# 平成 22 年度　大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
# 工・経済・教育福祉・医学部　平成 22 年 2 月 25 日

- 工学部　1　2　3　4　数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部　1　3　5　6　数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部　2　5　6　数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　7　8　9　数 I・II・III・A・B・C (80 分)

**1** $x$，$y$ が不等式 $|x-2|+|y-2| \leqq 2$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) この不等式の表す領域を図示しなさい．

(2) $x+2y$ の最大値と最小値を求めなさい．

**2** 次の問いに答えなさい．

(1) 正の整数 $n$ について $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ の展開式に，定数項が含まれるための $n$ の条件を求めなさい．

(2) $\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開式における定数項を求めなさい．

**3** 平面上に OA⊥AP，OB⊥BP を満たす四角形 OAPB がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ と表すと，

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\frac{1}{4},\quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\frac{1}{7}$$

が成立している．

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ として，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(3) △OAB と △PBA の面積比を求めなさい．

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2\sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めなさい．

**4** $0 < k < 1$ である定数 $k$ について，

$$f(x) = \cos x - k, \quad g(x) = \sin x - k \tan x$$

とおく．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で，方程式 $f(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示しなさい．

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で，方程式 $g(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示しなさい．

(3) (2) での実数解を $\alpha$ とする．定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha} g(x)\,dx$ を $k$ の式で表しなさい．

**5** 等比数列 3, 6, 12, $\cdots$ を $\{a_n\}$ とし，この数列の第 $n$ 項から第 $2n-1$ 項までの和を $T_n$ とする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい．

(2) $T_n$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$ を求めなさい．

**6** 曲線 $y = x^2$ を $C$ とする．$k > 0$ について，直線 $y = kx$ を $l_1$ とし，原点を通り直線 $l_1$ に垂直な直線を $l_2$ とする．

(1) 曲線 $C$ と直線 $l_2$ の交点の座標を求めなさい．

(2) 曲線 $C$ と直線 $l_1$ とで囲まれる部分の面積を $S_1$，曲線 $C$ と直線 $l_2$ とで囲まれる部分の面積を $S_2$ とする．$S_1$，$S_2$ をそれぞれ $k$ の式で表しなさい．

(3) $S_1 + S_2$ の最小値を求めなさい．

**7** 円周率 $\pi$ に関して次の不等式が成立することを証明せよ．

ただし，数値 $\pi = 3.141592\cdots$ を利用して直接比較する解答は 0 点とする．

$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

**8** 中心の $xyz$ 座標が $(0,\ 0,\ 1)$ で半径が 1 の球 $G$ と点 $\mathrm{P}(0, -2,\ a)$ に関して，点 P を通る直線が球 $G$ と共有点をもつとき，この直線と $xy$ 平面の交点全体が作る図形の外形を表す方程式を求めよ．また，その方程式が表す図形を実数 $a$ に関して分類せよ．

**9** 微分可能な関数 $y = f(x)$ が次の方程式を満たすとする．

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0 \qquad \text{(A)}$$

ここに $n$ は自然数，$a_i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ は実数の定数で，$a_n \neq 0$ である．また，$y^{(k)} = f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の $k$ 次導関数で $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$ とする．(A) のような方程式を第 $n$ 階微分方程式といい，(A) に対して $t$ の $n$ 次方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0 \qquad \text{(B)}$$

を (A) の特性方程式という．このとき次の問いに答えよ．

(1) 特性方程式 (B) の解が実数 $r$ であるとき，関数 $y = e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ．

(2) $n$ 次方程式 (B) が実数 $r$ を $k$ 重解(注) にもつとき，次の $t$ に関する方程式は $r$ を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ．ただし，$k = 2, 3, \cdots$ とする．

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(注) $t$ の $m$ 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t) = 0$ となるとき，$t = r$ をこの方程式の $k$ 重解と定義する．ただし，$k = 1, 2, \cdots$ とする．

