 \leqq c \leqq 999\}$

したがって　$100 \leqq 126k + 45 \leqq 999$

k が整数であることに注意してこれを解くと　$1 \leqq k \leqq 7$

よって，$A \cap B$ の要素のうち　最小のものは　$126{\cdot}1 + 45 = \mathbf{171}$
最大のものは　$126{\cdot}7 + 45 = \mathbf{927}$

補足 $c = 14m + 3 = 9n$ より，$14m + 3 \equiv 0 \pmod 9$ であるから

$$5m + 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv 3 \pmod 9$$

$m = 9k + 3$ とおくと (k は整数)

$$c = 14(9k+3) + 3 = 126k + 45$$

(3) U の要素のうち，14 で割ると 3 余り，かつ 9 で割り切れない要素の個数は

$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 65 - 7 = 58$$

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_{58}\mathrm{C}_2}{{}_{900}\mathrm{C}_2} = \dfrac{58{\cdot}57}{2{\cdot}1} \times \dfrac{2{\cdot}1}{900{\cdot}899} = \mathbf{\dfrac{19}{4650}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) このとき，$f(x)=0$ は

$$\frac{1}{2}(2^x)^2-3\cdot 2^x+4=0 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x-2)(2^x-4)=0$$

したがって　$2^x=2,\ 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

(2) このとき，$f(x)=0$ は

$$\frac{1}{2}(2^x)^2-a\cdot 2^x=0 \quad \text{ゆえに} \quad 2^x(2^x-2a)=0$$

$2^x>0$ であるから，$a>0$ に注意して

$$2^x=2a \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=1+\log_2 a}$$

(3) $t=2^x$ とおくと，$t>0$ で，方程式 $f(x)=0$ は

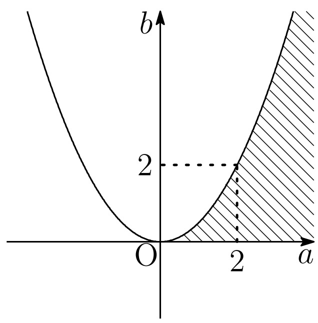
$$\frac{1}{2}t^2-at+b=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2-2at+2b=0$$

この方程式の異なる 2 つの正の実数解を α，β とすると，係数について

$$\alpha+\beta=2a>0, \quad \alpha\beta=2b>0, \quad D/4=(-a)^2-2b>0$$

したがって　$a>0$，$b>0$，$b<\dfrac{1}{2}a^2$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分である．
ただし，境界線を含まない．



別解 $t=2^x$ とおくと，$t>0$ で，方程式 $f(x)=0$ は

$$\frac{1}{2}t^2-at+b=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2-2at+2b=0$$

この 2 次方程式が異なる 2 つの正の実数解をもつとき，2 次関数

$$y=t^2-2at+2b=(t-a)^2-a^2+2b$$

の頂点および y 軸との交点の y 座標から

$$a>0, \quad -a^2+2b<0, \quad 2b>0$$

したがって　　$a>0$，$b>0$，$b<\dfrac{1}{2}a^2$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) サイコロを n 回投げたとき点 X が，頂点 A，B，C にある確率を，それぞれ P_n，Q_n，R_n とすると

$$P_1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}},\ Q_1 = \frac{1}{6},\ R_1 = \frac{1}{6},$$

$$P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n \qquad \cdots ①$$

$$Q_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{2}{3}Q_n + \frac{1}{6}R_n \qquad \cdots ②$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{2}{3}R_n \qquad \cdots ③$$

したがって

$$P_2 = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{6}Q_1 + \frac{1}{6}R_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$Q_2 = \frac{1}{6}P_1 + \frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{6}R_1 = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$R_2 = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{6}Q_1 + \frac{2}{3}R_1 = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$P_3 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{6}Q_2 + \frac{1}{6}R_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

(2) ①，②，③ の辺々を加えると，(1) の第 1 式から

$$P_{n+1} + Q_{n+1} + R_{n+1} = P_n + Q_n + R_n = 1 \quad \cdots ④$$

②，③ の辺々を加えると

$$Q_{n+1} + R_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{5}{6}(Q_n + R_n)$$

④ より，$Q_{n+1} + R_{n+1} = 1 - P_{n+1}$，$Q_n + R_n = 1 - P_n$ を上式に代入すると

$$1 - P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{5}{6}(1 - P_n) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{6}}$$

