平成 25 年度　大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成 25 年 2 月 25 日

- 工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B・C (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ n を 9 以上の自然数とする．袋の中に n 個の球が入っている．このうち 6 個は赤球で残りは白球である．この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき，3 個が赤球である確率を P_n とする．

(1) P_{10} を求めなさい．

(2) $\dfrac{p_{n+1}}{P_n}$ を求めなさい．

(3) P_n が最大となる n を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 連立不等式 $\begin{cases} y \geqq |2x-3| \\ y \leqq x \end{cases}$ の表す領域を D とする．

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) a を 2 でない正の定数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+y$ の最大値と最小値，およびそのときの点 $(x,\ y)$ を求めなさい．

(3) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2+y^2 の最小値とそのときの点 $(x,\ y)$ を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とする．点 A から直線 OB に垂線 AP を下ろし，点 B から直線 OA に垂線 BQ を下ろし，直線 AP と直線 BQ の交点を R とする．

(1) t の範囲を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を t と $\vec{b}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t と $\vec{a}$ で表しなさい．

(3) $t=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表し，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ を求めなさい．

$\boxed{4}$ $f(x)=\log 2x$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．曲線 C と x 軸との交点における曲線 C の接線 l の方程式を $y=g(x)$ とする．

(1) 直線 l の方程式を求めなさい．

(2) $h(x)=g(x)-f(x)$ $(x>0)$ とおくと，$h(x)\geqq 0$ $(x>0)$ であることを示しなさい．また，$h(x)=0$ となる x の値を求めなさい．

(3) 曲線 C と直線 l と直線 $x=\dfrac{1}{2}e$ で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

$\boxed{5}$ a を実数とする．直線 $y=3x-a$ を l とし，曲線 $y=2x^3-3x$ を C とする．

(1) $a=0$ のとき，直線 l と曲線 C の共有点の座標を求めなさい．

(2) 直線 l と曲線 C の共有点の個数が 3 個となるように a の範囲を求めなさい．

$\boxed{6}$ a，b，c，k を実数とし，$k>0$ とする．2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $f(0)=9$，$f(-1)=16$ をみたす．また，関数 $f(x)$ について，x に関する恒等式

$$f'(x)=6x-9k-4+\int_0^k f(t)\,dt$$

が成り立つ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

(1) $f(x)$ を求めなさい．

(2) k の値を求めなさい．

$\boxed{7}$ 次の問いに答えよ．

(1) 次の x と y に関する連立方程式を解け．ただし，a と b は実数の定数とする．

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+by=1 \end{cases}$$

(2) $\cos x \geqq 1-\dfrac{x^2}{2}$ $\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を証明せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ を求めよ．ただし，a と b は実数の定数とする．

8 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ の間に次の漸化式が成立する．

$$x_{n+1} = 2x_n,\ y_{n+1} = 3x_n + y_n,\ z_{n+1} = x_n - 2y_n + 3z_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 初項 $(x_1,\ y_1) = (2,\ 0)$ に対して，一般項 x_n と y_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が定数 c，d，r，s に対して，関係 $a_{n+1} = ra_n + cs^n + d$ で定義されるとき，$f_n = ps^n + q$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が次式を満たすように定数 p と q を求めよ．ただし，$r \neq s$，$r \neq 0, 1$，$s \neq 0, 1$ とする．

$$a_{n+1} + f_{n+1} = r(a_n + f_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) 初項 $(x_1,\ y_1,\ z_1) = (2,\ 0,\ 0)$ に対して，一般項 z_n を求めよ．

9 曲線 $y = x^2$ の上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がある．この動点の速度ベクトルの大きさが一定 C のとき，次の問いに答えよ．ただし，動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は時刻 t に対して x が増加するように動くとする．

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を x で表せ．

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ の加速度ベクトル $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を x で表せ．

(3) 半径 r の円，$x^2 + (y - r)^2 = r^2$ 上を速度ベクトルの大きさが一定 C で動く点 Q があるとき，この加速度ベクトルの大きさを求めよ．

(4) 動点 P と Q の原点 $(0,\ 0)$ での加速度ベクトルの大きさが等しくなるときの半径 r を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $P_{10} = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_6} = \dfrac{20 \times 4}{210} = \boldsymbol{\dfrac{8}{21}}$

