平成 21 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成 21 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (1),(2), $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B・C (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 個の文字 A，B，C，D，E，F を 1 列に並べて文字列をつくる．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 文字列の並べ方は全部で何通りあるか．

(2) 文字 A と B が隣り合う並べ方は何通りあるか．

(3) 文字 A と B の間に他の文字が 1 個以上入るような並べ方は何通りあるか．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n - S_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき，次の問いに答えなさい．

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(2) $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 1$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $x_1 \leqq x_2$ をみたすすべての x_1，x_2 に対して $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) $a = 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ が x 軸と接するとき，この曲線と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上に 2 点 A(1, 3)，B(5, −5) があり，直線 AB に関して原点 O と対称な点を C とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点 C の座標を求めよ．

(2) 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の外接円の方程式とその中心の座標を求めよ．

(3) 点 (0, 5) から △ABC の外接円に引いた接線の方程式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xy 平面上の曲線 C が，媒介変数 θ を用いて

$$x=\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}},\quad y=\sin\theta\quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されている．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 曲線 C の概形をかけ．

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

(3) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}},\ \sin\theta\right)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線を l とする．曲線 C の接線のうち，l と直交する直線の方程式を $\tan\theta$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $I_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1，I_2 の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 定数 $c>1$ に対し $A=\begin{pmatrix}1 & c\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とおき，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}\quad (n=1,2,\cdots)$$

によって定める．

(1) $r=\dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ とするとき，$a_n \geqq r^{n-1}$，$b_n \geqq r^{n-2}$ $(n=1,2,\cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) $a_n-b_n\sqrt{c}$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 実数 x に対して，$[\,x\,]$ は x 以下の最大の整数を表すものとする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{10}\right]=238$ をみたす正の整数 n の値を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して $\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$ の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 異なる 6 文字の並び方は　$6! =$ **720 (通り)**

(2) A，B をひとまとめにする．

残りの 4 文字と A，B ひとまとめの 5 つの並び方は　$5!$ (通り)

また，ひとまとめにした A，B の並び方は　2 (通り)

よって，並び方の総数は　$5! \times 2 =$ **240 (通り)**

(3) A と B が隣り合わない並び方であるから，(1)，(2) より

$$720 - 240 = \mathbf{480}\ \textbf{(通り)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた漸化式から
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - S_{n+1}$$
$$a_{n+1} = 4a_n - S_n$$

上の 2 式の辺々を引くと　$a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n) - (S_{n+1} - S_n)$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ を代入して，整理すると

$$\boldsymbol{a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) $a_1 = 2$，$a_2 = 4a_1 - S_1$，$S_1 = a_1$ より，$a_2 = 6$ であるから

$$b_1 = a_2 - 2a_1 = 6 - 2 \cdot 2 = 2$$

(1) の結果から　$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$　すなわち　$b_{n+1} = 2b_n$

よって　$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^n}$

(3) (2) の結果から　$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$　ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{2}$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項が $\dfrac{a_1}{2}$，公差が $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = (n+1)2^{n-1}}$$

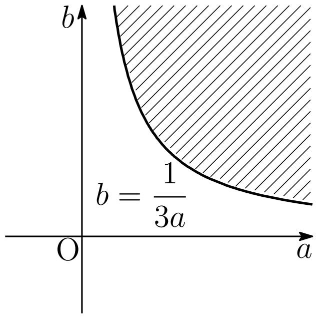
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 関数 $f(x)$ は単調増加であるから　$a>0$，$f'(x) \geqq 0$

$f'(x)=3ax^2+2x+b$ の係数について

$$1^2-3a{\cdot}b \leqq 0$$

このとき，$a>0$ であるから　　$b \geqq \dfrac{1}{3a}$

よって，点 $(a,\ b)$ の表す範囲は，図の斜線部分で，境界線を含む

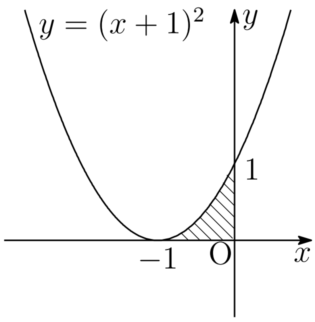


(2) $a=0$ のとき　$f(x)=x^2+bx+1$

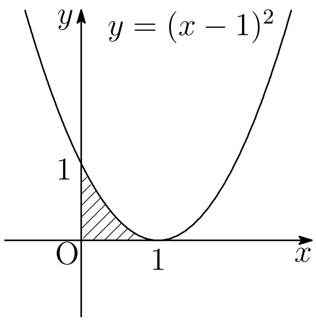
このとき，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と接するための条件は

$$b^2-4{\cdot}1{\cdot}1=0 \quad \text{これを解いて} \quad b=\pm 2$$

$\boxed{b=2\text{ のとき}}$



$\boxed{b=-2\text{ のとき}}$



(i) $b=2$ のとき

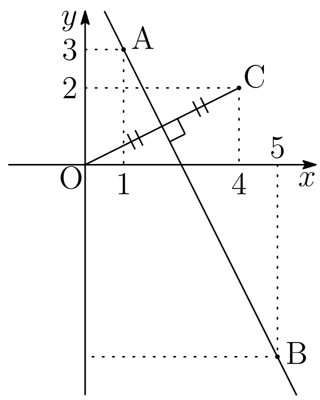
$$S=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

