

平成 22 年度 大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工・経済・教育福祉・医学部 平成 22 年 2 月 25 日

- 工学部は, [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部は, [1], [3], [5], [6] 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は, [2], [5], [6] 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は, [7] ~ [9] 数 I・II・III・A・B・C (80 分)

[1] x, y が不等式 $|x - 2| + |y - 2| \leq 2$ を満たすとき, 次の問いに答えよ.

- (1) この不等式の表す領域を図示しなさい.
- (2) $x + 2y$ の最大値と最小値を求めなさい.

[2] 次の問いに答えなさい.

- (1) 正の整数 n について $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ の展開式に, 定数項が含まれるための n の条件を求めなさい.
- (2) $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^7$ の展開式における定数項を求めなさい.

[3] 平面上に $OA \perp AP$, $OB \perp BP$ を満たす四角形 OAPB がある. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ と表すと,

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \frac{1}{7}$$

が成立している.

- (1) $\angle AOB = \theta$ として, $\cos \theta$ の値を求めなさい.
- (2) \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表しなさい.
- (3) $\triangle OAB$ と $\triangle PBA$ の面積比を求めなさい.
- (4) $|\overrightarrow{OP}| = 2\sqrt{7}$ のとき, $|\overrightarrow{AB}|$ を求めなさい.

4 $0 < k < 1$ である定数 k について,

$$f(x) = \cos x - k, \quad g(x) = \sin x - k \tan x$$

とおく.

- (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で, 方程式 $f(x) = 0$ は, ただ1つの実数解をもつことを示しなさい.
- (2) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で, 方程式 $g(x) = 0$ は, ただ1つの実数解をもつことを示しなさい.
- (3) (2) での実数解を α とする. 定積分 $\int_0^\alpha g(x) dx$ を k の式で表しなさい.

5 等比数列 $3, 6, 12, \dots$ を $\{a_n\}$ とし, この数列の第 n 項から第 $2n - 1$ 項までの和を T_n とする.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい.
- (2) T_n を求めなさい.
- (3) $\sum_{k=1}^n T_k$ を求めなさい.

6 曲線 $y = x^2$ を C とする. $k > 0$ について, 直線 $y = kx$ を l_1 とし, 原点を通り直線 l_1 に垂直な直線を l_2 とする.

- (1) 曲線 C と直線 l_2 の交点の座標を求めなさい.
- (2) 曲線 C と直線 l_1 とで囲まれる部分の面積を S_1 , 曲線 C と直線 l_2 とで囲まれる部分の面積を S_2 とする. S_1, S_2 をそれぞれ k の式で表しなさい.
- (3) $S_1 + S_2$ の最小値を求めなさい.

7 円周率 π に関して次の不等式が成立することを証明せよ.

ただし, 数値 $\pi = 3.141592\dots$ を利用して直接比較する解答は0点とする.

$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

8 中心の xyz 座標が $(0, 0, 1)$ で半径が1の球 G と点 $P(0, -2, a)$ に関して, 点 P を通る直線が球 G と共有点をもつとき, この直線と xy 平面の交点全体が作る図形の外形を表す方程式を求めよ. また, その方程式が表す図形を実数 a に関して分類せよ.

9 微分可能な関数 $y = f(x)$ が次の方程式を満たすとする.

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0 \quad (\text{A})$$

ここに n は自然数, a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) は実数の定数で, $a_n \neq 0$ である. また, $y^{(k)} = f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 次導関数で $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$ とする. (A) のような方程式を第 n 階微分方程式といい, (A) に対して t の n 次方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0 \quad (\text{B})$$

を (A) の特性方程式という. このとき次の問いに答えよ.

- (1) 特性方程式 (B) の解が実数 r であるとき, 関数 $y = e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ.
- (2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解^(注) にもつとき, 次の t に関する方程式は r を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ. ただし, $k = 2, 3, \dots$ とする.