(3) 実数の定数 $r$ に対して $x$ の関数を $y_i = x^i e^{rx}$ $(i = 0, 1, 2 \cdots)$ とする．
このとき，${y_j}^{(n)}$ を $x$，${y_{j-1}}^{(n-1)}$ および ${y_{j-1}}^{(n)}$ を用いて表せ．ただし，$j = 1, 2, 3, \cdots$ とする．

(4) 実数 $r$ が $n$ 次方程式 (B) の $k$ 重解であるとき $y_i = x^i e^{rx}$
$(i = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ．ただし，$k$ は自然数とする．

# 解答例

**1** (1) $|x-2|+|y-2| \leqq 2$ より　$|y-2| \leqq 2-|x-2|$　$\cdots$①

ゆえに　$0 \leqq 2-|x-2|$　これを解いて　$0 \leqq x \leqq 4$

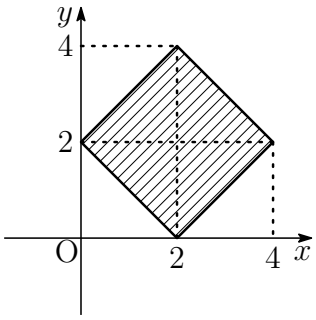
① から　$|x-2|-2 \leqq y-2 \leqq 2-|x-2|$

ゆえに　$|x-2| \leqq y \leqq 4-|x-2|$

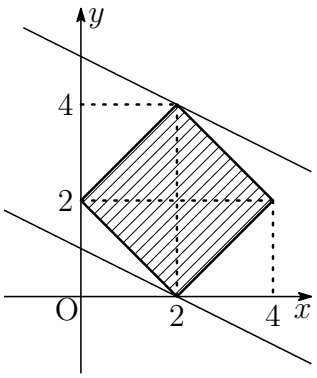
上式より　$0 \leqq x < 2$ のとき　$-x+2 \leqq y \leqq x+2$

$2 \leqq x \leqq 4$ のとき　$x-2 \leqq y \leqq -x+6$

よって，不等式の表す領域は，図の斜線部分で，境界線を含む．




(2) $x+2y=k \cdots (*)$ とおくと，これは傾きが $-\dfrac{1}{2}$，$y$ 切片が $\dfrac{k}{2}$ である直線を表す．この直線 $(*)$ が (1) で求めた領域と共有点をもつときの $k$ の値の最大値，最小値を求めればよい．右の図から，直線 $(*)$ が




$(2,\ 4)$ を通るとき $k$ は最大で　$k=10$

$(2,\ 0)$ を通るとき $k$ は最小で　$k=2$

よって　$x=2,\ y=4$ のとき，**最大値 10**，

$x=2,\ y=0$ のとき，**最小値 2**

**2** (1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ の展開式の一般項は

$$ {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = {}_n\mathrm{C}_k x^{n-2k} \quad (0 \leqq k \leqq n) $$

したがって，$n-2k=0$ より　　$\boldsymbol{n}$ **は偶数**

(2) $A=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと　$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7=(1+A)^7$

$(1+A)^7$ の展開式の一般項は

$$ {}_7\mathrm{C}_n 1^{7-n}A^n = {}_7\mathrm{C}_n A^n \quad (0 \leqq n \leqq 7) $$

$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の定数項の一般項は，上式および (1) の結果から

$$ {}_7\mathrm{C}_n \cdot {}_n\mathrm{C}_k \quad (n=2k,\ k=0,1,2,3) $$

よって，求める定数項は

$$ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{3} {}_7\mathrm{C}_{2k}\cdot{}_{2k}\mathrm{C}_k &= {}_7\mathrm{C}_0\cdot{}_0\mathrm{C}_0 + {}_7\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_4\cdot{}_4\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_6\cdot{}_6\mathrm{C}_3 \\ &= 1\times 1 + 21\times 2 + 35\times 6 + 7\times 20 \\ &= \mathbf{393} \end{aligned} $$

