平成 23 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成 23 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B・C (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 曲線 $C : y = 2x^2 - 2x$ の原点における接線を l とする．直線 l，直線 $x = 1$ および曲線 C で囲まれる領域を D とする．

(1) 直線 l の方程式を求めなさい．

(2) 領域 D と不等式 $x+y \leqq 0$ の表す領域 E との共通部分の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 直線 $l_1 : y = mx + 3$ $(m > 0)$ が，点 A(5, 3) を中心とする円 C_1 に接している．その接点を P とする．直線 l_1 と y 軸との交点を Q，2 点 A，P を通る直線 l_2 と x 軸との交点を R とする．

(1) 円 C_1 の半径 r を m を用いて表しなさい．

(2) 円 C_1 が x 軸と異なる 2 点で交わるような m の値の範囲を求めなさい．

(3) 線分 QR の中点 S の座標を求めなさい．

(4) 3 点 P，Q，R を通る円 C_2 の中心と円 C_1 の中心との距離を d とする．d の最小値とそのときの m の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3 点 O，A，B があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 2$，$\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{5}{6}$ が成り立っている．OA の中点を P とし，半直線 AB 上に $\mathrm{AB} : \mathrm{AH} = 1 : s$ $(s > 0)$ となる点 H をとる．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(2) 直線 OH と直線 AB が垂直に交わるような s の値を求めなさい．

(3) (2) のとき，直線 OH と直線 PB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

$\boxed{4}$ 次の問いに答えなさい．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int t^2 e^t\,dt$ を求めなさい．

(2) $x \geqq 0$ で定義された関数

$$F(x) = -x + \int_0^x (xt - t^2)e^t\,dt$$

の最小値とそのときの x の値を求めなさい．

$\boxed{5}$ 正の偶数 m が順に m 個ずつ並んだ数列

$$2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ とする．

(1) 正の偶数 $2t$ が数列 $\{a_n\}$ の第何項に初めて現れるかを自然数 t を用いて表しなさい．

(2) a_{100} を求めなさい．

(3) a_1 から a_{100} までの和を求めなさい．

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ．

(1) 正弦定理の証明をせよ．ただし，鋭角三角形の場合だけの証明でよい．

(2) 実数 x_i，y_i，$i = 1, 2, \cdots n$ に対して次の不等式を証明せよ．ただし，n は自然数である．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

$\boxed{7}$ x の三次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフはある点に関して対称であることを証明せよ．ここに，a，b，c，d は定数で $a \neq 0$ とする．

$\boxed{8}$ 実数の定数 (パラメータ) k に対して，放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + k$，$x = -1$，$x = 2$ で囲まれた図形の面積の最小値と，そのときの定数 k を求めよ．

正解

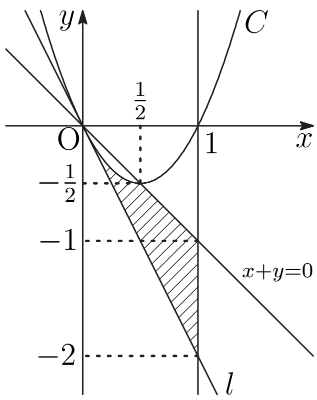
$\boxed{1}$ (1) $y = 2x^2 - 2x$ を微分すると　$y' = 4x - 2$

したがって，$x = 0$ のとき　$y' = -2$

よって，C の原点における接線 l の方程式は　$\boldsymbol{y = -2x}$

(2) $C : y = 2x^2 - 2x$ と直線 $x + y = 0$ の共有点は

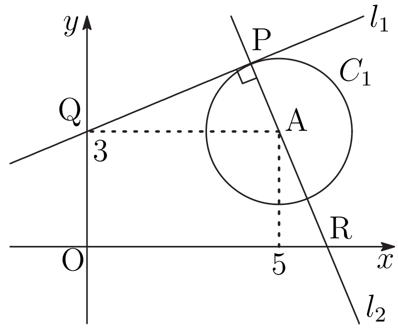
$$(0,\ 0),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$



