平成 24 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成 24 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{8}$ 〜 $\boxed{10}$ 数 I・II・III・A・B・C (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = \dfrac{3}{2}a_n - n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす.

(1) a_1 を求めなさい.

(2) a_2 を求めなさい.

(3) 一般項 a_n を求めなさい.

$\boxed{\mathbf{2}}$ t を実数とし，点 P の座標を $(t, -t^2)$ とする．点 P と直線 $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ の距離を d_1 とし，点 P と直線 $l_2 : 2x - y + 4 = 0$ の距離を d_2 とする．また，$d = d_1 + d_2$ とおく.

(1) $t = 2$ のとき，d の値を求めなさい.

(2) 点 P が直線 l_1 上またはその上側にあるための t の条件を求めなさい.

(3) $d = \dfrac{13}{\sqrt{5}}$ となる t の値を求めなさい.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 円周上の点 A における円の接線上に点 A と異なる点 P をとる．点 P を通る直線が点 P から近い順に 2 点 B，C で円と交わっている．$\angle$APB の二等分線と線分 AB，AC との交点をそれぞれ D，E とする．PA : PB $= r : 1 - r$ とおき，BD $= s$，CE $= t$ とおく．ただし，$0 < r < 1$ とする.

(1) 線分 AD の長さを r と s で表しなさい.

(2) PB : PC $= 2 : 3$ となるとき，r の値を求めなさい.

(3) (2) のとき，線分 AE の長さを t で表しなさい.

4 $I_1 = \int_0^3 \sqrt{x^2+9}\,dx$，$I_2 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ とする．

(1) 次の等式がすべての実数 x について成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい．

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} = a\sqrt{x^2+9} + \frac{b}{\sqrt{x^2+9}}$$

(2) I_1 において部分積分をすることにより，I_1 を I_2 で表しなさい．

(3) $\log(x+\sqrt{x^2+9})$ の導関数を利用して，I_2 を求めなさい．

(4) 曲線 $x^2-y^2=-9$ と直線 $y=3\sqrt{2}$ で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

5 曲線 $C: y=x^2+px+q$ と y 軸との交点を Q とし，x 座標 t が正である曲線 C 上の点を P とする．点 P における曲線 C の接線を l とする．曲線 C，接線 l および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とし，曲線 C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．

(1) l の方程式を求めなさい．

(2) S_1 を t で表しなさい．

(3) $S_1 : S_2$ を求めなさい．

6 t を実数とし，点 P の座標を $(t, -t^2)$ とする．点 P と直線 $l_1 : 2x+y+3=0$ の距離を d_1 とし，点 P と直線 $l_2 : 2x-y+4=0$ の距離を d_2 とする．また，$d=d_1+d_2$ とおく．

(1) $t=2$ のとき，d の値を求めなさい．

(2) 点 P が直線 l_1 上またはその上側にあるための t の条件を求めなさい．

(3) (2) のとき，d の最小値とそのときの t の値を求めなさい．

7 t を実数とし，点 P の座標を $(t, -t^2)$ とする．点 P と直線 $l_1 : 2x+y+3=0$ の距離を d_1 とし，点 P と直線 $l_2 : 2x-y+4=0$ の距離を d_2 とする．また，$d=d_1+d_2$ とおく．

(1) $t=2$ のとき，d の値を求めなさい．

(2) 点 P が直線 l_1 上またはその上側にあるための t の条件を求めなさい．

(3) d の最小値とそのときの t の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 実数係数の二次方程式 $x^2+2bx+c=0$ の解を α，β とする．この方程式が異なる 2 つの実数解を持たないとき，$\alpha+\beta+\alpha\beta$ の最小値を求めよ．

(2) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ が無理数であることを示せ．

(3) 動点 P が現在 x 軸上の原点にある．コイン 1 個とサイコロ 1 個を同時に投げ，コインが表であれば点 P はサイコロの目の数だけ正の方向に進み，コインが裏であればサイコロの目にかかわらず負の方向に 2 だけ進む．この試行を 3 回続けて行ったとき，点 P が原点にある確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 三角形 OAB で $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 三角形 OAB の外接円の中心 (外心)Q の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(2) 頂点 O と A からそれぞれの対辺 AB と OB に下ろした垂線の交点 (垂心) を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値を求めよ．