別解 $(A+B+C)^n$ の展開式の一般項は

$$ \frac{n!}{a!b!c!}A^aB^bC^c \quad (a+b+c=n) $$

したがって，$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開式の一般項は

$$ \frac{7!}{a!b!c}x^a 1^b\left(\frac{1}{x}\right)^c = \frac{7!}{a!b!c!}x^{a-c} \quad (a+b+c=7) $$

ゆえに，定数項は $a-c=0$ のとき，すなわち $a=c$ および $a+b+c=7$ を満たす 0 以上の整数 $a,\ b,\ c$ は

$$ (a,\ b,\ c)=(0,\ 7,\ 0),\ (1,\ 5,\ 1),\ (2,\ 3,\ 2),\ (3,\ 1,\ 3) $$

よって，求める定数項は

$$ \frac{7!}{0!7!0!}+\frac{7!}{1!5!1!}+\frac{7!}{2!3!2!}+\frac{7!}{3!1!3!}=1+42+210+140=393 $$

■

**3** (1) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\dfrac{1}{7}$ の辺々を掛けると　$\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{28}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ に注意して　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\sqrt{\dfrac{1}{28}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{14}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ ($x$, $y$ は実数) とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=x\vec{a}+(y-1)\vec{b}$$

OA⊥AP，OB⊥BP より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{a}\{(x-1)\vec{a}+y\vec{b}\}=(x-1)|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{b}\{x\vec{a}+(y-1)\vec{b}\}=x\vec{a}\cdot\vec{b}+(y-1)|\vec{b}|^2=0$$

条件から，$|\vec{a}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{b}|^2=7\vec{a}\cdot\vec{b}$ であるから

$4(x-1)+y=0,\quad x+7(y-1)=0$　これを解いて　$x=\dfrac{7}{9}$，$y=\dfrac{8}{9}$

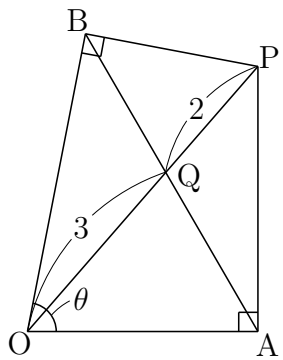
よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{9}\vec{b}}$

(3) 四角形OAPBの対角線OPとABの交点をQとすると，(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{7\vec{a}+8\vec{b}}{15}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

したがって，Qは線分OPを3 : 2に内分する．

よって　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{PBA}=3:2}$




(4) $\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OBP}=90^\circ$ であるから，四角形OAPBは，OPを直径とする円に内接する．(1) の結果から

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{28}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\theta}=\mathrm{OP}$　よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{7}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

**別解** (3) はベクトル積 (外積) を用いることもできる．

空間のベクトルとして考えると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\dfrac{2}{9}\vec{a} + \dfrac{8}{9}\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (\vec{b} - \vec{a}) \times \left(-\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}\right) = -\frac{2}{3}\vec{a} \times \vec{b} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ゆえに　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \dfrac{2}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$　よって　$\triangle\mathrm{PBA} = \dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{OAB}$

ベクトル積 (外積)[1] は，高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．

ベクトル積の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

また，これに $\vec{b} = \vec{a}$ を代入すると　$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ ■

**4** (1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ は単調減少で，$0 < k < 1$ より

$$f(0) = 1 - k > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -k < 0$$

よって，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で，方程式 $f(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつ．

(2)
$$g(x) = \sin x - k\tan x = \tan x(\cos x - k) = f(x)\tan x$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\tan x > 0$ であるから，上式より $g(x) = 0$ の解は $f(x) = 0$ の解と同一である．

よって，$g(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつ．

(3) (2) の実数解 $\alpha$ は，$f(x) = 0$ の解であるから，$f(\alpha) = 0$ より

$$\cos\alpha - k = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \cos\alpha$$