求める面積 S は，図の斜線部分であるから

$$S = \frac{1}{2}\cdot1\cdot1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \{-x - (2x^2 - 2x)\}dx$$
$$= \frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\left(x - \frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{6}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^3 = \boldsymbol{\frac{11}{24}}$$

$\boxed{2}$ (1) 円の中心 $\mathrm{A}(5,\ 3)$ から直線 $mx - y + 3 = 0$ $(m > 0)$ までの距離が，円 C_1 の半径 r であるから



$$r = \frac{|m\cdot5 - 3 + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{5m}{\sqrt{m^2 + 1}}}$$

(2) C_1 が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$r > 3$ であるから，(1) の結果より

$$\frac{5m}{\sqrt{m^2 + 1}} > 3 \quad m > 0 \text{ に注意してこれを解くと}\quad \boldsymbol{m > \frac{3}{4}}$$

(3) l_2 は点 $\mathrm{A}(5,\ 3)$ を通り，l_1 に垂直な直線であるから，l_2 の方程式は

$$y - 3 = -\frac{1}{m}(x - 5) \quad \text{すなわち} \quad x + my - 3m - 5 = 0$$

l_2 と x 軸との共有点の座標は，これに $y = 0$ を代入して　$x = 3m + 5$

ゆえに，点 R の座標は　$(3m + 5,\ 0)$

よって，線分 QR の中点 S の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{3m + 5}{2},\ \frac{3}{2}\right)}$

(4) $\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$ より，C_2 は線分 QR を直径とする円であるから，その中心は S である．d は AS 間の距離であるから

$$d^2=\mathrm{AS}^2=\left(\frac{3m+5}{2}-5\right)^2+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2=\left(\frac{3m-5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

よって　$\boldsymbol{m=\frac{5}{3}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})=\boldsymbol{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}}$

(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{5}{6}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\cdot2\cdot\frac{5}{6}=5$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=(s-1)|\vec{a}|^2+(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2\\&=(s-1)\cdot3^2+(1-2s)\cdot5+s\cdot2^2=3s-4\end{aligned}$$

$\mathrm{OH}\perp\mathrm{AB}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから　$3s-4=0$　ゆえに　$\boldsymbol{s=\frac{4}{3}}$

(3) (1)，(2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

Q は直線 OH 上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{4k}{3}\vec{b}\qquad\cdots①$$

Q は直線 PB 上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1-t}{2}\vec{a}+t\vec{b}\qquad\cdots②$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は，1 次独立であるから，①，② より

$$-\frac{k}{3}=\frac{1-t}{2},\ \ \frac{4k}{3}=t\quad これを解いて\quad k=\frac{3}{2},\ t=2$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}}$

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int t^2 e^t\,dt = \boldsymbol{(t^2-2t+2)e^t + C}$ **(C は積分定数)**

解説 k を定数とすると

$$\int f(t)e^{kt}dt = \frac{1}{k}\left\{f(t) - \frac{f'(t)}{k} + \frac{f''(t)}{k^2} - \cdots\right\}e^{kt} + C$$

(2) (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned} F(x) &= -x + \int_0^x (xt - t^2)e^t\,dt \\ &= -x + x\int_0^x te^t\,dx - \int_0^x t^2e^t\,dt \\ &= -x + x\Big[\ (t-1)e^t\ \Big]_0^x - \Big[\ (t^2-2t+2)e^t\ \Big]_0^x \\ &= -x + x\{(x-1)e^x + 1\} - \big\{(x^2-2x+2)e^x - 2\big\} \\ &= (x-2)e^x + 2 \end{aligned}$$

$F(x)$ を微分すると，$F'(x) = (x-1)e^x$

ゆえに，$F(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$	0	$\searrow$	$-e+2$	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x=1}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-e+2}$