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2 a_2 t + a_1 = 0$$

(注) t の m 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t) = 0$ となるとき, $t = r$ をこの方程式の k 重解と定義する. ただし, $k = 1, 2, \dots$ とする.

- (3) 実数の定数 r に対して x の関数を $y_i = x^i e^{rx}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) とする. このとき, $y_j^{(n)}$ を x , $y_{j-1}^{(n-1)}$ および $y_{j-1}^{(n)}$ を用いて表せ. ただし, $j = 1, 2, 3, \dots$ とする.
- (4) 実数 r が n 次方程式 (B) の k 重解であるとき $y_i = x^i e^{rx}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k-1$) が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ. ただし, k は自然数である.

正解

1 (1) $|x-2| + |y-2| \leq 2$ より $|y-2| \leq 2 - |x-2| \dots \textcircled{1}$

ゆえに $0 \leq 2 - |x-2|$ これを解いて $0 \leq x \leq 4$

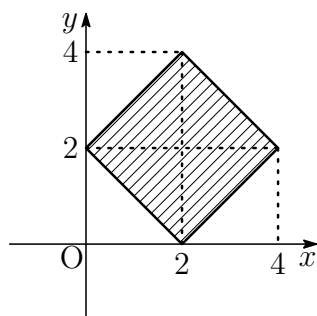
$\textcircled{1}$ から $|x-2| - 2 \leq y-2 \leq 2 - |x-2|$

ゆえに $|x-2| \leq y \leq 4 - |x-2|$

上式より $0 \leq x < 2$ のとき $-x+2 \leq y \leq x+2$

$2 \leq x \leq 4$ のとき $x-2 \leq y \leq -x+6$

よって、不等式の表す領域は、図の斜線部分で、境界線を含む。



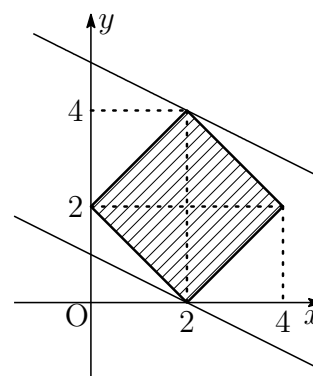
- (2) $x + 2y = k \dots (*)$ とおくと、これは傾きが $-\frac{1}{2}$, y 切片が $\frac{k}{2}$ である直線を表す。この直線 (*) が (1) で求めた領域と共有点をもつときの k の値の最大値, 最小値を求めればよい。右の図から、直線 (*) が

(2, 4) を通るとき k は最大で $k = 10$

(2, 0) を通るとき k は最小で $k = 2$

よって $x = 2, y = 4$ のとき, 最大値 10,

$x = 2, y = 0$ のとき, 最小値 2



2 (1) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ の展開式の一般項は

$${}_nC_k x^{n-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = {}_nC_k x^{n-2k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

したがって、 $n - 2k = 0$ より n は偶数

(2) $A = x + \frac{1}{x}$ とおくと $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^7 = (1 + A)^7$

$(1 + A)^7$ の展開式の一般項は

$${}_7C_n 1^{7-n} A^n = {}_7C_n A^n \quad (0 \leq n \leq 7)$$

$\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^7$ の定数項の一般項は、上式および(1)の結果から

$${}_7C_n \cdot {}_nC_k \quad (n = 2k, k = 0, 1, 2, 3)$$

よって、求める定数項は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 {}_7C_{2k} \cdot {}_nC_k &= {}_7C_0 \cdot {}_0C_0 + {}_7C_2 \cdot {}_2C_1 + {}_7C_4 \cdot {}_4C_2 + {}_7C_6 \cdot {}_6C_3 \\ &= 1 \times 1 + 21 \times 2 + 35 \times 6 + 7 \times 20 \\ &= \mathbf{393} \end{aligned}$$