(3) (2) の結果から $\quad P_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\left(P_n - \dfrac{1}{3}\right)$

したがって $\qquad P_n - \dfrac{1}{3} = \left(P_1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

これに $P_1 = \dfrac{2}{3}$ を代入すると $\qquad \boldsymbol{P_n = \dfrac{1}{3}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) k 本の当たりを当たりの $j(1 \leqq j \leqq k)$ 番と区別し，i 番目にクジを引く人が当たりの j 番を引く確率を P_j とすると

$$P_j = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-(i-1)}{n-(i-2)} \times \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{1}{n}$$

P_1，P_2，$\cdots, P_k$ は互いに排反であるから，求める確率を P とすると

$$P = \sum_{j=1}^{k} P_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

別解 $i-1$ 番目まで n 本のうち当たりくじの 1 本を除く $n-1$ 本を引き，i 番目に k 本の当たりくじの 1 本を引く確率であるから

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{P}_{i-1} \cdot {}_k\mathrm{P}_1}{{}_n\mathrm{P}_i} = \frac{(n-1)!}{(n-i)!} \times k \times \frac{(n-i)!}{n!} = \frac{k}{n}$$

(2) $y_2 = 2\sin(a-x) = 2\sin a\cos x - 2\cos a\sin x$ であるから

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= \sin x + (2\sin a\cos x - 2\cos a\sin x) \\ &= (1-2\cos a)\sin x + 2\sin a\cos x \end{aligned}$$

この関数の最大値が $\sqrt{7}$ であるから

$$(1-2\cos a)^2 + (2\sin a)^2 = 7 \quad \text{ゆえに} \quad \cos a = -\frac{1}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{a = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2n\pi}$ **($\boldsymbol{n}$ は整数)**

(3) 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=bx$ の共有点の x 座標は $(a,\ b>0)$

$$ax^2=bx \quad これを解いて \quad x=0,\ \frac{b}{a}$$

これらの放物線と直線で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^{\frac{b}{a}}(bx-ax^2)\,dx=\left[\frac{bx^2}{2}-\frac{ax^3}{3}\right]_0^{\frac{b}{a}}=\frac{b^3}{6a^2}$$

したがって　$\displaystyle\int_0^p(bx-ax^2)\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{b^3}{6a^2} \quad \left(0<p<\frac{b}{a}\right)$

これを満たす p を求めればよいから

$$\frac{b}{2}p^2-\frac{a}{3}p^3=\frac{b^3}{12a^2} \quad ゆえに \quad 4\left(\frac{ap}{b}\right)^3-6\left(\frac{ap}{b}\right)^2+1=0$$

ここで，$t=\dfrac{ap}{b}\ (0<t<1)$ とおくと　$4t^3-6t^2+1=0$

ゆえに　$(2t-1)(2t^2-2t-1)=0$　これを解いて　$t=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$0<t<1$ であるから　$\dfrac{ap}{b}=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$p=\dfrac{b}{2a}$　よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{b}{2a}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $k(k+1)-(k-1)k=2k$ であるから

$$2\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-(k-1)k\} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n}=(n+1)^3-1^3$$

これに (1) の結果および $\sum_{k=1}^{n}=n$ を代入すると

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\times\frac{1}{2}n(n+1)+n=n^3+3n^2+3n$$

よって $$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

補足 証明法に制約がなければ，次式を利用するとよい．

$$k(k+1)(2k+1)-k(k-1)(2k-1)=6k^2$$

(3) $k^2(k+1)^2-k^2(k-1)^2=4k^3$ であるから

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3=\sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2-k^2(k-1)^2\} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

補足 S_n は分かっているので，$S_k-S_{k-1}=a_k$ を利用する．

(4)
$$\begin{aligned}
f_1(k) &= k &&= && && && k\\
f_2(k) &= k(k+1) &&= && && k^2 && +k\\
f_3(k) &= k(k+1)(k+2) &&= && k^3 && +3k^2 && +2k\\
f_4(k) &= k(k+1)(k+2)(k+3) &&= k^4 && +6k^3 && +11k^2 && +6k
\end{aligned}$$