(4) 三角形 OAB の内接円の中心 (内心)P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 関数 $y=f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$ に関して，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ と $y=x$ のグラフを描け．

(2) $1<x_0<\dfrac{3}{2}$ に対して，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を定義する．このとき，$x_n>x_{n+1}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が単調減少で，ある実数 L に対して $a_n>L$ $(n=0,1,2,\cdots)$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が存在する．このことを用いて，数列 $\{x_n\}$ の極限を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $S_n = \dfrac{3}{2}a_n - n\ (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots (*)$

$(*)$ より，$n = 1$ のとき　$S_1 = \dfrac{3}{2}a_1 - 1$

$S_1 = a_1$ であるから　$a_1 = \dfrac{3}{2}a_1 - 1$　これを解いて　$\boldsymbol{a_1 = 2}$

(2) $(*)$ より，$n = 2$ のとき　$S_2 = \dfrac{3}{2}a_2 - 2$

$S_2 = a_1 + a_2$ であるから，上式および (1) の結果から

$$2 + a_2 = \frac{3}{2}a_2 - 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_2 = 8}$$

(3) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &= \left\{\frac{3}{2}a_{n+1} - (n+1)\right\} - \left(\frac{3}{2}a_n - n\right) \\ &= \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n - 1 \end{aligned}$$

整理すると　$a_{n+1} = 3a_n + 2$　ゆえに　$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

したがって　$a_n + 1 = (a_1 + 1)\cdot 3^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{a_n = 3^n - 1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $t = 2$ のとき　$\mathrm{P}(2, -4)$

P と直線 $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|2\cdot 2 + (-4) + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

P と直線 $l_2 : 2x - y + 4 = 0$ の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|2\cdot 2 - (-4) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

よって　$d = d_1 + d_2 = \dfrac{3}{\sqrt{5}} + \dfrac{12}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{3\sqrt{5}}$

(2) 直線 l_1 上またはその上側を表す領域は　$y \geqq -2x - 3$

$\mathrm{P}(t, -t^2)$ がこの領域にあるとき　$-t^2 \geqq -2t - 3$

ゆえに　$t^2 - 2t - 3 \leqq 0$　これを解いて　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 3}$

(3) $\mathrm{P}(t, -t^2)$ と直線 $l_1 : 2x+y+3=0$ の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|2t - t^2 + 3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|t^2 - 2t - 3|}{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{P}(t, -t^2)$ と直線 $l_2 : 2x-y+4=0$ の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|2t + t^2 + 4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|(t+1)^2 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}}$$

ゆえに　$d = d_1 + d_2 = \dfrac{|t^2-2t-3|}{\sqrt{5}} + \dfrac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}}$

(i) $t^2 - 2t - 3 \geqq 0$　すなわち　$t \leqq -1,\ 3 \leqq t$ のとき

$$d = \frac{t^2-2t-3}{\sqrt{5}} + \frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}} = \frac{2t^2+1}{\sqrt{5}}$$

$d = \dfrac{13}{\sqrt{5}}$ のとき　$\dfrac{2t^2+1}{\sqrt{5}} = \dfrac{13}{\sqrt{5}}$　ゆえに　$t^2 = 6$

t の範囲に注意して，これを解くと　$t = -\sqrt{6}$

(ii) $t^2 - 2t - 3 < 0$　すなわち　$-1 < t < 3$ のとき

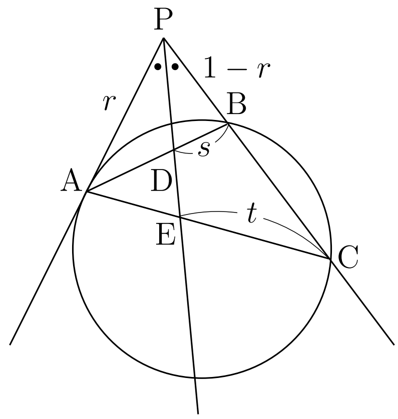
$$d = \frac{-(t^2-2t-3)}{\sqrt{5}} + \frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}} = \frac{4t+7}{\sqrt{5}}$$