よって
$$\begin{aligned}\int_0^\alpha g(x)\,dx &= \int_0^\alpha (\sin x - k\tan x)\,dx \\ &= \Big[\ -\cos x + k\log\cos x\ \Big]_0^\alpha \\ &= -\cos\alpha + 1 + k\log\cos\alpha \\ &= \boldsymbol{-k + k\log k + 1}\end{aligned}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

**5** (1) 数列 $\{a_n\}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列であるから　$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}$

(2) (1) の結果から　$a_{2n-1} = 3 \cdot 2^{(2n-1)-1} = 3 \cdot 2^{2n-2}$

よって　$T_n = \dfrac{2 \times 3 \cdot 2^{2n-2} - 3 \cdot 2^{n-1}}{2-1} = \boldsymbol{3(2^{2n-1} - 2^{n-1})}$

**解説** 初項 $a$，公比 $r$，末項 $l$ の等比数列の和 $S$ は　$\boldsymbol{S = \dfrac{rl - a}{r-1}}$

(証明) 末項 $l$ が第 $n$ 項とすると，$l = ar^{n-1}$ であるから

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{r \cdot ar^{n-1} - a}{r-1} = \frac{rl - a}{r-1}$$

(3) (2) の結果から　$T_n = 6 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} T_k &= 6 \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} - 3 \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \\ &= 6 \times \frac{4^n - 1}{4-1} - 3 \times \frac{2^n - 1}{2-1} \\ &= 2(4^n - 1) - 3(2^n - 1) = \boldsymbol{2 \cdot 4^n - 3 \cdot 2^n + 1} \end{aligned}$$

■

**6** (1) $l_1 : y = kx$ に垂直な直線 $l_2$ の傾きは　$-\dfrac{1}{k}$

$l_2$ は，原点を通る直線であるから　$l_2 : y = -\dfrac{1}{k}x$

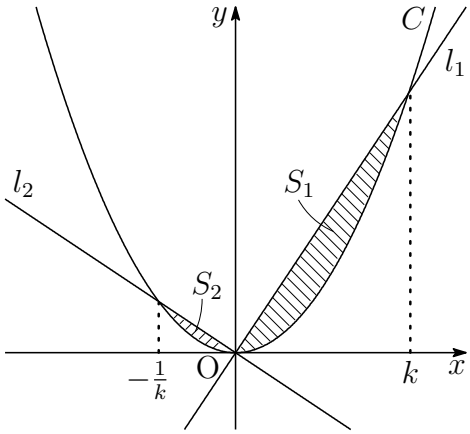
$C$ と $l_2$ の交点の座標は

連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\dfrac{1}{k}x \end{cases}$ を解いて　$\boldsymbol{(0,\ 0)}$，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k^2}\right)}$

(2) $C$ と $l_1$ の共有点の $x$ 座標は，$y = x^2$ と $y = kx$ から $y$ を消去して

$x^2 = kx$　これ解いて　$x = 0,\ k$

したがって，右の図から




$$S_1 = \int_0^k \left(kx - x^2\right) dx$$
$$= \left[\frac{kx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^k = \boldsymbol{\frac{k^3}{6}}$$
$$S_2 = \int_{-\frac{1}{k}}^0 \left(-\frac{1}{k}x - x^2\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2k} - \frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{k}}^0 = \boldsymbol{\frac{1}{6k^3}}$$

**別解** 公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いると

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^k (kx-x^2)dx = -\int_0^k x(x-k)dx \\
&= -\left(-\frac{1}{6}\right)(k-0)^3 = \frac{k^3}{6} \\
S_2 &= \int_{-\frac{1}{k}}^0 \left(-\frac{1}{k}x - x^2\right)dx = -\int_{-\frac{1}{k}}^0 x\left(x+\frac{1}{k}\right)dx \\
&= -\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{0-\left(-\frac{1}{k}\right)\right\}^3 = \frac{1}{6k^3}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$S_1 + S_2 = \dfrac{1}{6}\left(k^3 + \dfrac{1}{k^3}\right)$　$\cdots$①