とおくと，$k^4 = f_4(k) - 6f_3(k) + 7f_2(k) - f_1(k)$ である．ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f_1(k) &= \frac{1}{2}n(n+1)\\
\sum_{k=1}^{n} f_2(k) &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\
\sum_{k=1}^{n} f_3(k) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\
\sum_{k=1}^{n} f_4(k) &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}\\
&= \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \sum_{k=1}^{n}\{f_4(k)-6f_3(k)+7f_2(k)-f_1(k)\}\\
&= \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\\
&\qquad -6\times\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\
&\qquad\qquad +7\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{2}n(n+1)\\
&= \frac{1}{30}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4)-45(n+2)(n+3)+70(n+2)-15\}\\
&= \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}
\end{aligned}$$

解説 $(k+1)^5 - k^5$ の展開式を利用するのが一般的であるが，別解を紹介した．

連続する自然数のべき乗和

定理 0

自然数 i に対して，$S_i(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^i$ とすると，$S_i(n)$ は，n の $i+1$ 次式である．

証明

i) $S_1(n)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ であるから，$i=1$ のとき，定理 0 が成り立つ．

ii) $1\leqq i\leqq p-1$ の自然数について，定理 0 が成り立つと仮定すると

$$(k+1)^{p+1}-k^{p+1}=1+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{i+1}{j}k^j+(p+1)k^p$$

ゆえに
$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^{p+1}-k^{p+1}\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{1+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p+1}{j}k^j+(p+1)k^p\right\}$$
$$(n+1)^{p+1}-1=n+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j(n)+(p+1)S_p(n)$$

したがって
$$S_p(n)=\frac{1}{p+1}\left\{(n+1)^{p+1}-\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j(n)-n-1\right\}$$

よって，$S_p(n)$ は，n の $p+1$ 次式である．

i)，ii) より，定理 0 は成り立つ．　証終

自然数 i について
$$S_i(1)=1,\quad S_i(k)-S_i(k-1)=k^i \tag{1}$$
であるから，(1) に $k=1,\ 0$ を代入すると

$$S_i(1)-S_i(0)=1^i,\quad S_i(0)-S_i(-1)=0^i\quad \text{ゆえに}\quad S_i(0)=S_i(-1)=0$$

因数定理により，$S_i(n)$ は $n(n+1)$ を因数にもつ．

実際，

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}n(n+1) \\
S_2(n) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
S_4(n) &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \\
S_5(n) &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\
S_6(n) &= \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) \\
S_7(n) &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) \\
S_8(n) &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3) \\
S_9(n) &= \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3) \\
S_{10}(n) &= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)
\end{aligned}
$$

また，$S_0(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^0 = n$ と定義する．

注意 最初に，$S_i(n)$ の i を 0 以上の整数としなかったのは，$i=0$ のとき (1) に $k=0$ を代入すると，0^0 が現れるからである．

一般に，$x^0x^1 = x^1$ より，$x \neq 0$ のとき，$x^0 = \dfrac{x}{x} = 1$.

しかし，$x = 0$ のとき，0^0 は不定形 $\dfrac{0}{0}$ となり，定義されない．

(1) を微分すると　　$S_i'(k) - S_i'(k-1) = ik^{i-1}$

上式の k について，1 から n まで辺々を加えると

$$S_i'(n) - S_i'(0) = iS_{i-1}(n) \quad \text{ゆえに} \quad S_i'(n) = iS_{i-1}(n) + S_i'(0)$$

$S_0(n) = n$ を微分すると $S_0'(n) = 1$．また，$S_i'(0)$ は定数であるから

$$S_0'(n) = B_0 = 1, \quad S_i'(0) = (-1)^i B_i$$

とおくと (定数 B_i は後述のベルヌーイ数)

$$S_i'(n) = iS_{i-1}(n) + (-1)^i B_i \tag{2}$$

ファウルハーバー (Faulhaber) の定理

i を 0 以上の整数とすると　$S_i(n) = \dfrac{1}{i+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i+1}{j}B_j n^{i+1-j}$　$\cdots(*)$

ただし，$\dbinom{i+1}{j}$ は 2 項係数 ${}_{i+1}\mathrm{C}_j$ とする．(B_i は後述のベルヌーイ数)

証明　i) $i=0$ のとき，$B_0=1$ であるから　$S_0(n)=B_0 n$

よって，$i=0$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $i=m$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m+1}{j}B_j n^{m+1-j}$$