別解 $(A + B + C)^n$ の展開式の一般項は

$$\frac{n!}{a!b!c!} A^a B^b C^c \quad (a + b + c = n)$$

したがって、 $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^7$ の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{a!b!c} x^a 1^b \left(\frac{1}{x}\right)^c = \frac{7!}{a!b!c!} x^{a-c} \quad (a + b + c = 7)$$

ゆえに、定数項は $a - c = 0$ のとき、すなわち $a = c$ および $a + b + c = 7$ を満たす 0 以上の整数 a, b, c は

$$(a, b, c) = (0, 7, 0), (1, 5, 1), (2, 3, 2), (3, 1, 3)$$

よって、求める定数項は

$$\frac{7!}{0!7!0!} + \frac{7!}{1!5!1!} + \frac{7!}{2!3!2!} + \frac{7!}{3!1!3!} = 1 + 42 + 210 + 140 = 393$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \frac{1}{7} \text{ の辺々を掛けると } \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2} = \frac{1}{28}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{ に注意して } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \sqrt{\frac{1}{28}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

(2) $\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (x, y は実数) とすると

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = (x-1)\vec{a} + y\vec{b}$$

$$\vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB} = x\vec{a} + (y-1)\vec{b}$$

$OA \perp AP$, $OB \perp BP$ より, $\vec{OA} \cdot \vec{AP} = 0$, $\vec{OB} \cdot \vec{BP} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{AP} &= \vec{a} \{ (x-1)\vec{a} + y\vec{b} \} & \vec{OB} \cdot \vec{BP} &= \vec{b} \{ x\vec{a} + (y-1)\vec{b} \} \\ &= (x-1)|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 & &= x\vec{a} \cdot \vec{b} + (y-1)|\vec{b}|^2 = 0 \end{aligned}$$

条件から, $|\vec{a}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{b}|^2 = 7\vec{a} \cdot \vec{b}$ であるから

$$4(x-1) + y = 0, \quad x + 7(y-1) = 0 \quad \text{これを解いて } x = \frac{7}{9}, \quad y = \frac{8}{9}$$

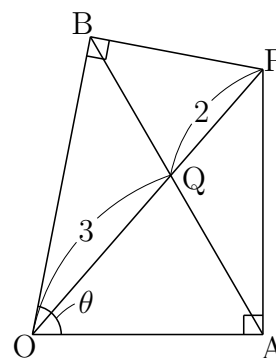
$$\text{よって } \vec{OP} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}$$

(3) 四角形 OAPB の対角線 OP と AB の交点を Q とすると, (2) の結果から

$$\vec{OP} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7\vec{a} + 8\vec{b}}{15} = \frac{5}{3} \vec{OQ}$$

したがって, Q は線分 OP を 3 : 2 に内分する.

$$\text{よって } \triangle OAB : \triangle PBA = 3 : 2$$



(4) $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ であるから, 四角形 OAPB は, OP を直径とする円に内接する. (1) の結果から

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{28}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{正弦定理により } \frac{AB}{\sin \theta} = OP \quad \text{よって } |\vec{AB}| = 2\sqrt{7} \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = 3\sqrt{3}$$

別解 (3) はベクトル積 (外積) を用いることもできる.

空間のベクトルとして考えると, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (\vec{b} - \vec{a}) \times \left(-\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b} \right) = -\frac{2}{3}\vec{a} \times \vec{b} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$$

ゆえに $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|$ よって $\triangle PBA = \frac{2}{3}\triangle OAB$

ベクトル積 (外積)¹ は, 高校数学の範囲外であるから, 2次試験では使えないが, センター試験では, 非常に有効な計算法である.

ベクトル積の演算について, 次式が成り立つことに注意したい.

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

また, これに $\vec{b} = \vec{a}$ を代入すると $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

4 (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, $f(x)$ は単調減少で, $0 < k < 1$ より

$$f(0) = 1 - k > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -k < 0$$

よって, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で, 方程式 $f(x) = 0$ は, ただ1つの実数解をもつ.