$k>0$ より，$k^3>0$，$\dfrac{1}{k^3}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

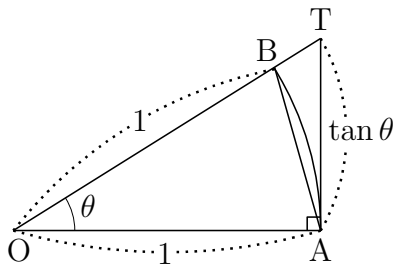
$$k^3 + \frac{1}{k^3} \geqq 2\sqrt{k^3 \cdot \frac{1}{k^3}} = 2 \quad \ldots ②$$

①，② より　$S_1 + S_2 \geqq \dfrac{1}{3}$

上式において，等号が成り立つのは，② より $k^3 = \dfrac{1}{k^3}$，すなわち，$k=1$ のときである．

よって，$k=1$ のとき，$S_1+S_2$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ をとる．　■

**7** 右の図のように，半径が 1，中心角が $\theta$ の扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると，面積について




$$\triangle\mathrm{OAB} < \text{扇形 OAB} < \triangle\mathrm{OAT}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta \quad \text{すなわち} \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ とすると，加法定理により

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって $\quad \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} < \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} < 2 - \sqrt{3}$

$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

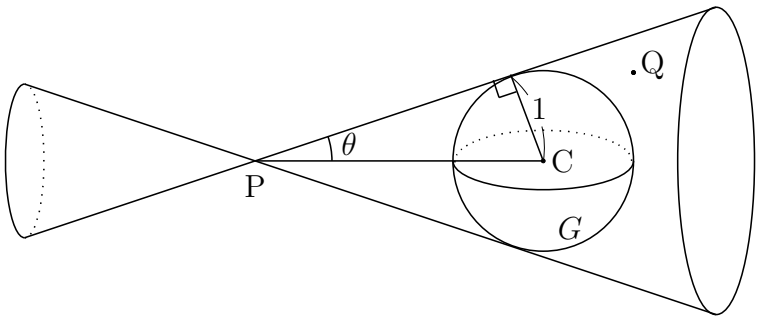
■

**8** $G$ に接する $\mathrm{P}(0, -2,\ a)$ を頂点とする円錐面上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とする．

$G$ の中心 $(0,\ 0,\ 1)$ を C とおくと　　$\mathrm{PC} = \sqrt{2^2 + (1-a)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 5}$

円錐面と直線 PC のなす角を $\theta$ とすると　$\sin\theta = \dfrac{1}{\mathrm{PC}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 5}}$

したがって　　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \dfrac{a^2 - 2a + 4}{a^2 - 2a + 5}$




$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (0,\ 2,\ 1-a)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (x,\ y+2,\ z-a)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 2(y+2) + (1-a)(z-a)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 = 2^2 + (1-a)^2 = a^2 - 2a + 5$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = x^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の角は，$\theta$ または $\pi - \theta$ であるから

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\cos^2\theta$$

また，上式に上の諸式および $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\cos^2\theta = a^2 - 2a + 4$ を代入すると

$$\{2(y+2) + (1-a)(z-a)\}^2 = (a^2 - 2a + 4)\{x^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2\}$$

これを整理することにより，次の円錐面の方程式を得る．

$$(a^2 - 2a + 4)x^2 + (a^2 - 2a)(y+2)^2 + 3(z-a)^2 - 4(1-a)(y+2)(z-a) = 0 \quad \cdots(*)$$