(2) $P_n = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3 \times {}_{n-6}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_6}$，$P_{n+1} = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3 \times {}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}$ より

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \times {}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6} \times \frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_6\mathrm{C}_3 \times {}_{n-6}\mathrm{C}_3} \\ &= \frac{{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n-6}\mathrm{C}_3} \times \frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6} \\ &= \frac{n-5}{n-8} \times \frac{n-5}{n+1} = \boldsymbol{\frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)}}\end{aligned}$$

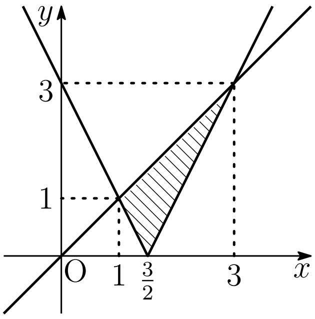
(3) (2) の結果から

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} - 1 = \frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)} - 1 = \frac{3(11-n)}{(n+1)(n-8)}$$

したがって　$P_9 < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > P_{14} > \cdots$

よって，P_n が最大となる n の値は　$\boldsymbol{n = 11,\ 12}$　■

2 (1) D の表す領域は図の斜線部分で，境界を含む．



(2) $f(x,\ y) = ax + y$ とおく．(1) の結果から，D における $f(x,\ y)$ の最大値と最小値は，次の 3 つの値

$$f(1,\ 1) = a+1, \quad f\left(\frac{3}{2},\ 0\right) = \frac{3}{2}a, \quad f(3,\ 3) = 3a+3$$

の中から選べばよいので (a は 2 でない正の定数)

$$f\left(\frac{3}{2},\ 0\right) - f(1,\ 1) = \frac{1}{2}(a-2)$$
$$f(3,\ 3) - f\left(\frac{3}{2}a,\ 0\right) = \frac{3}{2}a + 3 > 0$$
$$f(3,\ 3) - f(1,\ 1) = 2a + 2 > 0$$

よって　点 $\boldsymbol{(3,\ 3)}$ で最大値 $\boldsymbol{3a+3}$

$0 < a < 2$ のとき点 $\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ 0\right)}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{3}{2}a}$

$2 < a$ のとき点 $\boldsymbol{(1,\ 1)}$ で最小値 $\boldsymbol{a+1}$

(3) D において x^2+y^2 の最小値を与える点 $(x,\ y)$ は，2 点 $(1,\ 1)$，$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ を結ぶ線分上にあるから，この点を $(t, -2t+3)$ とおくと $\left(1 \leqq t \leqq \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= t^2 + (-2t+3)^2 \\ &= 5t^2 - 12t + 9 \\ &= 5\left(t - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \end{aligned}$$

よって　$t = \frac{6}{5}$　すなわち　点 $\boldsymbol{\left(\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right)}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{9}{5}}$ をとる．

■

3 (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

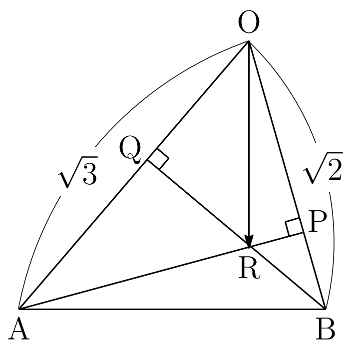
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{3}\sqrt{2}\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad t=\sqrt{6}\cos\theta$$

$-1<\cos\theta<1$ であるから　$\boldsymbol{-\sqrt{6}<t<\sqrt{6}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{b}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{b}$ であるから

$$(k\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$$
$$k|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$



ゆえに　$k=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{t}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{t}{2}\vec{b}}$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k'\vec{a}$ とおくと　$k'=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=\dfrac{t}{3}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{t}{3}\vec{a}}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{t}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{t}{3}\vec{a}$

(3) $t=1$ のとき，(2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$

R は直線 AP 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\vec{a}+\frac{s}{2}\vec{b} \quad \cdots ①$$

$\vec{a}=3\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，上式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=3(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