(2) $g(x) = \sin x - k \tan x = \tan x(\cos x - k) = f(x) \tan x$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, $\tan x > 0$ であるから, 上式より $g(x) = 0$ の解は $f(x) = 0$ の解と同一である.

よって, $g(x) = 0$ は, ただ1つの実数解をもつ.

(3) (2) の実数解 α は, $f(x) = 0$ の解であるから, $f(\alpha) = 0$ より

$$\cos \alpha - k = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_0^\alpha g(x) dx &= \int_0^\alpha (\sin x - k \tan x) dx \\ &= \left[-\cos x + k \log \cos x \right]_0^\alpha \\ &= -\cos \alpha + 1 + k \log \cos \alpha \\ &= -k + k \log k + 1 \end{aligned}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

5 (1) 数列 $\{a_n\}$ は、初項 3、公比 2 の等比数列であるから $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

(2) (1) の結果から $a_{2n-1} = 3 \cdot 2^{(2n-1)-1} = 3 \cdot 2^{2n-2}$

$$\text{よって } T_n = \frac{2 \times 3 \cdot 2^{2n-2} - 3 \cdot 2^{n-1}}{2-1} = 3(2^{2n-1} - 2^{n-1})$$

解説 初項 a 、公比 r 、末項 l の等比数列の和 S は $S = \frac{rl - a}{r - 1}$

(証明) 末項 l が第 n 項とすると、 $l = ar^{n-1}$ であるから

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{r \cdot ar^{n-1} - a}{r - 1} = \frac{rl - a}{r - 1}$$

(3) (2) の結果から $T_n = 6 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{よって } \sum_{k=1}^n T_k &= 6 \sum_{k=1}^n 4^{k-1} - 3 \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \\ &= 6 \times \frac{4^n - 1}{4 - 1} - 3 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2(4^n - 1) - 3(2^n - 1) = 2 \cdot 4^n - 3 \cdot 2^n + 1 \end{aligned}$$

6 (1) $l_1: y = kx$ に垂直な直線 l_2 の傾きは $-\frac{1}{k}$

l_2 は、原点を通る直線であるから $l_2: y = -\frac{1}{k}x$

C と l_2 の交点の座標は

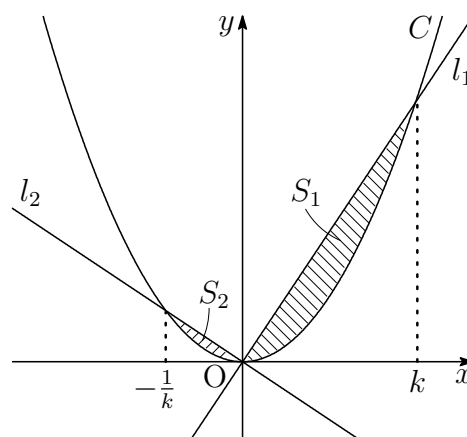
$$\text{連立方程式 } \begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases} \text{ を解いて } (0, 0), \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$$

(2) C と l_1 の共有点の x 座標は、 $y = x^2$ と $y = kx$ から y を消去して

$$x^2 = kx \quad \text{これ解いて } x = 0, k$$

したがって、右の図から

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^k (kx - x^2) dx \\ &= \left[\frac{kx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^k = \frac{k^3}{6} \\ S_2 &= \int_{-\frac{1}{k}}^0 \left(-\frac{1}{k}x - x^2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2k} - \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{k}}^0 = \frac{1}{6k^3} \end{aligned}$$



別解 公式 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ を用いると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^k (kx - x^2)dx = -\int_0^k x(x - k)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(k - 0)^3 = \frac{k^3}{6} \\ S_2 &= \int_{-\frac{1}{k}}^0 \left(-\frac{1}{k}x - x^2\right)dx = -\int_{-\frac{1}{k}}^0 x\left(x + \frac{1}{k}\right)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{0 - \left(-\frac{1}{k}\right)\right\}^3 = \frac{1}{6k^3} \end{aligned}$$