$xy$ 平面による円錐面 $(*)$ の切り口を表す図形は，$z=0$ を代入することにより

$$(a^2-2a+4)x^2+a(a-2)(y+2)^2+4a(1-a)(y+2)+3a^2=0 \quad \cdots(**)$$

$a(a-2)\neq 0$，すなわち，$a\neq 0,\ 2$ のとき，$(**)$ より

$$(a^2-2a+4)x^2+a(a-2)\left\{y+2+\frac{2(1-a)}{a-2}\right\}^2=\frac{a(a^2-2a+4)}{a-2}$$

$$(a^2-2a+4)x^2+a(a-2)\left(y-\frac{2}{a-2}\right)^2=\frac{a(a^2-2a+4)}{a-2} \quad \cdots(***)$$

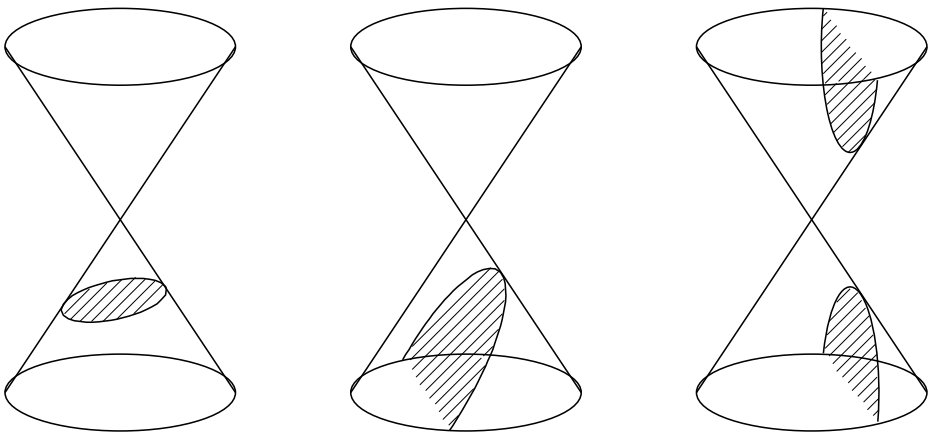
$a^2-2a+4=(a-1)^2+3>0$ であるから，$a(a-2)$ と $\dfrac{a(a^2-2a+4)}{a-2}$ は同符号．

したがって，$(**)$，$(***)$ から

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=0} \text{ のとき} & \text{直線 } (\boldsymbol{x=0}) \\ \boldsymbol{a=2} \text{ のとき} & \text{放物線} \left(\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{a<0,\ 2<a} \text{ のとき} & \text{楕円} \\ \boldsymbol{0<a<2} \text{ のとき} & \text{双曲線} \end{cases}$$

**解説** 2 次曲線は，平面 (問題では $xy$ 平面) による円錐面の切り口としても現れる．そのため，これらの曲線を円錐曲線ともいう．

放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は 1 点に退化するので，本題の $(***)$ では円錐曲線が退化していないことを確認している．



楕円　　放物線　　双曲線

■

**9** (1) 実数 $r$ は特性方程式 (B) の解であるから

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

両辺に $e^{rx}$ を掛けると

$$\begin{aligned} a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} &= 0 \\ a_n (e^{rx})^{(n)} + a_{n-1} (e^{rx})^{(n-1)} + \cdots + a_1 (e^{rx})^{(1)} + a_0 e^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

よって，関数 $y = e^{rx}$ は方程式 (A) を満たす．

(2) $n$ 次方程式 (B) が実数 $r$ を $k$ 重解にもつから，$n-k$ 次多項式 $Q(t)$ を用いて

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = (t-r)^k Q(t) \quad \cdots (*)$$

とおける．この両辺を $t$ で微分すると

$$\begin{aligned} n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 \\ &= k(t-r)^{k-1} Q(t) + (t-r)^k Q'(t) \\ &= (t-r)^{k-1} \{ k Q(t) + (t-r) Q'(t) \} \end{aligned}$$