$d = \dfrac{13}{\sqrt{5}}$ のとき　$\dfrac{4t+7}{\sqrt{5}} = \dfrac{13}{\sqrt{5}}$　ゆえに　$4t+7 = 13$

t の範囲に注意して，これを解くと　$t = \dfrac{3}{2}$

よって　$\boldsymbol{t = -\sqrt{6},\ \dfrac{3}{2}}$

$\boxed{3}$ (1) D は $\angle$APB と線分 AB の交点であるから



$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{PA}:\mathrm{PB}$$

ゆえに　$\mathrm{AD}:s=r:1-r$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{AD}=\dfrac{rs}{1-r}}$

(2) $\triangle\mathrm{PAB}\backsim\triangle\mathrm{PCA}$ であるから

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=\mathrm{PC}:\mathrm{PA}\quad\cdots ①$$

$$\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}=\mathrm{PA}^2\quad\cdots ①'$$

PB : PC = 2 : 3 であるから

$$\mathrm{PC}=\frac{3}{2}\mathrm{PB}\quad\cdots ②$$

② を ①′ に代入して　$\dfrac{3}{2}\mathrm{PB}^2=\mathrm{PA}^2$

したがって　$2\mathrm{PA}^2=3\mathrm{PB}^2$　ゆえに　$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=\sqrt{3}:\sqrt{2}\quad\cdots ③$

$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=r:1-r$ であるから　$r:1-r=\sqrt{3}:\sqrt{2}$

よって　$\boldsymbol{r=3-\sqrt{6}}$

(3) ①，③ より　$\mathrm{PC}:\mathrm{PA}=\sqrt{3}:\sqrt{2}$

E は $\angle$CPA の二等分線と線分 CA の交点であるから

$$\mathrm{CE}:\mathrm{AE}=\mathrm{PC}:\mathrm{PA}\qquad したがって\qquad t:\mathrm{AE}=\sqrt{3}:\sqrt{2}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{AE}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}t}$

$\boxed{4}$ (1)

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}=a\sqrt{x^2+9}+\frac{b}{\sqrt{x^2+9}}$$

上式の両辺に $\sqrt{x^2+9}$ を掛けると

$$\begin{aligned}x^2&=a(x^2+9)+b\\&=ax^2+9a+b\end{aligned}$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$1=a,\ \ 0=9a+b\quad よって\quad \boldsymbol{a=1,\ b=-9}$$

(2)
$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^3 (x)'\sqrt{x^2+9}\,dx \\
&= \Big[x\sqrt{x^2+9}\Big]_0^3 - \int_0^3 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx \\
&= 9\sqrt{2} - \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx \\
&= 9\sqrt{2} - \int_0^3 \left(\sqrt{x^2+9} - \frac{9}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx \\
&= 9\sqrt{2} - I_1 + 9I_2
\end{aligned}
$$

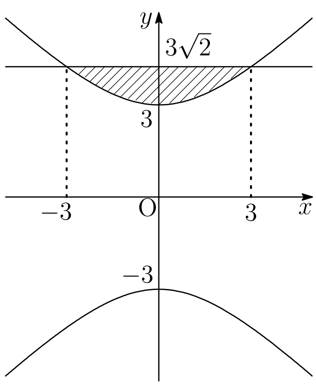
よって　　$\boldsymbol{I_1 = \dfrac{9}{2}I_2 + \dfrac{9\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+9}) = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{x+\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ であるから

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx \\
&= \Big[\ \log(x+\sqrt{x^2+9})\ \Big]_0^3 \\
&= \log(3+3\sqrt{2}) - \log 3 = \boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}
\end{aligned}
$$

