

## 平成 23 年度 大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工・経済・教育福祉・医学部 平成 23 年 2 月 25 日

• 工学部 [1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B・C (100 分)

• 経済学部 [1] [2] [3] [5] 数 I・II・A・B (100 分)

• 教育福祉科学部 [1] [2] [3] 数 I・II・A・B (80 分)

• 医学部 [6] [7] [8] 数 I・II・III・A・B・C (80 分)

[1] 曲線  $C: y = 2x^2 - 2x$  の原点における接線を  $l$  とする. 直線  $l$ , 直線  $x = 1$  および曲線  $C$  で囲まれる領域を  $D$  とする.

(1) 直線  $l$  の方程式を求めなさい.

(2) 領域  $D$  と不等式  $x + y \leq 0$  の表す領域  $E$  との共通部分の面積を求めなさい.

[2] 直線  $l_1: y = mx + 3$  ( $m > 0$ ) が, 点  $A(5, 3)$  を中心とする円  $C_1$  に接している. その接点を  $P$  とする. 直線  $l_1$  と  $y$  軸との交点を  $Q$ , 2 点  $A, P$  を通る直線  $l_2$  と  $x$  軸との交点を  $R$  とする.

(1) 円  $C_1$  の半径  $r$  を  $m$  を用いて表しなさい.

(2) 円  $C_1$  が  $x$  軸と異なる 2 点で交わるような  $m$  の値の範囲を求めなさい.

(3) 線分  $QR$  の中点  $S$  の座標を求めなさい.

(4) 3 点  $P, Q, R$  を通る円  $C_2$  の中心と円  $C_1$  の中心との距離を  $d$  とする.  $d$  の最小値とそのときの  $m$  の値を求めなさい.

[3] 3 点  $O, A, B$  があり,  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  とおくと,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\cos \angle AOB = \frac{5}{6}$  が成り立っている.  $OA$  の中点を  $P$  とし, 半直線  $AB$  上に  $AB:AH = 1:s$  ( $s > 0$ ) となる点  $H$  をとる.

(1)  $\vec{OH}$  を  $s, \vec{a}, \vec{b}$  を用いて表しなさい.

(2) 直線  $OH$  と直線  $AB$  が垂直に交わるような  $s$  の値を求めなさい.

(3) (2) のとき, 直線  $OH$  と直線  $PB$  の交点を  $Q$  とする.  $\vec{OQ}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表しなさい.

4 次の問いに答えなさい。

- (1) 不定積分  $\int t^2 e^t dt$  を求めなさい。
- (2)  $x \geq 0$  で定義された関数

$$F(x) = -x + \int_0^x (xt - t^2)e^t dt$$

の最小値とそのときの  $x$  の値を求めなさい。

5 正の偶数  $m$  が順に  $m$  個ずつ並んだ数列

$$2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \dots$$

を  $\{a_n\}$  とする。

- (1) 正の偶数  $2t$  が数列  $\{a_n\}$  の第何項に初めて現れるかを自然数  $t$  を用いて表しなさい。
- (2)  $a_{100}$  を求めなさい。
- (3)  $a_1$  から  $a_{100}$  までの和を求めなさい。

6 次の問いに答えよ。

- (1) 正弦定理の証明をせよ。ただし、鋭角三角形の場合だけの証明でよい。
- (2) 実数  $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$  に対して次の不等式を証明せよ。ただし、 $n$  は自然数である。

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

7  $x$  の三次関数  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  のグラフはある点に関して対称であることを証明せよ。ここに、 $a, b, c, d$  は定数で  $a \neq 0$  とする。

8 実数の定数 (パラメータ)  $k$  に対して、放物線  $y = x^2$  と直線  $y = x + k, x = -1, x = 2$  で囲まれた図形の面積の最小値と、そのときの定数  $k$  を求めよ。

## 解答例

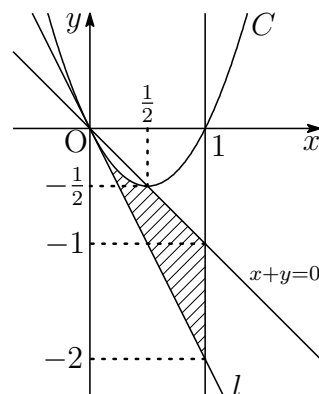
- 1 (1)  $y = 2x^2 - 2x$  を微分すると  $y' = 4x - 2$   
したがって、 $x = 0$  のとき  $y' = -2$   
よって、 $C$  の原点における接線  $l$  の方程式は  $y = -2x$