が成り立つと仮定すると，(2) より

$$\begin{aligned}S'_{m+1}(n) &= (m+1)S_m(n) + (-1)^{m+1}B_{m+1}\\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m+1}{j}B_j n^{m+1-j} + (-1)^{m+1}B_{m+1}\end{aligned}$$

$S_{m+1}(n)$ の定数項が 0 になることに注意して，これを積分すると

$$\begin{aligned}S_{m+1}(n) &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{\binom{m+1}{j}}{m+2-j}B_j n^{m+2-j} + (-1)^{m+1}B_{m+1}n\\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{\binom{m+2}{j}}{m+2}B_j n^{m+2-j} + (-1)^{m+1}B_{m+1}n\\ &= \frac{1}{m+2}\sum_{j=0}^{m+1}(-1)^j\binom{m+2}{j}B_j n^{m+2-j}\end{aligned}$$

よって，$i=m+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

i)，ii) から，0 以上の整数 i に対して，$(*)$ が成り立つ．　証終

$(*)$ に $n=-1$ を代入すると

$$\begin{aligned} S_i(-1) &= \frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i+1}{j}B_j(-1)^{i+1-j} \\ &= \frac{(-1)^{i+1}}{i+1}\sum_{j=0}^{i}\binom{i+1}{j}B_j \end{aligned}$$

自然数 i に対して，$S_i(-1)=0$ であるから $\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\binom{i+1}{j}B_j=0$

具体的に示すと

$$\begin{aligned} &i=1\text{ のとき} && B_0+2B_1=0 \\ &i=2\text{ のとき} && B_0+3B_1+3B_2=0 \\ &i=3\text{ のとき} && B_0+4B_1+6B_2+4B_3=0 \\ &i=4\text{ のとき} && B_0+5B_1+10B_2+10B_3+5B_4=0 \\ &i=5\text{ のとき} && B_0+6B_1+15B_2+20B_3+15B_4+6B_5=0 \\ &i=6\text{ のとき} && B_0+7B_1+21B_2+35B_3+35B_4+21B_5+7B_6=0 \\ &i=7\text{ のとき} && B_0+8B_1+28B_2+56B_3+70B_4+56B_5+28B_6+8B_7=0 \\ & && \vdots \end{aligned}$$

$B_0=1$ および上の諸式から

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ B_7=0,\ \cdots$$

ここに得た $B_j\ (j=0,1,2,\ldots)$ をベルヌーイ数 (Bernoulli number) という．

上の結果および $(*)$ から，$S_i(n)$ の n^{i+1}(最高次) の係数が $\dfrac{1}{i+1}$，n^i の係数が $\dfrac{1}{2}$ であることがわかる．例えば，

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{5}{j}B_jn^{5-j} \\ &= \frac{1}{5}\left(B_0n^5-5B_1n^4+10B_2n^3-10B_3n^2+5B_4n\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n\right) \\ &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \end{aligned}$$

ベルヌーイ数

ベルヌーイ数 B_j は，次のマクローリン展開 (テイラー展開) の展開係数として[1]

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} x^j \qquad \cdots (**)$$

と定義される．例えば，B_0，B_1 は次のようになる (ロピタルの定理を使用)．

$$B_0 = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$$
$$B_1 = \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2(e^x - 1)e^x} = -\frac{1}{2}$$

B_j は前ページで示した漸化式を満たす．

証明 定義式から $\qquad e^x f(x) - f(x) = x$

ライプニッツの公式を利用して，上式を j 回微分すると

$$\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} e^x f^{(k)}(x) - f^{(j)}(x) = (x)^{(j)} \qquad \cdots (**)$$

$(**)$ の右辺は，$j = 1$ のとき 1，$j > 1$ のとき 0 であるから，$x = 0$ とすると

$$j = 1 \text{ のとき} \quad B_0 = 1 \qquad\qquad j > 1 \text{ のとき} \quad \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} B_k = 0$$

よって，B_j は前ページの漸化式と一致する． **証終**

また，$g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$，$h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ とおくと

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \{x^j + (-x)^j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} x^{2j}$$
$$h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{e^x - 1} - \frac{-x}{e^{-x} - 1}\right) = -\frac{x}{2},$$
$$h'(x) = -\frac{1}{2}, \quad h^{(j)}(x) = 0 \ (j > 1)$$

j が奇数のとき $g^{(j)}(0) = 0$ である．とくに，j が 3 以上の奇数のとき

$$B_j = f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0) + h^{(j)}(0) = 0 + 0 = 0$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf

前ページの $f(x)$ は B_n の (指数型) 母関数である[2]．

証明 等式 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}\right)(e^x-1)=x$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}\right)(e^x-1) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{B_j}{j!}\frac{1}{(n-j)!}\right)x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j\right)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

$n>1$ のとき，$\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j=0$ であるから

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j\right)\frac{x^n}{n!} = x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j\right)\frac{x^n}{n!}=x
$$

証終

B_n の一般項を示す準備として，以下を述べる．

http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf

の p17(3) において，m 個の要素を異なる n 個のグループに分ける (各グループには，少なくとも 1 個の要素がある) 総数 ${}_m\mathrm{Q}_n$ は

$$
{}_m\mathrm{Q}_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}k^m \tag{3}
$$

となることを示した．このとき，n 個のグループの区別をなくした総数を $\left\{ m \atop n \right\}$ とすると

$$
\left\{ m \atop n \right\} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}k^m \tag{4}
$$

となる．なお，$0<m<n$ のとき，(3) より，(4) の値は 0 になる．

[2]数列 $\{a_n\}$ の (指数型) 母関数は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^n}{n!}$ である．

$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$ が成り立つように，$\left\{ {n \atop k} \right\}$ についても，次の漸化式が成り立つ．

$$\left\{ {m \atop n} \right\} = \left\{ {m-1 \atop n-1} \right\} + n\left\{ {m-1 \atop n} \right\} \tag{5}$$

m 個の要素を n 個のグループに分割するには，次の 2 つの手順に分けるとよい．

i) $m-1$ 個の要素を $n-1$ 個のグループに分割し，m 番目の要素を n 番目のグループとして単独で追加する $\left\{ {m-1 \atop n-1} \right\}$ 通り．

ii) $m-1$ 個の要素を n 個のグループに分割し，m 番目の要素を n 個のグループのどれかに挿入する $n\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$ 通り．

i)，ii) より，漸化式 (5) が成り立つことが分かる．

さらに，初期値 $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$，$\left\{ {m \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop n} \right\} = 0\ (m,\ n \neq 0)$ で定義すると，漸化式 (5) から，3 つの数 $\left\{ {m \atop n} \right\}$，$\left\{ {m-1 \atop n-1} \right\}$，$\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$ のうち 2 つを決めれば残りが決まる．ただし，$\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$ の前に n がかかっているが，$n=0$ のときは，残りの 2 つから $\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$ を求めることはできないため，初期値で与えてある．漸化式 (5) からすべての整数 m，n に拡張して $\left\{ {m \atop n} \right\}$ の値が定まる．これを第 2 種スターリング数 (Stirling number of the second kind) という．

$m \geqq 1,\ n \geqq 0$ のとき，(4) は，

$$\left\{ {m \atop n} \right\} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m \tag{6}$$

としてもよい．ここで，$0^0 = 1$ で定義すると，(6) は $m,\ n \geqq 0$ で成り立つ．

注意 e^x の級数表示について

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{または} \quad e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

と表される．$x=0$ のときを考えると第 2 式のように表すべきであるが，$0! = 1$ のように，便宜的に $0^0 = 1$ と定義しておけば，第 1 式でもよい．しかし，第 1 式で書かれる場合が一般的であり，その際，$0^0 = 1$ と判断する必要がある．

(6) の m と n を入れ替えた

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} k^n \tag{7}$$

の m を 0 以上とすると，$\left\{ {n \atop m} \right\}$ を第 n 項とする (指数型) 母関数は

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} k^n \right\} \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \right) \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} e^{kx} \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-e^x)^k \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} (1 - e^x)^m = \frac{1}{m!} (e^x - 1)^m \qquad (8)
\end{aligned}$$

ここで，関数 $\lambda(t) = \log(1-t)$ の第 m 次導関数は　$\lambda^{(m)}(t) = -\dfrac{(m-1)!}{(1-t)^m}$
ゆえに，$\log(1-t)$ のマクローリン展開は

$$\log(1-t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m}$$

$t = 1 - e^x$ をこれに代入すると

$$x = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^x)^m}{m}$$

上式により，$(**)$ は (8) を利用して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} &= \frac{x}{e^x - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^x)^m}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(e^x - 1)^{m-1}}{n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(e^x - 1)^m}{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \left\{ {n \atop m} \right\} \right) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