また，R は直線 QB 上の点でもあるから

$$3(1-s)+\frac{s}{2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{4}{5}$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\dfrac{1}{5}|\vec{a}+2\vec{b}|=\dfrac{1}{5}\sqrt{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{3+4\cdot1+4\cdot2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{5}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) x 軸との交点の x 座標は $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

$f(x) = \log 2x$ より　$f'(x) = \frac{1}{x}$，$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

直線 l の方程式は　$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$　すなわち　$\boldsymbol{y = 2x - 1}$

(2) (1) の結果から $g(x) = 2x - 1$ より

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

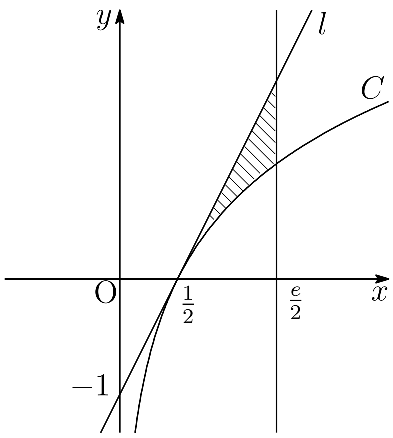
$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= (2x - 1) - \log 2x \end{aligned}$$

ゆえに　$h'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x}$

$h(x)$ の増減は，右の表のようになり，$h(x) \geqq 0$ $(x > 0)$ が成り立つ．

また，$h(x) = 0$ となる x の値は　$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$

(3) S は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} (2x - 1 - \log 2x)\,dx \\ &= \Big[x^2 - x\log 2x\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{e^2 - 2e - 1}{4}} \end{aligned}$$

5 (1) $a=0$ より，連立方程式 $\begin{cases} y=3x \\ y=2x^3-3x \end{cases}$ を解いて

$$\mathbf{(0,\ 0),\ (\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}),\ (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})}$$

(2) $l: y=3x-a$ と $C: y=2x^3-3x$ の共有点の個数は，方程式

$$-2x^3+6x=a$$

の実数解の個数に等しい．

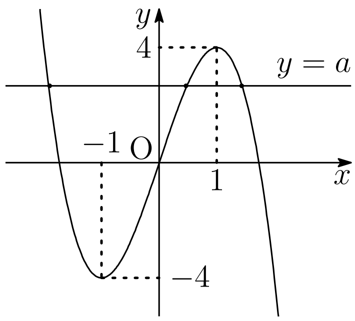
関数 $y=-2x^3+6x$ について

$$\begin{aligned} y' &= -6x^2+6 \\ &= -6(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 -4	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$

よって，$y=-2x^3+6x$ のグラフは，右の図のようなる．



求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-4 < a < 4}$$

■

6 (1) $f(0)=9$ より　$c=9$

$f'(x)=2ax+b$ より，恒等式の x の係数を比較して　$a=3$

したがって，$f(x)=3x^2+bx+9$．これに $x=-1$ を代入すると

$$f(-1)=3-b+9=16 \quad \text{ゆえに} \quad b=-4$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-4x+9}$

(2) (1) の結果から，$f'(x)=6x-4$．これと恒等式の定数項を比較して

$$\begin{aligned} -9k-4+\int_0^k (3t^2-4t+9)dt &= -4 \\ -9k+\Big[\, t^3-2t^2+9t \,\Big]_0^k &= 0 \\ k^3-2k^2 &= 0 \end{aligned}$$

$k>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{k=2}$

■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 連立方程式 $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+by=1 \end{cases}$ から，y および x をそれぞれ消去すると

$$(ab-1)x=b-1, \quad (ab-1)y=a-1$$

i) $ab-1 \neq 0$ のとき　$x=\dfrac{b-1}{ab-1}$, $y=\dfrac{a-1}{ab-1}$

ii) $ab-1=0$ のとき，$b=\dfrac{1}{a}$ より与えられた連立方程式は

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+\dfrac{1}{a}y=1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} ax+y=1 \\ ax+y=a \end{cases}$$