- (2)  $C : y = 2x^2 - 2x$  と直線  $x + y = 0$  の共有点は

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

求める面積  $S$  は、図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \{-x - (2x^2 - 2x)\} dx \\ &= \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{6} \left(\frac{1}{2} - 0\right)^3 = \frac{11}{24} \end{aligned}$$



- 2 (1) 円の中心  $A(5, 3)$  から直線  $mx - y + 3 = 0$  ( $m > 0$ ) までの距離が、円  $C_1$  の半径  $r$  であるから

$$r = \frac{|m \cdot 5 - 3 + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{5m}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

- (2)  $C_1$  が  $x$  軸と異なる 2 点で交わるとき、  
 $r > 3$  であるから、(1) の結果より

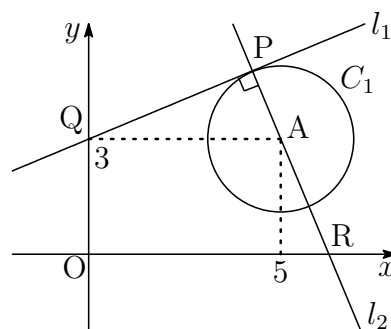
$$\frac{5m}{\sqrt{m^2 + 1}} > 3 \quad m > 0 \text{ に注意してこれを解くと } m > \frac{3}{4}$$

- (3)  $l_2$  は点  $A(5, 3)$  を通り、 $l_1$  に垂直な直線であるから、 $l_2$  の方程式は

$$y - 3 = -\frac{1}{m}(x - 5) \quad \text{すなわち} \quad x + my - 3m - 5 = 0$$

$l_2$  と  $x$  軸との共有点の座標は、これに  $y = 0$  を代入して  $x = 3m + 5$   
ゆえに、点  $R$  の座標は  $(3m + 5, 0)$

よって、線分  $QR$  の中点  $S$  の座標は  $\left(\frac{3m + 5}{2}, \frac{3}{2}\right)$



- (4)  $\angle QPR = 90^\circ$  より,  $C_2$  は線分 QR を直径とする円であるから, その中心は S である.  $d$  は AS 間の距離であるから

$$d^2 = AS^2 = \left(\frac{3m+5}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 = \left(\frac{3m-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

よって  $m = \frac{5}{3}$  のとき最小値  $\frac{3}{2}$  ■

**3** (1)  $\vec{OH} = \vec{OA} + s\vec{AB} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$

(2)  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \cos \angle AOB = \frac{5}{6}$  より  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle AOB = 3 \cdot 2 \cdot \frac{5}{6} = 5$

$$\begin{aligned} \vec{OH} \cdot \vec{AB} &= \{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (s-1)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 \\ &= (s-1) \cdot 3^2 + (1-2s) \cdot 5 + s \cdot 2^2 = 3s - 4 \end{aligned}$$

OH  $\perp$  AB より,  $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$  であるから  $3s - 4 = 0$  ゆえに  $s = \frac{4}{3}$

(3) (1), (2) の結果から  $\vec{OH} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

Q は直線 OH 上にあるから, 実数  $k$  を用いて

$$\vec{OQ} = k\vec{OH} = -\frac{k}{3}\vec{a} + \frac{4k}{3}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

Q は直線 PB 上にあるから, 実数  $t$  を用いて

$$\vec{OQ} = (1-t)\vec{OP} + t\vec{OB} = \frac{1-t}{2}\vec{a} + t\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は, 1 次独立であるから, ①, ② より

$$-\frac{k}{3} = \frac{1-t}{2}, \quad \frac{4k}{3} = t \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{3}{2}, \quad t = 2$$

よって  $\vec{OQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$  ■

4 (1)  $\int t^2 e^t dt = (t^2 - 2t + 2)e^t + C$  ( $C$  は積分定数)

解説  $k$  を定数とすると

$$\int f(t)e^{kt} dt = \frac{1}{k} \left\{ f(t) - \frac{f'(t)}{k} + \frac{f''(t)}{k^2} - \dots \right\} e^{kt} + C$$

(2) (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned} F(x) &= -x + \int_0^x (xt - t^2)e^t dt \\ &= -x + x \int_0^x te^t dx - \int_0^x t^2 e^t dt \\ &= -x + x \left[ (t-1)e^t \right]_0^x - \left[ (t^2 - 2t + 2)e^t \right]_0^x \\ &= -x + x\{(x-1)e^x + 1\} - \{(x^2 - 2x + 2)e^x - 2\} \\ &= (x-2)e^x + 2 \end{aligned}$$

$F(x)$  を微分すると,  $F'(x) = (x-1)e^x$

ゆえに,  $F(x)$  の増減表は, 次のようになる.