(4) $x^2-y^2=-9$ から

$$y = \pm\sqrt{x^2+9}$$



ゆえに，$y=\sqrt{x^2+9}$ と $y=3\sqrt{2}$ で囲まれた部分が求める面積である．
この 2 つの関数のグラフの共有点の x 座標は

$\sqrt{x^2+9} = 3\sqrt{2}$　これを解いて　$x=\pm 3$

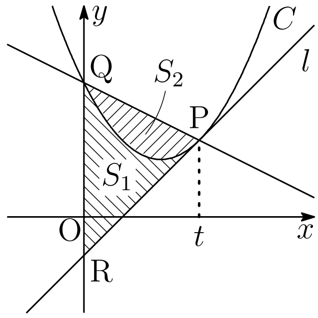
求める面積 S は，(2)，(3) を用いて

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-3}^3 (3\sqrt{2}-\sqrt{x^2+9})dx = 2\int_0^3 (3\sqrt{2}-\sqrt{x^2+9})dx \\
&= 2\Big[\ 3\sqrt{2}x\ \Big]_0^3 - 2I_1 = 18\sqrt{2} - 2\left(\frac{9}{2}I_2 + \frac{9\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 9\sqrt{2} - 9I_2 = \boldsymbol{9\sqrt{2} - 9\log(1+\sqrt{2})}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y = x^2 + px + q$ より　$y' = 2x + p$

$x = t$ のとき　$y' = 2t + p$

l は点 $(t,\ t^2 + pt + q)$ を通り，傾き $2t + p$ の直線であるから



$$y - (t^2 + pt + q) = (2t + p)(x - t)$$

よって　　$\boldsymbol{y = (2t + p)x - t^2 + q}$

(2) $0 < x < t$ において，C は l の上側にあるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t [(x^2 + px + q) - \{(2t + p)x - t^2 + q\}]dx \\ &= \int_0^t (x - t)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - t)^3\right]_0^t = \boldsymbol{\frac{t^3}{3}} \end{aligned}$$

(3) l と y 軸の交点を R とすると，Q$(0,\ q)$，R$(0, -t^2 + q)$ であるから

$$\mathrm{QR} = q - (-t^2 + q) = t^2 \quad \text{ゆえに} \quad \triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}t^2 \cdot t = \frac{t^3}{2}$$

したがって　　$S_2 = \triangle\mathrm{PQR} - S_1 = \dfrac{t^3}{2} - \dfrac{t^3}{3} = \dfrac{t^3}{6}$

よって　　$S_1 : S_2 = \dfrac{t^3}{3} : \dfrac{t^3}{6} = \mathbf{2 : 1}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $t=2$ のとき　$\mathrm{P}(2,-4)$

Pと直線 $l_1: 2x+y+3=0$ の距離 d_1 は

$$d_1=\frac{|2\cdot 2+(-4)+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Pと直線 $l_2: 2x-y+4=0$ の距離 d_2 は

$$d_2=\frac{|2\cdot 2-(-4)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}$$

よって　$d=d_1+d_2=\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{12}{\sqrt{5}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

(2) 直線 l_1 上またはその上側を表す領域は　$y \geqq -2x-3$

$\mathrm{P}(t,-t^2)$ がこの領域にあるとき　$-t^2 \geqq -2t-3$

ゆえに　$t^2-2t-3 \leqq 0 \cdots$ ①　よって　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 3}$

(3) $\mathrm{P}(t,-t^2)$ と直線 $l_1: 2x+y+3=0$ の距離 d_1 は，① より

$$d_1=\frac{|2t-t^2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|t^2-2t-3|}{\sqrt{5}}=\frac{-t^2+2t+3}{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{P}(t,-t^2)$ と直線 $l_2: 2x-y+4=0$ の距離 d_2 は

$$d_2=\frac{|2t+t^2+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|(t+1)^2+3|}{\sqrt{5}}=\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}}$$

ゆえに　$d=d_1+d_2=\dfrac{-t^2+2t+3}{\sqrt{5}}+\dfrac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4t+7}{\sqrt{5}}$

(1) の結果から　$\boldsymbol{t=-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{5}}}$ をとる

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $t=2$ のとき　$\mathrm{P}(2,-4)$

P と直線 $l_1 : 2x+y+3=0$ の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|2\cdot 2+(-4)+3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

P と直線 $l_2 : 2x-y+4=0$ の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|2\cdot 2-(-4)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

よって　　$d = d_1+d_2 = \dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{12}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{3\sqrt{5}}$