となる．したがって

$a \neq 1$ のとき　解なし
$a=1$ のとき　$x+y=1$ である任意の x，y

よって $\begin{cases} \boldsymbol{ab \neq 1} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x=\dfrac{b-1}{ab-1},\ y=\dfrac{a-1}{ab-1}} \\ \boldsymbol{ab=1} \textbf{ かつ } \boldsymbol{a \neq 1} \textbf{ のとき} & \textbf{解なし} \\ \boldsymbol{a=b=1} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x+y=1} \textbf{ である任意の } \boldsymbol{x, y} \end{cases}$

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$1-\cos x \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x (1-\cos t)\,dt \geqq 0 \qquad \text{ゆえに} \quad x-\sin x \geqq 0$$

さらに　$\displaystyle\int_0^x (t-\sin t)\,dt \geqq 0$　ゆえに　$\dfrac{x^2}{2}+\cos x-1 \geqq 0$

よって　$\cos x \geqq 1-\dfrac{x^2}{2} \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(3)
$$(e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$$
$$(e^{ax}\cos bx)' = -be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx$$

上の 2 式から　$(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx)' = (a^2+b^2)e^{ax}\sin bx \quad \cdots (*)$

i) $b = 0$ のとき　$\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \int 0\,dx = \boldsymbol{C}$　**($\boldsymbol{C}$ は積分定数)**

ii) $b \neq 0$ のとき，$a^2+b^2 \neq 0$ であるから，$(*)$ より

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \boldsymbol{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

補足 $(*)$ から $a^2+b^2 \neq 0$ のとき

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

であるから，次の解答もよい．

i) $a^2+b^2 \neq 0$　すなわち　$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ のとき

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

ii) $a^2+b^2 = 0$　すなわち　$(a,\ b) = (0,\ 0)$ のとき

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \int 0\,dx = C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

■

8 (1) $\{x_n\}$ は，初項が 2，公比が 2 の等比数列であるから

$$x_n = 2\cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^n}$$

したがって，$y_{n+1} = 3x_n + y_n$ より　$y_{n+1} - y_n = 3\cdot 2^n$

$n > 1$ のとき
$$\sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^k$$
$$y_n - y_1 = \frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$y_n = 3\cdot 2^n - 6$$

$n = 1$ のときも成り立つので　$y_n = \boldsymbol{3\cdot 2^n - 6}$

(2) $a_{n+1} = ra_n + cs^n + d$ より

$$a_{n+1} - ra_n = cs^n + d \quad \cdots ①$$

$a_{n+1} + f_{n+1} = r(a_n + f_n)$，$f_n = ps^n + q$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - ra_n &= -f_{n+1} + rf_n \\ &= -(ps^{n+1} + q) + r(ps^n + q) \\ &= p(r-s)s^n + q(r-1) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より　$cs^n + d = p(r-s)s^n + q(r-1)$

これが n についての恒等式であるから

$$c = p(r-s), \quad d = q(r-1)$$

このとき，$r \neq s$，$r \neq 1$ より　$\boldsymbol{p = \dfrac{c}{r-s}, \ q = \dfrac{d}{r-1}}$

(3) $z_{n+1} = x_n - 2y_n + 3z_n$ に (1) の結果を代入すると

$$z_{n+1} = 2^n - 2(3{\cdot}2^n - 6) + 3z_n \quad \text{ゆえに} \quad z_{n+1} = 3z_n - 5{\cdot}2^n + 12$$

(2) の a_n に z_n を適用すると　$r = 3$，$c = -5$，$s = 2$，$d = 12$

また　$p = \dfrac{-5}{3-2} = -5$，$q = \dfrac{12}{3-1} = 6$　ゆえに　$f_n = -5{\cdot}2^n + 6 \quad \cdots ③$

このとき，$z_{n+1} + f_{n+1} = 3(z_n + f_n)$ より

$$z_n + f_n = (z_1 + f_1){\cdot}3^{n-1} = (0-4){\cdot}3^{n-1} = -4{\cdot}3^{n-1} \quad \cdots ④$$

③，④ より　$\boldsymbol{z_n = 5{\cdot}2^n - 4{\cdot}3^{n-1} - 6}$

別解 $z_{n+1} = 3z_n - 5{\cdot}2^n + 12$ より　$\dfrac{z_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{z_n}{3^n} = -\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