$x$	0	...	1	...
$F'(x)$		-	0	+
$F(x)$	0	↘	$-e+2$	↗

よって,  $x = 1$  のとき最小値  $-e + 2$  ■

5 (1) 正の偶数  $2j$  が  $2j$  個並んでいる数列を第  $j$  群とすると, 第  $j$  群の最後の項の項数は

$$\sum_{i=1}^j 2i = 2 \cdot \frac{1}{2} j(j+1) = j(j+1)$$

ゆえに,  $t-1$  群の最後の項の項数は ( $t \geq 2$ )  $(t-1)\{(t-1)+1\} = t^2 - t$

よって,  $2t$  が初めて現れるのは 第  $t^2 - t + 1$  項

これは,  $t = 1$  のときも成り立つから 第  $t^2 - t + 1$  項

(2) 第 9 群の最後の項の項数は  $9(9+1) = 90$

第 10 群の最後の項の項数は  $10(10+1) = 110$

よって,  $a_{100}$  は第 10 群にあるので  $a_{100} = 2 \cdot 10 = 20$

(3) 第  $j$  群にある項の和は  $2j \times 2j = 4j^2$

第 10 群の最初の項の項数は  $10^2 - 10 + 1 = 91$

よって, 求める和は  $\sum_{j=1}^9 4j^2 + 10 \times 20 = 4 \times \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 + 200 = 1340$  ■

- 6 (1) 右の図で、 $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とし、  
線分  $BD$  は  $\triangle ABC$  の直径とする。

このとき、円周角と中心角の性質により、

$$\angle BDC = \angle BAC = A$$

$$\angle BCD = 90^\circ$$

が成り立つ。また、 $BD = 2R$  である。

よって、 $\triangle BCD$  において

$$a = 2R \sin A$$

が成り立つ。

$b = CA$ ,  $c = AB$  とおくと、同様に

$$b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C$$

が成り立つ。よって、次の正弦定理を得る。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

- (2)  $f(t) = \sum_{i=1}^n (x_i t - y_i)^2$  とおくと

$$f(t) = t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2t \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

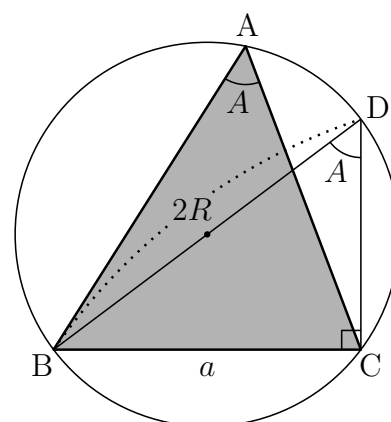
$f(t) \geq 0$  であるから、方程式  $f(t) = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D/4 = \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 0$$

よって

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

■



7  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  とおくと

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b, \quad f'''(x) = 6a$$

$f''(p) = 0$ , すなわち  $p = -\frac{b}{3a}$  とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + a(x-p)^3 \\ &= f(p) + f'(p)(x-p) + a(x-p)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad f(p+k) &= f(p) + f'(p)k + ak^3 \\ f(p-k) &= f(p) - f'(p)k - ak^3 \end{aligned}$$

任意の実数  $k$  について 2 点  $(p+k, f(p+k))$ ,  $(p-k, f(p-k))$  の中点が  $(p, f(p))$  であるから, 3 次関数  $y = f(x)$  は, グラフ上の点  $(p, f(p))$  に関して対称である.

補足 上の関数  $f(x)$  について,  $f'''(x) = 6a$  であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_p^x f'(t) dt = f(p) - \int_p^x (x-t)' f'(t) dt \\ &= f(p) - \left[ (x-t)f'(t) \right]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t) dt \\ &= f(p) + (x-p)f'(p) - \frac{1}{2!} \int_p^x \{(x-t)^2\}' f''(t) dt \\ &= f(p) + (x-p)f'(p) - \frac{1}{2!} \left[ (x-t)^2 f''(t) \right]_p^x + \frac{1}{2!} \int_p^x (x-t)^2 f'''(t) dt \\ &= f(p) + (x-p)f'(p) + \frac{1}{2!} (x-p)^2 f''(p) + \frac{1}{2!} \int_p^x 6a(x-t)^2 dt \\ &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 + a(x-p)^3 \end{aligned}$$