(2) 直線 l_1 上またはその上側を表す領域は　　$y \geqq -2x-3$

$\mathrm{P}(t,-t^2)$ がこの領域にあるとき　　$-t^2 \geqq -2t-3$

ゆえに　$t^2-2t-3 \leqq 0$　これを解いて　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 3}$

(3) $\mathrm{P}(t,-t^2)$ と直線 $l_1 : 2x+y+3=0$ の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|2t-t^2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|t^2-2t-3|}{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{P}(t,-t^2)$ と直線 $l_2 : 2x-y+4=0$ の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|2t+t^2+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|(t+1)^2+3|}{\sqrt{5}} = \frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}}$$

ゆえに　$d = d_1+d_2 = \dfrac{|t^2-2t-3|}{\sqrt{5}}+\dfrac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}}$

(i) $t^2-2t-3 \geqq 0$　すなわち　$t \leqq -1,\ 3 \leqq t$ のとき

$$d = \frac{t^2-2t-3}{\sqrt{5}}+\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}} = \frac{2t^2+1}{\sqrt{5}}$$

このとき，d は，$t=-1$ のとき，最小値 $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ をとる．

(ii) $t^2-2t-3<0$　すなわち　$-1<t<3$ のとき

$$d = \frac{-(t^2-2t-3)}{\sqrt{5}}+\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}} = \frac{4t+7}{\sqrt{5}}$$

このとき，d は，最小値をとらない．

よって　$\boldsymbol{t=-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{5}}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 2次方程式 $x^2+2bx+c=0\cdots(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=b^2-c \quad ゆえに \quad c=b^2-D/4$$

$(*)$ が異なる2つの実数解をもたないので　$D \leqq 0 \quad \cdots ①$
また，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-2b$，$\alpha\beta=c$

したがって

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\alpha\beta &= -2b+c\\ &= -2b+(b^2-D/4)\\ &= (b-1)^2-D/4-1\end{aligned}$$

① より，上式は，$b=1$，$D=0$ のとき，最小値 $\mathbf{-1}$ をとる．

(2) まず,「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことを背理法により示す．
「$\sqrt{2}$ は無理数でない」すなわち「$\sqrt{2}$ は有理数である」と仮定すると，
$\sqrt{2}$ は互いに素である2つの整数 m，n を用いて

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$$

と表すことができる．ゆえに　$\sqrt{2}\,n=m$

この両辺を2乗すると　$2n^2=m^2 \quad \cdots ①$

よって，m^2 は偶数であるから，m も偶数となる．
偶数 m は，ある整数 k を用いて，$m=2k$ と表されるから，① に代入して

$$2n^2=4k^2 \quad すなわち \quad n^2=2k^2$$

よって，n^2 は偶数となり，n も偶数となる．
m と n がともに偶数となることは，m と n が互いに素であることに矛盾する．したがって「$\sqrt{2}$ は無理数である」
次に，$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ が有理数であると仮定すると，整数 p，q を用いて

$$\frac{5\sqrt{2}}{3}=\frac{p}{q}$$

と表すことができる．ゆえに　$\sqrt{2}=\dfrac{3p}{5q}$
これは，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．

よって，$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ は無理数である．

(3) 試行を 3 回行ったとき，点 P が原点にあるのは，次の場合である．

(i) 1 回正の方向に 4 だけ進み，2 回負の方向に 2 だけ進む．
すなわち，コインが表でサイコロは 4 の目であるのが 1 回，コインが裏であるのが 2 回の確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{48} $$

(ii) 2 回正の方向に 1 だけ進み，1 回負の方向に 2 だけ進む．
すなわち，コインが表でサイコロは 1 の目であるのが 2 回，コインが裏であるのが 1 回の確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \times \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{288} $$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{3}{48} + \dfrac{3}{288} = \boldsymbol{\dfrac{7}{96}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\vec{u} = |\vec{a}|^2\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$，$\vec{v} = |\vec{b}|^2\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$ とすると　$\vec{u}\perp\vec{a}$，$\vec{v}\perp\vec{b}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{6} = 1\cdot 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$ \vec{u} = \vec{b} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}, \qquad \vec{v} = \vec{a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b} $$