(3) (2)の結果から $S_1 + S_2 = \frac{1}{6}\left(k^3 + \frac{1}{k^3}\right) \dots \textcircled{1}$

$k > 0$ より, $k^3 > 0$, $\frac{1}{k^3} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係により

$$k^3 + \frac{1}{k^3} \geq 2\sqrt{k^3 \cdot \frac{1}{k^3}} = 2 \dots \textcircled{2}$$

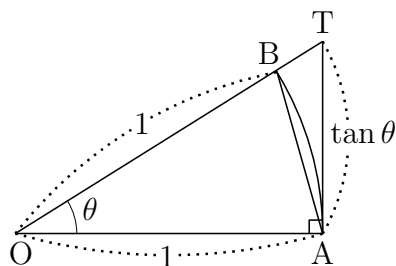
①, ②より $S_1 + S_2 \geq \frac{1}{3}$

上式において, 等号が成り立つのは, ②より $k^3 = \frac{1}{k^3}$, すなわち, $k = 1$ のときである.

よって, $k = 1$ のとき, $S_1 + S_2$ は最小値 $\frac{1}{3}$ をとる.

- 7 右の図のように、半径が1、中心角が θ の扇形OABの点Aにおける円の接線と直線OBの交点をTとすると、面積について

$$\triangle OAB < \text{扇形 OAB} < \triangle OAT$$



が成り立つから

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \theta < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \theta < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \theta \quad \text{すなわち} \quad \sin \theta < \theta < \tan \theta$$

$\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ とすると、加法定理により

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} < \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} < 2 - \sqrt{3}$

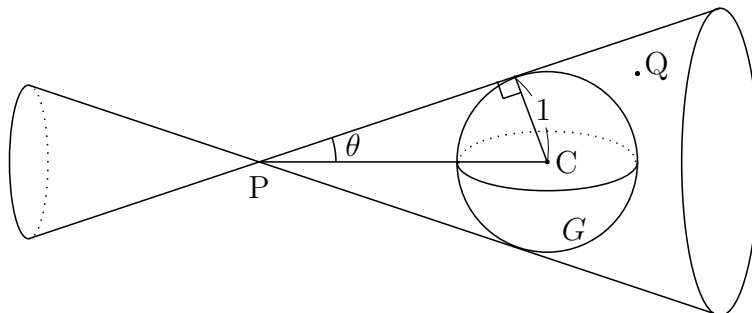
$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

8 G に接する $P(0, -2, a)$ を頂点とする円錐面上の点を $Q(x, y, z)$ とする.

G の中心 $(0, 0, 1)$ を C とおくと $PC = \sqrt{2^2 + (1-a)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 5}$

円錐面と直線 PC のなす角を θ とすると $\sin \theta = \frac{1}{PC} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 5}}$

したがって $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = \frac{a^2 - 2a + 4}{a^2 - 2a + 5}$



$\vec{PC} = (0, 2, 1-a)$, $\vec{PQ} = (x, y+2, z-a)$ より

$$\vec{PC} \cdot \vec{PQ} = 2(y+2) + (1-a)(z-a)$$

$$|\vec{PC}|^2 = 2^2 + (1-a)^2 = a^2 - 2a + 5$$

$$|\vec{PQ}|^2 = x^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2$$

\vec{PC} と \vec{PQ} の角は, θ または $\pi - \theta$ であるから

$$(\vec{PC} \cdot \vec{PQ})^2 = |\vec{PC}|^2 |\vec{PQ}|^2 \cos^2 \theta$$

また, 上式に上の諸式および $|\vec{PC}|^2 \cos^2 \theta = a^2 - 2a + 4$ を代入すると

$$\{2(y+2) + (1-a)(z-a)\}^2 = (a^2 - 2a + 4)\{x^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2\}$$