よって，次の方程式は，$r$ を $k-1$ 重解にもつ．

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(3) $y_j = x^j e^{rx}$ より，$y_j = x y_{j-1}$ であるから，ライプニッツの公式を用いて微分すると

$$\begin{aligned} y_j^{(n)} = (x y_j)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} \\ &= \sum_{k=n-1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} = \boldsymbol{n {y_{j-1}}^{(n-1)} + x {y_{j-1}}^{(n)}} \end{aligned}$$

**解説** ライプニッツの公式 [2]

$$\{ f(x) g(x) \}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

証明は，数学的帰納法により示すことができる．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2020.pdf $\boxed{6}$ を参照．

(4) $(*)$ の $Q(t)$ を，定数 $b_i(i=0,1,2,\cdots,n-k)$ を用いて $(b_{n-k}=a_n)$

$$Q(t)=\sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i$$

とおくと，$(*)$ から

$$\begin{aligned} a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 =& (t-r)^k Q(t) \\ =& \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j t^{k-j}(-r)^j \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i \\ =& \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j t^{k+i-j} \end{aligned}$$

上式から

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k+i-j)}$$

ここで $z=\displaystyle\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j(-r)^j y^{(k-j)}$ とおくと

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i z^{(i)}$$

このとき，微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \cdots (**)$$

は，次のようになる．

$$b_0 z + b_1 z' + b_2 z'' + \cdots + b_{n-k} z^{(n-k)} = 0$$

したがって，$z=0$ は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つであるから

$$\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j(-r)^j y^{(k-j)} = 0$$

$$e^{-rx}\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j(-r)^j y^{(k-j)} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j y^{(k-j)}(e^{-rx})^{(j)} = 0$$

ゆえに，ライプニッツの公式により

$$(ye^{-rx})^{(k)} = 0$$

上式の両辺を $k$ 回積分すると，右辺は $x$ の $k-1$ 次式になるので

$$ye^{-rx} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1}$$

となる ($c_j$は定数 $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$).
したがって，次式は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つである.

$$y = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$$

よって，$x^je^{rx}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ は，$(**)$ をみたす.

# 解説

**例 1** 微分方程式 $y' - \alpha y = 0$ を解け $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

**解答** 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると　$ye^{-\alpha x} = C$　よって　$y = Ce^{\alpha x}$　($C$ は定数)

**例 2** $\alpha \neq \beta$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とするとき，次の微分方程式を解け.

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

**解答** 与式から　$(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)'e^{-\alpha x} + (y' - \beta)(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

これを積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x} \quad (A_1\text{は定数})$$

となる．同様にして　　$y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x}$　($A_2$は定数)

よって，上の 2 式から，$y'$ を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

**例 3** 例 2 において，$\beta = \alpha$ とした，次の微分方程式を解け.

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

**解答** 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha})'' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})^{(2)} = 0$$

これを 2 回積分すると

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

**例 4** $\alpha \neq \beta$，$\beta \neq \gamma$，$\gamma \neq \alpha$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ とするとき，次の微分方程式を解け.

$$y''' - (\alpha+\beta+\gamma)y'' + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)y' - \alpha\beta\gamma y = 0$$

**解答** 与式から

$$\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}' - \alpha\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\} = 0$$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}'e^{-\alpha x} + \{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}(e^{-\alpha x})' &= 0\\ [\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x}]' &= 0\end{aligned}$$

これを積分すると

$$\begin{aligned}\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x} &= A_1\\ y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y &= A_1e^{\alpha x} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}y'' - (\gamma+\alpha)y' + \gamma\alpha y &= A_2e^{\beta x} \qquad \cdots ②\\ y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y &= A_3e^{\gamma x} \qquad \cdots ③\end{aligned}$$

① − ② より　　$(\alpha-\beta)(y' - \gamma y) = A_1e^{\alpha x} - A_2e^{\beta x}$

② − ③ より　　$(\beta-\gamma)(y' - \alpha y) = A_2e^{\beta x} - A_2e^{\gamma x}$

上の 2 式から，$y'$ を消去すると

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x} + C_3e^{\gamma x} \quad (C_1,\ C_2,\ C_3\text{は定数})$$