線分 OA の垂直二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 s を用いて

$$ \frac{1}{2}\vec{a} + s\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\vec{b} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}s\right)\vec{a} + s\vec{b} \quad \cdots ① $$

線分 OB の垂直二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 t を用いて

$$ \frac{1}{2}\vec{b} + t\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{b} + t\left(\vec{a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}\right) = t\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\vec{b} \quad \cdots ② $$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は ①，② を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}s = t, \quad s = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t \quad \text{これを解いて} \quad s = t = 2 - \sqrt{3} $$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (2 - \sqrt{3})(\vec{a} + \vec{b})}$

(2) A を通り OB に垂直な直線上の点の位置ベクトルは，実数 m を用いて

$$\vec{a}+m\vec{v}=\vec{a}+m\left(\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}\right)=(1+m)\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}m\vec{b} \quad \cdots ③$$

B を通り OA に垂直な直線上の点の位置ベクトルは，実数 n を用いて

$$\vec{b}+n\vec{u}=\vec{b}+n\left(\vec{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}n\vec{a}+(1+n)\vec{b} \quad \cdots ④$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は ③，④ を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$1+m=-\frac{\sqrt{3}}{2}n,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}m=1+n \quad \text{ゆえに} \quad m=n=2\sqrt{3}-4$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2\sqrt{3}-3)(\vec{a}+\vec{b})}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2}$

$$=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

(4) ∠AOB の二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 x を用いて

$$x\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)=x\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=x\vec{a}+x\vec{b} \quad \cdots ⑤$$

(3) の結果から　$\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

したがって，∠OAB の二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 y を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)&=\vec{a}+y\left\{-\vec{a}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}(\vec{b}-\vec{a})\right\}\\&=\left\{1-\left(1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)y\right\}\vec{a}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}y\vec{b} \quad \cdots ⑥\end{aligned}$$

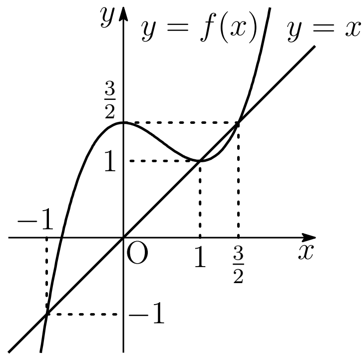
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，⑤，⑥ を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$x=1-\left(1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)y,\quad x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}y$$

第2式から　$y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x$　第1式に代入して　$x=1-\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+1\right)x$

これを解いて　$x=\dfrac{2}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}(\vec{a}+\vec{b})}$

$\boxed{\textbf{10}}$ (1) $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}$ より



$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$y = f(x)$ と $y = x$ から y を消去すると

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} = x \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

したがって，$y = f(x)$ と $y = x$ の共有点は　$(-1, -1),\ (1,\ 1),\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

よって，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフは，右上の図のようになる．

(2) (1) の結果から，$1 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき　$x > f(x)$

(i) 条件により　$1 < x_0 < \dfrac{3}{2}$

(ii) $n = k$ のとき，$1 < x_k < \dfrac{3}{2}$ であると仮定すると

$$x_k > f(x_k) \qquad \text{すなわち} \qquad x_k > x_{k+1}$$

また

$$\begin{aligned} x_{k+1} - 1 &= f(x_k) - 1 \\ &= \left({x_k}^3 - \frac{3}{2}{x_k}^2 + \frac{3}{2}\right) - 1 \\ &= (x_k - 1)^2\left(x_k + \frac{1}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

したがって　$1 < x_{k+1} < x_k < \dfrac{3}{2}$　すなわち　$1 < x_{k+1} < \dfrac{3}{2}$

よって，$1 < x_n < \dfrac{3}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ となるから，次式が成り立つ．

$$x_n > f(x_n) \qquad \text{すなわち} \qquad x_n > x_{n+1}$$

(3) (2) の結果から，$\{x_n\}$ は単調減少で，$x_n > 1$ であるから，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ が存在し，極限値を α $(1 \leqq \alpha \leqq x_0 < \frac{3}{2})$ とすると，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ より

$$f(\alpha) = \alpha \quad \text{すなわち} \quad \alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2} = \alpha$$

これを解いて　$\alpha = 1$　よって　$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1}$