$\boxed{5}$ (1) 正の偶数 $2j$ が $2j$ 個並んでいる数列を第 j 群とすると，第 j 群の最後の項の項数は

$$\sum_{i=1}^{j} 2i = 2\cdot\frac{1}{2}j(j+1) = j(j+1)$$

ゆえに，$t-1$ 群の最後の項の項数は $(t \geqq 2)$ $\quad (t-1)\{(t-1)+1\} = t^2 - t$

よって，$2t$ が初めて現れるのは　第 t^2-t+1 項

これは，$t=1$ のときも成り立つから　**第 $\boldsymbol{t^2-t+1}$ 項**

(2) 第 9 群の最後の項の項数は　$9(9+1) = 90$

第 10 群の最後の項の項数は　$10(10+1) = 110$

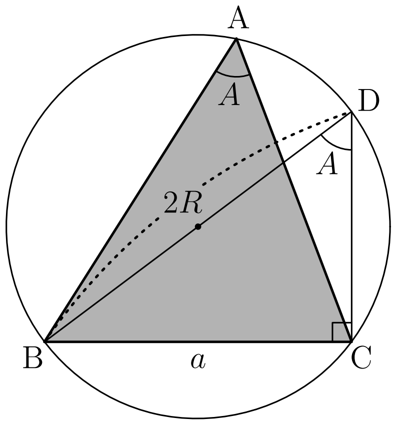
よって，a_{100} は第 10 群にあるので　$a_{100} = 2\cdot 10 = \mathbf{20}$

(3) 第 j 群にある項の和は　$2j \times 2j = 4j^2$

第 10 群の最初の項の項数は　$10^2 - 10 + 1 = 91$

よって，求める和は　$\displaystyle\sum_{j=1}^{9} 4j^2 + 10\times 20 = 4\times\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19 + 200 = \mathbf{1340}$

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) 右の図で，△ABC の外接円の半径を R とし，
線分 BD は△ABC の直径とする．
このとき，円周角と中心角の性質により，



$$\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{BAC} = A$$
$$\angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$$

が成り立つ．また，$\mathrm{BD} = 2R$ である．
よって，△BCD において

$$a = 2R\sin A$$

が成り立つ．

$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと，同様に

$$b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$$

が成り立つ．よって，次の正弦定理を得る．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(2) $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_it - y_i)^2$ とおくと

$$f(t) = t^2\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \sum_{i=1}^{n}{y_i}^2$$

$f(t) \geqq 0$ であるから，方程式 $f(t) = 0$ の判別式を D とすると

$$D/4 = \left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2 \leqq 0$$

よって $$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2}$$

$\boxed{7}$ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c, \quad f''(x)=6ax+2b, \qquad f'''(x)=6a$$

$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{b}{3a}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+a(x-p)^3 \\ &= f(p)+f'(p)(x-p)+a(x-p)^3 \end{aligned}$$

このとき $$\begin{aligned} f(p+k) &= f(p)+f'(p)k+ak^3 \\ f(p-k) &= f(p)-f'(p)k-ak^3 \end{aligned}$$

任意の実数 k について 2 点 $(p+k,\ f(p+k))$，$(p-k,\ f(p-k))$ の中点が $(p,\ f(p))$ であるから，3 次関数 $y=f(x)$ は，グラフ上の点 $(p,\ f(p))$ に関して対称である．

補足 上の関数 $f(x)$ について，$f'''(x)=6a$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p)+\int_p^x f'(t)\,dt = f(p)-\int_p^x (x-t)'f'(t)\,dt \\ &= f(p)-\Big[\ (x-t)f'(t)\ \Big]_p^x+\int_p^x (x-t)f''(t)\,dt \\ &= f(p)+(x-p)f'(p)-\frac{1}{2!}\int_p^x \{(x-t)^2\}'f''(t)\,dt \\ &= f(p)+(x-p)f'(p)-\frac{1}{2!}\Big[(x-t)^2f''(t)\Big]_p^x+\frac{1}{2!}\int_p^x (x-t)^2f'''(t)\,dt \\ &= f(p)+(x-p)f'(p)+\frac{1}{2!}(x-p)^2f''(p)+\frac{1}{2!}\int_p^x 6a(x-t)^2\,dt \\ &= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+a(x-p)^3 \end{aligned}$$