したがって
$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \left\{ {n \atop m} \right\}$$

これに (7) を代入することにより，次式を得る．

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} k^n \tag{9}$$

注意

ベルヌーイ数は，連続する自然数のべき乗和を定式化する際の展開係数としてヤコブ・ベルヌーイ (1654–1705) が著書 Ars Conjectandi(推測術) で導入したものである．

和算家の関孝和 (?–1708) の没後，弟子の荒木村英 (1640–1718) 等が，関の遺稿を整理した『括要算法』にべき乗和の展開係数としてベルヌーイ数について述べられていた．そのため，ベルヌーイ数を関・ベルヌーイ数と書いている文献もある．

関，ベルヌーイは，独立した研究成果であったが，ともに

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = -\frac{1}{42},\ \cdots$$

という結果を残していることから

$$B_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} k^n \tag{10}$$

のタイプの定義をし，$(*)$ は

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i} \binom{i+1}{j} B_j n^{i+1-j}$$

となっている．

古い専門書においては，関・ベルヌーイのオリジナルの定義による (10) を採用したものが多かったが，近年では (9) を採用しているものが多いようである．(9) と (10) は，n が偶数のときは一致するが，n が奇数のときは符号が異なる．しかしながら，n が 3 以上の奇数のときは，B_n は 0 であるから，B_1 の符号をみて，(9) と (10) のどちらの定義に基づいているかに注意する必要がある．

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $t>0$ のとき，$e^t-1>0$ であるから，$x>0$ より

$$\int_0^x (e^t-1)\,dt>0 \quad ゆえに \quad e^x-1-x>0$$

上式から　$e^x>1+x$　ゆえに　$e^x>x$　$\cdots$①

「自然数 m に対して，$x>0$ のとき $e^x>\dfrac{x^m}{m!}$ である」を $(*)$ とする．

i) $m=1$ のとき，① より $(*)$ が成り立つ．

ii) $m=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，$t>0$ に対して

$$e^t-\frac{t^k}{k!}>0$$

$x>0$ より　$\displaystyle\int_0^x\left(e^t-\frac{t^k}{k!}\right)dt>0$　ゆえに　$e^x-1-\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}>0$

上式から　$e^x>1+\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$　ゆえに　$e^x>\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

よって，$m=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，$(*)$ が成り立つ．

補足 $x>0$ に対して，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^m}{m!}$ が成り立つ．

(2) (1) の結果から，$m=n+1$ とすると，$x>0$ のとき

$$e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad ゆえに \quad 0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

(3) $f(x)=x^{n-1}$ とおくと

$$f^{(j)}(x)=\frac{(n-1)!}{(n-j-1)!}x^{n-j-1} \quad (1 \leqq j \leqq n-2)$$
$$f^{(n-1)}(x)=(n-1)!$$

したがって，$1 \leqq j \leqq n-2$ のとき $f^{(j)}(0)=0$ であるから

$$\begin{aligned}\Gamma_K(n) &= \int_0^K x^{n-1}e^{-x}\,dx \\ &= \left[-e^{-x}\sum_{j=0}^{n-2} f^{(j)}(x)-(n-1)!e^{-x} \right]_0^K \\ &= e^{-K}\sum_{j=0}^{n-2} f^{(j)}(K)-(n-1)!e^{-K}+(n-1)! \\ &= \sum_{j=0}^{n-2}\frac{(n-1)!}{(n-j-1)!}\cdot\frac{K^{n-j-1}}{e^K}-\frac{(n-1)!}{e^K}+(n-1)!\end{aligned}$$

(2) の結果から，$\displaystyle\lim_{K\to\infty}\frac{K^{n-j-1}}{e^K}=0$．また，$\displaystyle\lim_{K\to\infty}\frac{(n-1)!}{e^K}=0$ であるから

$$\lim_{K\to\infty}\Gamma_K(n)=\boldsymbol{(n-1)!}$$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{kx}f(x)\,dx=\frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}+C$$

本題は，上式において $k=-1$ であるから，次の結果を利用する．

$$\int e^{-x}f(x)\,dx=-e^{-x}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}+C$$