これを整理することにより, 次の円錐面の方程式を得る.

$$(a^2 - 2a + 4)x^2 + (a^2 - 2a)(y+2)^2 + 3(z-a)^2 - 4(1-a)(y+2)(z-a) = 0 \quad \dots (*)$$

xy 平面による円錐面 (*) の切り口を表す図形は, $z = 0$ を代入することにより

$$(a^2 - 2a + 4)x^2 + a(a - 2)(y + 2)^2 + 4a(1 - a)(y + 2) + 3a^2 = 0 \quad \dots (**)$$

$a(a - 2) \neq 0$, すなわち, $a \neq 0, 2$ のとき, (**) より

$$(a^2 - 2a + 4)x^2 + a(a - 2) \left\{ y + 2 + \frac{2(1 - a)}{a - 2} \right\}^2 = \frac{a(a^2 - 2a + 4)}{a - 2}$$

$$(a^2 - 2a + 4)x^2 + a(a - 2) \left(y - \frac{2}{a - 2} \right)^2 = \frac{a(a^2 - 2a + 4)}{a - 2} \quad \dots (***)$$

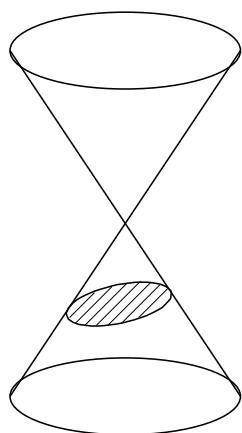
$a^2 - 2a + 4 = (a - 1)^2 + 3 > 0$ であるから, $a(a - 2)$ と $\frac{a(a^2 - 2a + 4)}{a - 2}$ は同符号.

したがって, (**), (***) から

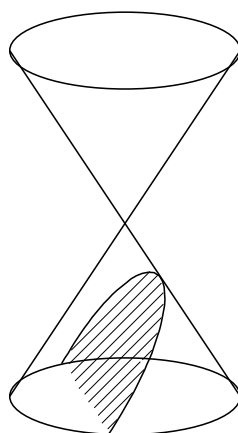
$$\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & \text{直線 } (x = 0) \\ a = 2 \text{ のとき} & \text{放物線 } \left(y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ a < 0, 2 < a \text{ のとき} & \text{楕円} \\ 0 < a < 2 \text{ のとき} & \text{双曲線} \end{cases}$$

解説 2次曲線は, 平面 (問題では xy 平面) による円錐面の切り口としても現れる. そのため, これらの曲線を円錐曲線ともいう.

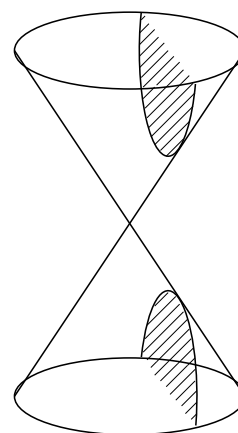
放物線となるのは, 平面が母線と平行な場合である. また, 直線となるのは, 平面が頂点を通り, 母線に平行な場合である. とくに, 平面が頂点のみを共有するとき, 円錐曲線は1点に退化するので, 本題の (***) では円錐曲線が退化していないことを確認している.



楕円



放物線



双曲線

- 9 (1) 実数 r は特性方程式 (B) の解であるから

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

両辺に e^{rx} を掛けると

$$\begin{aligned} a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} &= 0 \\ a_n (e^{rx})^{(n)} + a_{n-1} (e^{rx})^{(n-1)} + \cdots + a_1 (e^{rx})^{(1)} + a_0 e^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

よって、関数 $y = e^{rx}$ は方程式 (A) を満たす。

- (2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解にもつから、 $n-k$ 次多項式 $Q(t)$ を用いて

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = (t-r)^k Q(t) \quad \cdots (*)$$