**例 5** 例 4 において，$\gamma = \alpha$ とした，次の微分方程式を解け.

$$y''' - (2\alpha + \beta)y'' + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)y' - \alpha^2\beta y = 0$$

**解答** 与式から

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)' - \beta(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y) = 0$$

両辺に $e^{-\beta x}$ を掛けると

$$\begin{aligned}(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)'e^{-\beta x} + (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)(e^{-\beta x})' &= 0 \\ \{(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x}\}' &= 0\end{aligned}$$

これを積分すると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x} = A_1$$

両辺に $e^{(\beta-\alpha)x}$ を掛けると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

ここで，上式の左辺は

$$\begin{aligned}(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} &= y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha})'' \\ &= (ye^{-\alpha x})^{(2)}\end{aligned}$$

となる．したがって

$$(ye^{-\alpha x})^{(2)} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

これを，$x$ について 2 回積分すると，改めて定数 $C_1$，$C_2$，$C_3$ を用いて

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 + C_3 e^{(\beta-\alpha)x} \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} + C_3 e^{\beta x}$$

**例 6** 例 4 において，$\alpha = \beta = \gamma$ とした，次の微分方程式を解け.

$$y''' - 3\alpha y'' + 3\alpha^2 y' - \alpha^3 y = 0$$

**解答** 与式の両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned}y'''e^{-\alpha x} + 3y''(e^{-\alpha x})' + 3y'(e^{-\alpha x})'' + y(e^{-\alpha x})''' &= 0 \\ (ye^{-\alpha x})^{(3)} &= 0\end{aligned}$$

これを $x$ について 3 回積分すると　$ye^{-\alpha x} = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

よって　　$y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)e^{\alpha x}$　　($C_1$, $C_2$, $C_3$は定数)

**例 7** 放射性同位体の原子数は，時間の経過により (原子の崩壊)，その原子数は減少する．原子数 $N$ は時刻 $t$ の減少関数で，その変化率は $\dfrac{dN}{dt} < 0$ で，$N$ に比例し

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \cdots (*)$$

であることが分かっている (崩壊定数 $\lambda$ は物質の種類による固有の定数).

$N' = \dfrac{dN}{dt}$ とおくと　　$N' + \lambda N = 0$

例 1 の結果を利用してこれを解くと　　$N = Ce^{-\lambda t}$

ここで，初期条件 $t = 0$ のとき $N = N_0$ とすると，$C = N_0$ より

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \cdots ①$$

さらに，$t = T$ ($T$ は半減期) のとき $N = \dfrac{1}{2}N_0$ とすると

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \quad \cdots ②$$

①，② から　　$N = N_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

崩壊定数 $\lambda$ は，$(*)$ により個体数 $N$ と単位時間当たり (1 秒間) の崩壊数を観測することで求めることができる．したがって，半減期 $T$ は ② から

$$T = \frac{\log 2}{\lambda}$$

**例 8** ばね定数 $k$[N/m] のばねの一端が固定され，他端に質量 $m$[kg] のおもりが付けられ，なめらかな水平面を運動している．自然長の位置を原点 O とし，ばねが伸びる向きを変位 $x$[m] の正の向きとし，おもりの加速度を $a$[m/s$^2$] とすると，次式が成り立つ．

$$ma = -kx$$

このとき，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より，$a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる，このとき特性方程式の解が $\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であるから，例 2 の結果から

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

を得る．初期条件を $t = 0$ のとき，$x = A$，$v = \dfrac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$C_1 + C_2 = A,\quad C_1 - C_2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

したがって　　$x = \dfrac{A}{2}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)$

上式にオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を代入すると [3]

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

この単振動の周期を $T$[s] とすると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

を得る．具体的な線形微分方程式については，以下に紹介している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/diff_eq.pdf

■

[3] 証明は http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf を参照．