同様に, 4 次関数  $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  について

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x-p) + \frac{g''(p)}{2!} (x-p)^2 + \frac{g'''(p)}{3!} (x-p)^3 + a(x-p)^4$$

が成り立つ. ■

- 8 放物線  $y = x^2$  と直線  $y = x + k$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  で囲まれた図形の面積を  $S(k)$  とする. 放物線  $y = x^2$  と, 直線  $x = -1$ ,  $x = 2$  は, それぞれ  $(-1, 1)$ ,  $(2, 4)$  で交わり, 直線  $y = x + k$  は,  $k = 2$  のとき, これらの2点を通る. また, 放物線  $y = x^2 \cdots \textcircled{1}$  と直線  $y = x + k \cdots \textcircled{2}$  の方程式から  $y$  を消去して

$$x^2 = x + k \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - k = 0 \quad \cdots (*)$$

放物線  $\textcircled{1}$  と直線  $\textcircled{2}$  が接するとき

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = -\frac{1}{4}$$

右の図から

$$\begin{aligned} S(2) &= \int_{-1}^2 \{(x+2) - x^2\} dx \\ &= -\int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \\ S\left(-\frac{1}{4}\right) &= 3 \left\{ 2 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right\} - S(2) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$k > 2 \text{ のとき} \quad S(k) = S(2) + 3(k-2)$$

$$k < -\frac{1}{4} \text{ のとき} \quad S(k) = S\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4} - k\right)$$

したがって,  $S(k)$  の最小値は,  $-\frac{1}{4} \leq k \leq 2$  において調べればよい. このとき, 放物線  $\textcircled{1}$  と直線  $\textcircled{2}$  の共有点の  $x$  座標を  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $-1 \leq \alpha \leq \beta \leq 2$ ) とすると, 方程式  $(*)$  の解と係数の関係により

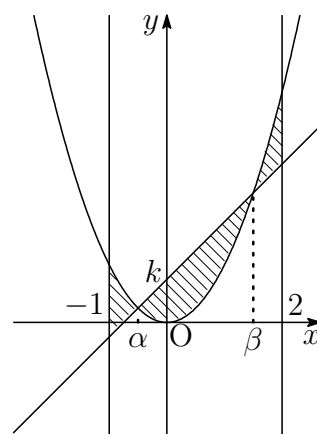
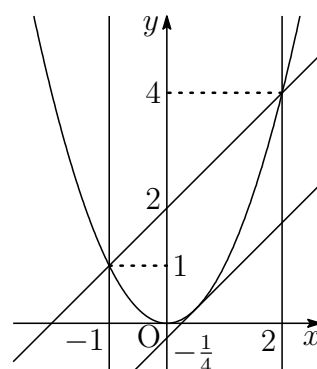
$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -k \quad \cdots (**)$$

右の図から

$$S(k) = \int_{-1}^2 |x^2 - (x+k)| dx$$

ここで, 関数  $x^2 - x - k$  の原始関数の1つを  $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - kx$  とおくと

$$\begin{aligned} S(k) &= \left[ F(x) \right]_{-1}^{\alpha} - \left[ F(x) \right]_{\alpha}^{\beta} + \left[ F(x) \right]_{\beta}^2 \\ &= -2\{F(\beta) - F(\alpha)\} + F(2) - F(-1) \end{aligned}$$



$$F(2) - F(-1) = \left(\frac{2}{3} - 2k\right) - \left(-\frac{5}{6} + k\right) = \frac{3}{2} - 3k$$

$$\begin{aligned} (**) \text{ より } \quad x^2 - x - k &= (x - \alpha)(x - \beta) \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{1 + 4k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \quad F(\beta) - F(\alpha) &= \left[ F(x) \right]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - x - k) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = -\frac{1}{6}(1 + 4k)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \quad S(k) &= \frac{1}{3}(1 + 4k)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} - 3k \quad \left(-\frac{1}{4} \leq k \leq 2\right) \\ S'(k) &= 2\sqrt{1 + 4k} - 3 \end{aligned}$$

したがって、 $S(k)$  の増減表は、次のようになる。

$k$	$-\frac{1}{4}$	$\dots$	$\frac{5}{16}$	$\dots$	$2$
$S'(k)$		$-$	$0$	$+$	
$S(k)$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$\frac{27}{16}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$

よって  $k = \frac{5}{16}$  のとき最小値  $\frac{27}{16}$  ■