とおける。この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2 a_2 t + a_1 &= k(t-r)^{k-1} Q(t) + (t-r)^k Q'(t) \\ &= (t-r)^{k-1} \{kQ(t) + (t-r)Q'(t)\} \end{aligned}$$

よって、次の方程式は、 r を $k-1$ 重解にもつ。

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2 a_2 t + a_1 = 0$$

- (3) $y_j = x^j e^{rx}$ より、 $y_j = x y_{j-1}$ であるから、ライプニッツの公式を用いて微分すると

$$\begin{aligned} y_j^{(n)} &= (x y_j)^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{(n-k)} y_{j-1}^{(k)} \\ &= \sum_{k=n-1}^n {}_n C_k x^{(n-k)} y_{j-1}^{(k)} = n y_{j-1}^{(n-1)} + x y_{j-1}^{(n)} \end{aligned}$$

解説 ライプニッツの公式

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

証明は、数学的帰納法により示すことができる。

(4) (*) の $Q(t)$ を, 定数 $b_i (i = 0, 1, 2, \dots, n-k)$ を用いて ($b_{n-k} = a_n$)

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i$$

とおくと, (*) から

$$\begin{aligned} a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 &= (t-r)^k Q(t) \\ &= \sum_{j=0}^k {}_k C_j t^{k-j} (-r)^j \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j t^{k+i-j} \end{aligned}$$

上式から

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j y^{(k+i-j)}$$

ここで $z = \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j y^{(k-j)}$ とおくと

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i z^{(i)}$$

このとき, 微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \dots (**)$$

は, 次のようになる.

$$b_0 z + b_1 z' + b_2 z'' + \dots + b_{n-k} z^{(n-k)} = 0$$

したがって, $z = 0$ は微分方程式 (**) の解の 1 つであるから

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j y^{(k-j)} &= 0 \\ e^{-rx} \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j y^{(k-j)} &= 0 \\ \sum_{j=0}^k {}_k C_j y^{(k-j)} (e^{-rx})^{(j)} &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに、ライプニッツの公式により

$$(ye^{-rx})^{(k)} = 0$$

上式の両辺を k 回積分すると、右辺は x の $k-1$ 次式になるので

$$ye^{-rx} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1}$$

となる (c_j は定数 ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$)).

したがって、次式は微分方程式 (**) の解の 1 つである.

$$y = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$$

よって、 x^je^{rx} ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$) は、(**) をみたす.

解説

例1 微分方程式 $y' - \alpha y = 0$ を解け $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$.

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると $ye^{-\alpha x} = C$ よって $y = Ce^{\alpha x}$ (C は定数)

例2 $\alpha \neq \beta$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とするとき, 次の微分方程式を解け.

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

解答 与式から $(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)'e^{-\alpha x} + (y' - \beta y)(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

これを積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x} \quad (A_1 \text{ は定数})$$

となる. 同様にして $y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x}$ (A_2 は定数)

よって, 上の2式から, y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

例3 例2において, $\beta = \alpha$ とした, 次の微分方程式を解け.

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha x})'' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})^{(2)} = 0$$

これを2回積分すると

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

例4 $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha, y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ とするとき,
次の微分方程式を解け.

$$y''' - (\alpha + \beta + \gamma)y'' + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)y' - \alpha\beta\gamma y = 0$$

解答 与式から

$$\{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}' - \alpha\{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\} = 0$$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned} \{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}'e^{-\alpha x} + \{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}(e^{-\alpha x})' &= 0 \\ [\{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x}]' &= 0 \end{aligned}$$

これを積分すると

$$\begin{aligned} \{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x} &= A_1 \\ y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y &= A_1 e^{\alpha x} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

同様にして

$$y'' - (\gamma + \alpha)y' + \gamma\alpha y = A_2 e^{\beta x} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = A_3 e^{\gamma x} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } (\alpha - \beta)(y' - \gamma y) = A_1 e^{\alpha x} - A_2 e^{\beta x}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より } (\beta - \gamma)(y' - \alpha y) = A_2 e^{\beta x} - A_3 e^{\gamma x}$$

上の2式から, y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} + C_3 e^{\gamma x} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は定数})$$

例5 例4において, $\gamma = \alpha$ とした, 次の微分方程式を解け.

$$y''' - (2\alpha + \beta)y'' + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)y' - \alpha^2\beta y = 0$$

解答 与式から

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)' - \beta(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y) = 0$$

両辺に $e^{-\beta x}$ を掛けると

$$\begin{aligned} (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)' e^{-\beta x} + (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)(e^{-\beta x})' &= 0 \\ \{(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x}\}' &= 0 \end{aligned}$$

これを積分すると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x} = A_1$$

両辺に $e^{(\beta-\alpha)x}$ を掛けると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

ここで, 上式の左辺は

$$\begin{aligned} (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} &= y'' e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha x})'' \\ &= (ye^{-\alpha x})^{(2)} \end{aligned}$$

となる. したがって

$$(ye^{-\alpha x})^{(2)} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

これを, x について2回積分すると, 改めて定数 C_1, C_2, C_3 を用いて

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 + C_3 e^{(\beta-\alpha)x} \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} + C_3 e^{\beta x}$$

例6 例4において, $\alpha = \beta = \gamma$ とした, 次の微分方程式を解け.

$$y''' - 3\alpha y'' + 3\alpha^2 y' - \alpha^3 y = 0$$

解答 与式の両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned} y''' e^{-\alpha x} + 3y''(e^{-\alpha x})' + 3y'(e^{-\alpha x})'' + y(e^{-\alpha x})''' &= 0 \\ (ye^{-\alpha x})^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

これを x について3回積分すると $ye^{-\alpha x} = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

よって $y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)e^{\alpha x}$ (C_1, C_2, C_3 は定数)

例 7 放射性同位体の原子数は、時間の経過により (原子の崩壊), その原子数は減少する. 原子数 N は時刻 t の減少関数で, その変化率は $\frac{dN}{dt} < 0$ で, N に比例し

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \dots (*)$$

であることが分かっている (崩壊定数 λ は物質の種類による固有の定数).

$$N' = \frac{dN}{dt} \text{ とおくと} \quad N' + \lambda N = 0$$

例 1 の結果を利用してこれを解くと $N = Ce^{-\lambda t}$

ここで, 初期条件 $t = 0$ のとき $N = N_0$ とすると, $C = N_0$ より

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \dots \textcircled{1}$$

さらに, $t = T$ (T は半減期) のとき $N = \frac{1}{2}N_0$ とすると

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

崩壊定数 λ は, (*) により個体数 N と単位時間当たり (1 秒間) の崩壊数を観測することで求めることができる. したがって, 半減期 T は $\textcircled{2}$ から

$$T = \frac{\log 2}{\lambda}$$

例 8 ばね定数 $k[\text{N/m}]$ のばねの一端が固定され、他端に質量 $m[\text{kg}]$ のおもりが付けられ、なめらかな水平面を運動している。自然長の位置を原点 O とし、ばねが伸びる向きを変位 $x[\text{m}]$ の正の向きとし、おもりの加速度を $a[\text{m/s}^2]$ とすると、次式が成り立つ。

$$ma = -kx$$

このとき、 $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ より、 $a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる、このとき特性方程式の解が $\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ であるから、例 2 の結果から

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

を得る。初期条件を $t = 0$ のとき、 $x = A$ 、 $v = \frac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$C_1 + C_2 = A, \quad C_1 - C_2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

したがって $x = \frac{A}{2} \left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \right)$

上式にオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を代入すると²

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

この単振動の周期を $T[\text{s}]$ とすると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

を得る。具体的な線形微分方程式については、以下に紹介している。

http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/diff_eq.pdf

²証明は <http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf> を参照。