(ii) $b=-2$ のとき

$$S=\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}$$

(i),(ii) より，求める面積は　　$\boldsymbol{S=\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2点 A(1, 3)，B(5, −5) を通る直線の方程式は



$$y-3=\frac{-5-3}{5-1(x-1)}$$

すなわち　$y=-2x+5 \quad \cdots ①$

原点 O を通り，① に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x \quad \cdots ②$$

①，② の交点は　(2, 1)

線分 OC の中点が (2, 1) であるから　**C(4, 2)**

(2) △ABC の外接円の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \cdots (*)$$

とおくと，円 (∗) は，3点 A(1, 3)，B(5, −5)，C(4, 2) を通るから

$$a+3b+c=-10, \quad 5a-5b+c=-50, \quad 4a+2b=-20$$

これを解いて　$a=-2$，$b=4$，$c=-20$

したがって，△ABC の外接円の方程式は

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0$$

すなわち　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=25}$

よって，中心 **(1, −2)**，半径 5 の円

(3) 求める接線は，y に平行ではないので，その方程式を

$$y=mx+5 \ (mx-y+5=0)$$

とおく．このとき，この直線と円の中心 (1, −2) との距離は 5 であるから

$$\frac{|m\cdot 1-(-2)+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5 \quad \text{ゆえに} \quad |m+7|=5\sqrt{m^2+1}$$

この両辺を平方して整理すると

$$12m^2-7m-12=0 \quad \text{これを解いて} \quad m=\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}$$

よって，求める接線の方程式は

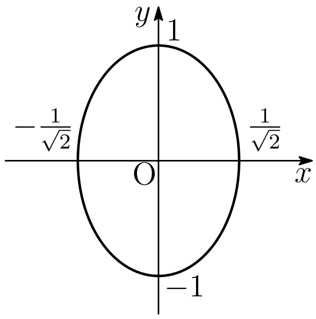
$$\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x+5, \quad y=-\frac{3}{4}x+5}$$

$\boxed{5}$ (1) 与えられた媒介変数表示から

$$\sqrt{2}x = \cos\theta,\quad y = \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

これを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$2x^2 + y^2 = 1 \cdots ①$$



よって，C の表す図形は，中心を原点とする右の図のような楕円である．

(2) (1) の結果から

$$V = \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^2\,dx = \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\,x - \frac{2}{3}x^3\,\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi}$$

(3) l の方程式は

$$2\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)x + (\sin\theta)y = 1 \quad すなわち \quad y = -\frac{\sqrt{2}x}{\tan\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$$

ゆえに，l に垂直な直線の傾きを m とすると　$m = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{2}} \quad \cdots ②$

次に，傾き m の直線で C に接する接線の方程式を

$$y = mx + k \quad \cdots ③$$

とおいて，これを ① に代入すると

$$2x^2 + (mx+k)^2 = 1 \quad 整理すると \quad (m^2+2)x^2 + 2mkx + k^2 - 1 = 0$$

このとき，上の方程式の係数について

$$(mk)^2 - (m^2+1)(k^2-1) = 0 \quad ゆえに \quad k = \pm\sqrt{\frac{1}{2}m^2 + 1}$$

これに ② を代入すると　$k = \pm\sqrt{\dfrac{\tan^2\theta}{4} + 1} \quad \cdots ④$

よって，②，④ を ③ に代入して

$$\boldsymbol{y = \frac{x\tan\theta}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{\tan^2\theta}{4} + 1}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\ \log(1+x)\ \Big]_0^{\sqrt{3}}=\mathbf{log(1+\sqrt{3})}$

(2) $I_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ において，$x=\tan\theta$ とおくと

x	$0\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから　$I_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

(3) まず，$0\leqq k\leqq 1$ のとき

$$\frac{1}{1+k}-(1-k)=\frac{k^2}{1+k}\geqq 0,\quad 1-\frac{1}{1+k}=\frac{k}{1+k}\geqq 0$$

よって　$1-k\leqq\dfrac{1}{1+k}\leqq 1$　(等号が成り立つのは，$k=0$ のとき)

したがって　$\displaystyle\int_0^1(1-x^n)\,dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx<\int_0^1dx$

$$\frac{n}{n+1}<\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx<1\quad\cdots①$$

次に，$1\leqq k$ のとき　$0<\dfrac{1}{1+k}<\dfrac{1}{k}$

したがって　$0<\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx<\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n}dx$

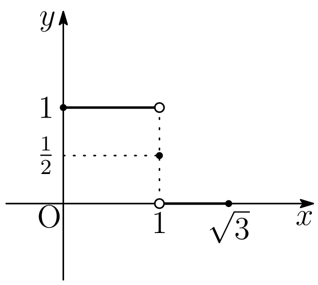
$$0<\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx<\frac{1}{n-1}\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\right\}\quad\cdots②$$

①，② より，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx+\lim_{n\to\infty}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx=1+0=\mathbf{1}$$

解説 $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$ $(0\leqq x\leqq\sqrt{3})$ に対して，

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．



これから，明らかに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=1$

また，次の 2 式を示せばよいことが分かる．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx=1,\qquad\lim_{n\to\infty}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx=0$$

(以上の説明でも部分点は貰える)

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $r=\dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$，$c>1$ より　$r>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$2r-1=\sqrt{4c+1}$ の両辺を平方して整理すると　$c=r^2-r$

したがって，$A=\begin{pmatrix} 1 & r^2-r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+(r^2-r)b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}$$

ここで，$x_n=a_n-r^{n-1}$，$y_n=b_n-r^{n-2}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおくと

$$\begin{aligned} x_{n+1}+r^n&=(x_n+r^{n-1})+(r^2-r)(y_n+r^{n-2}) \\ y_{n+1}+r^{n-1}&=(x_n+r^{n-1})+(y_n+r^{n-2}) \end{aligned}$$

整理すると $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+(r^2-r)y_n \\ y_{n+1}=x_n+y_n+r^{n-2} \end{cases}$ $\cdots(*)$

このとき，自然数 n に対して，次式を示せばよい．

$$\begin{cases} x_n \geqq 0 \\ y_n \geqq 0 \end{cases} \qquad \cdots(**)$$

i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} &x_1=a_1-r^{1-1}=1-1=0 \\ &y_1=b_1-r^{1-2}=1-\frac{1}{r}>1-\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

ゆえに，$n=1$ のとき $(**)$ が成り立つ．

ii) $n=k$ のとき，$(**)$ が成り立つと仮定すると，$(*)$ より $n=k+1$ のときも $(**)$ が成り立つ．

i)，ii) から，すべての自然数 n に対して，$(**)$ が成り立つ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + cb_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{c}\,b_{n+1} &= (a_n + cb_n) - \sqrt{c}\,(a_n + b_n) \\ &= (1 - \sqrt{c}\,)(a_n - \sqrt{c}\,b_n) \end{aligned}$$

よって　$a_n - \sqrt{c}\,b_n = (1 - \sqrt{c}\,)^{n-1}(a_1 - \sqrt{c}\,b_1) = \boldsymbol{(1 - \sqrt{c}\,)^n}$

(3) (2) と同様に　$a_{n+1} + \sqrt{c}\,b_{n+1} = (1 + \sqrt{c}\,)(a_n + \sqrt{c}\,b_n)$

ゆえに　$a_n + \sqrt{c}\,b_n = (1 + \sqrt{c}\,)^n$

これと (2) の結果から

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{c}\,)^n + (1 - \sqrt{c}\,)^n}{2}, \quad b_n = \frac{(1 + \sqrt{c}\,)^n - (1 - \sqrt{c}\,)^n}{2\sqrt{c}}$$

よって

$$\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{c} \times \frac{(1 + \sqrt{c}\,)^n + (1 - \sqrt{c}\,)^n}{(1 + \sqrt{c}\,)^n - (1 - \sqrt{c}\,)^n} = \sqrt{c} \times \frac{1 + \left(\dfrac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}}\right)^n}$$

ここで　$\dfrac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}} = -1 + \dfrac{2}{1 + \sqrt{c}}$, $c > 1$ より　$-1 < \dfrac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}} < 0$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{c}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $n=10q+r\ (0 \leqq r<10)$ をみたす整数 q，r をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{10}\right]=\sum_{j=1}^{q-1}10j+q(r+1)=5q(q-1)+q(r+1)=q(5q+r-4)$$

このとき，$q(5q+r-4)=238$，$q<5q+r-4$ であるから

$$238=1\times 238=2\times 119=7\times 34=14\times 17$$

したがって　$q=7$，$r=3$　　よって　$\boldsymbol{n=73}$

(2) (i) $\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}=m$ とすると，$\sqrt{n+1}=m-\dfrac{1}{2}$ より

$$n+1=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 \quad すなわち \quad n=m(m-1)-\frac{3}{4}$$

$\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす最小の自然数 n は　$n=k(k-1)$

ゆえに，$\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす自然数 n は

$$k(k-1) \leqq n<k(k+1)$$

(ii) $\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}=m$ とすると，$\sqrt{n}=m-\dfrac{1}{2}$ より

$$n=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 \quad すなわち \quad n=m(m-1)+\frac{1}{4}$$

$\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす最小の自然数 n は　$n=k(k-1)+1$

ゆえに，$\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす自然数 n は

$$k(k-1)+1 \leqq n<k(k+1)+1$$

(i)，(ii) より k を自然数として

$$\boldsymbol{\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=\begin{cases}0 & (n\neq k(k+1))\\ 1 & (n=k(k+1))\end{cases}}$$