同様に，4 次関数 $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ について

$$g(x)=g(p)+g'(p)(x-p)+\frac{g''(p)}{2!}(x-p)^2+\frac{g'''(p)}{3!}(x-p)^3+a(x-p)^4$$

が成り立つ．

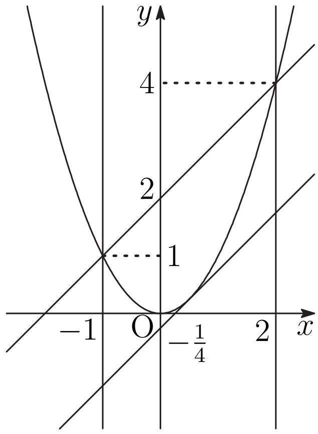
$\boxed{8}$ 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k$，$x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする．放物線 $y=x^2$ と，直線 $x=-1$，$x=2$ は，それぞれ $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ で交わり，直線 $y=x+k$ は，$k=2$ のとき，これらの 2 点を通る．また，放物線 $y=x^2 \cdots$ ① と直線 $y=x+k \cdots$ ② の方程式から y を消去して

$$x^2=x+k \quad \text{ゆえに} \quad x^2-x-k=0 \quad \cdots(*)$$

放物線 ① と直線 ② が接するとき

$$D=(-1)^2-4\cdot1(-k)=0 \quad \text{すなわち} \quad k=-\frac{1}{4}$$

右の図から



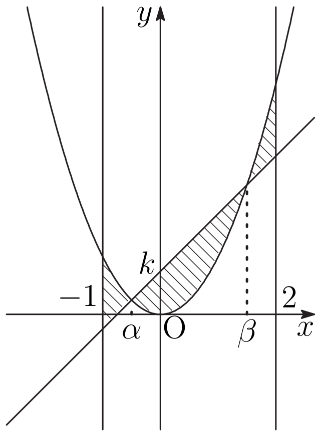
$$S(2)=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$
$$S\left(-\frac{1}{4}\right)=3\left\{2-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}-S(2)=\frac{9}{4}$$

$k>2$ のとき　　$S(k)=S(2)+3(k-2)$

$k<-\dfrac{1}{4}$ のとき　$S(k)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)+3\left(-\dfrac{1}{4}-k\right)$

したがって，$S(k)$ の最小値は，$-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq 2$ において調べればよい．このとき，放物線 ① と直線 ② の共有点の x 座標を α，β $(-1\leqq\alpha\leqq\beta\leqq2)$ とすると，方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=1, \quad \alpha\beta=-k \quad \cdots(**)$$



右の図から

$$S(k)=\int_{-1}^{2}|x^2-(x+k)|dx$$

ここで，関数 x^2-x-k の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-kx$ とおくと

$$S(k)=\Big[\,F(x)\,\Big]_{-1}^{\alpha}-\Big[\,F(x)\,\Big]_{\alpha}^{\beta}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{\beta}^{2}$$
$$=-2\{F(\beta)-F(\alpha)\}+F(2)-F(-1)$$

$$F(2)-F(-1)=\left(\frac{2}{3}-2k\right)-\left(-\frac{5}{6}+k\right)=\frac{3}{2}-3k$$

$(**)$ より　　$x^2-x-k=(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{1+4k}$$

また　　$F(\beta)-F(\alpha)=\Big[\ F(x)\ \Big]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta(x^2-x-k)dx$

$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(1+4k)^{\frac{3}{2}}$$

ゆえに　　$S(k)=\frac{1}{3}(1+4k)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}-3k\quad\left(-\frac{1}{4}\leqq k\leqq 2\right)$

$S'(k)=2\sqrt{1+4k}-3$

したがって，$S(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{16}$	$\cdots$	2
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$\frac{27}{16}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$

よって　　$\boldsymbol{k=\frac{5}{16}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{27}{16}}$