したがって，$n > 1$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{z_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{z_k}{3^k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k + 4\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} \\ \frac{z_n}{3^n} - \frac{z_1}{3} &= 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{4}{3} \\ z_n &= 5{\cdot}2^n - 4{\cdot}3^{n-1} - 6 \end{aligned}$$

$n = 1$ のときも，上式は成り立つ．よって　$z_n = 5{\cdot}2^n - 4{\cdot}3^{n-1} - 6$ ■

$\boxed{9}$ (1) $y=x^2$ より $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=2x\dfrac{dx}{dt}$ $\cdots$①

$|\vec{v}|=C$ より $|\vec{v}|^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=C^2$ $\cdots$②

① を ② に代入すると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(2x\frac{dx}{dt}\right)^2=C^2 \quad \text{ゆえに} \quad (1+4x^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=C^2$$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ であるから $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{C}{\sqrt{1+4x^2}}$ $\cdots$③

①，③ から $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\dfrac{dx}{dt}(1,\ 2x)=\boldsymbol{\dfrac{C}{\sqrt{1+4x^2}}(1,\ 2x)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}\\&=\frac{-4Cx}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{-4C^2x}{(1+4x^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(2x\frac{dx}{dt}\right)\\&=2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}+2x\frac{d^2x}{dt^2}\\&=2\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)^2+2x\cdot\frac{-4C^2x}{(1+4x^2)^2}=\frac{2C^2}{(1+4x^2)^2}\end{aligned}$$

よって $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2C^2}{(1+4x^2)^2}(-2x,\ 1)}$

解説 関数 $y=f(x)$ について，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とおくと

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y'\frac{dx}{dt}$$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=C^2$ より　$(1+y'^2)\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=C^2$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ であるから　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{C}{\sqrt{1+y'^2}}$

ゆえに　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\dfrac{dx}{dt}(1,\ y')=\boldsymbol{\dfrac{C}{\sqrt{1+y'^2}}(1,\ y')}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}\\&=\frac{-Cy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{-C^2y'y''}{(1+y'^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(y'\frac{dx}{dt}\right)\\&=y''\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}+y'\frac{d^2x}{dt^2}\\&=y''\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2+y'\cdot\frac{-C^2y'y''}{(1+y'^2)^2}=\frac{C^2y''}{(1+y'^2)^2}\end{aligned}$$

よって　$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{C^2y''}{(1+y'^2)^2}(-y',\ 1)}$

したがって，一定の速度で曲線 $y=f(x)$ 上を運動する動点の速度ベクトル $\vec{v}$ と加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は垂直である．

また，時刻 t を変数とする動点 $(x(t),\ y(t))$ の速度ベクトル $\vec{v}$ の大きさが一定であるとき

$$|\vec{v}|^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

は定数であるから，これを t で微分すると

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=0\quad\text{すなわち}\quad\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=0$$

よって，速度ベクトル $\vec{v}$ と加速度ベクトル $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ は垂直である．

(3) 円周上の点 Q$(x,\ y)$ を $x = r\cos\theta$，$y = r + r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \cdots(*)$$

$|\vec{v}| = C$ より，$|\vec{v}|^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = C^2$ であるから

$$\left(-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C^2 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^2}$$

上の結果に注意して $(*)$ を t で微分すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{C^2}{r}\cos\theta \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{C^2}{r}\sin\theta$$

ゆえに $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \dfrac{C^2}{r}(-\cos\theta, -\sin\theta)$ よって $|\vec{\alpha}| = \boldsymbol{\dfrac{C^2}{r}}$

(4) (2) の結果から，原点における P の加速度は $\vec{\alpha} = (0,\ 2C^2)$
この点における P の加速度の大きさは $|\vec{\alpha}| = 2C^2$
これと (3) で求めた加速度の大きさが等しいので

$$\frac{C^2}{r} = 2C^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r = \frac{1}{2}}$$

解説 (4) で求めた円の半径は，放物線 $y = x^2$ の原点における曲率円 (接触円) の半径である．九大 2009 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{3}}$，$\boxed{\mathbf{5}}$ の解説を参照[1] ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf