平成 20 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成 20 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B・C (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 等差数列 $2,\ 5,\ 8,\ \cdots$ を $\{a_n\}$，等比数列 $2,\ -4,\ 8,\ \cdots$ を $\{b_n\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 20 項までの和を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和が 300 を超える最小の n を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ との両方に含まれる数を順に取り出してできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 等式

$$\int_x^1 f(t)\,dt = x^3 - ax + \int_0^2 |\,t^2 - 1\,|\,dt$$

を満たす関数 $f(x)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ．

(2) $g(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ とするとき，関数 $g(x)$ の極値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，P が逆行列をもち，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

となるとき，次の問いに答えなさい．ただし，a，b，c は実数とする．

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ $0 \leqq x \leqq 3$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (1 \leqq x \leqq 3) \\ 0 & (0 \leqq x < 1) \end{cases}$$

がある．曲線 $y = f(x)$ を y 軸のまわりに 1 回転してできる形の容器に毎秒 2π の割合で水を注入する．注入し始めてから t 秒後の水の体積を V，底面から水面までの高さを h とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) V を h の式で表せ．

(2) 容器が水で満たされるのは何秒後か．

(3) $t = 6$ のときの水面の上昇する速度 $\dfrac{dh}{dt}$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ と放物線 $C_2 : y = x^2 + a$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $a = -3$ のとき，円 C_1 と放物線 C_2 の共有点の座標をすべての求めよ．

(2) $a > 0$ のとき，放物線 C_2 によって切り取られる円 C_1 の弧の長さが π となるように a の値を定めよ．

$\boxed{\textbf{6}}$ 1，2，3，4 を重複を許して並べてできる数について，次の問いに答えなさい．

(1) 各けたの数の和が 6 となる 5 けたの数の個数を求めよ．

(2) 各けたの数の和が 7 となる 5 けたの数の個数を求めよ．

(3) 各けたの数の和が $k + 3$ となる k けたの数の個数を求めよ．

$\boxed{\textbf{7}}$ 正の整数 A に対して，つぎの条件 (i)，(ii) をみたす正の整数の組 $(a,\ b)$ の総数を $N(A)$ と表わす．

(i) $a < b$

(ii) a と b の最小公倍数は A である．

(1) $N(105)$ を求めよ．

(2) $N(2310)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{8}}$ a，b は $b \geqq a > 0$ をみたす定数とする．x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x^3 + y^3 = 1$ をみたしながら変化するとき，$a^2x + b^2y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定める．

(1) $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を示せ．

(2) $a_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を示せ．

(3) $f(x) = x$ をみたす x を求めよ．

(4) $f(\alpha) = \alpha$ のとき

$$\alpha - a_{n+1} < \frac{\alpha \log 2}{2}(\alpha - a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(5) $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ．
ただし，必要ならば任意の実数 $x \neq 0$ に対して $e^x > 1 + x$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 初項2，公差3の等差数列の初項から第20項まで和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 2+(20-1)\cdot 3\}=\mathbf{610}$$

(2) 初項2，公比-2の等比数列の初項から第n項までの和が300を超えるとき

$$\frac{2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}>300 \quad \text{ゆえに} \quad (-2)^n<-449$$

これをみたすnは奇数である．$(-2)^7=-128,\quad (-2)^9=-512$

したがって，求める最小のnは　**9**

(3) $\{a_n\}$のすべての項は正，$\{b_n\}$の奇数の項は正，$\{b_n\}$の偶数の項は負である．したがって，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の両方に含まれる項は，$\{b_n\}$の奇数の項から調べればよい．$\{b_n\}$の奇数の項からなる数列は$\{2\cdot 4^{n-1}\}$.

$$2\cdot 4^{n-1}\equiv 2\cdot 1^{n-1}\equiv 2 \pmod 3$$

よって，任意のnに対して，$2\cdot 4^{n-1}=3k+2$を満たす自然数kが存在する．このとき，$3k+2$は$\{a_n\}$の第$k+1$項である．したがって

$$c_n=2\cdot 4^{n-1}=2\cdot 2^{2n-2}=\mathbf{2^{2n-1}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$\begin{aligned}\int_0^2 |t^2-1|dt &= \int_0^1(-t^2+1)\,dt+\int_1^2(t^2-1)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1+\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^2=2\end{aligned}$$

ゆえに　$\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt=x^3-ax+2$

上式に$x=1$を代入すると　$0=1-a+2$　これを解いて　$\boldsymbol{a=3}$

したがって　$\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt=x^3-3x+2 \quad \cdots(*)$

$(*)$の両辺をxについて，微分すると

$$-f(x)=3x^2-3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{f(x)=-3x^2+3}$$

(2) $(*)$より　$g(x)=x^3-3x+2$

$g(x)$を微分すると　$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g(x)$の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって　$x=-1$のとき　**極大値4**

$x=1$のとき　**極小値0**

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ の両辺に左から P を掛けると

$$AP = P\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8-a & 6 \\ 5-a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 2c \\ b & c \end{pmatrix} \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の両辺の (1,2) 成分および (2,2) 成分から　$c = 3$

また，$(*)$ の (1,1) 成分および (2,1) 成分から

$$8 - a = ab, \quad 5 - a = b$$

上の式から b を消去すると　$a^2 - 6a + 8 = 0$

P は逆行列を持つことから，$a \neq 2$ に注意してこれを解くと　$a = 4$

よって　　$\boldsymbol{a = 4,\ b = 1,\ c = 3}$

(2) (1) の結果から　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ であるから

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$$

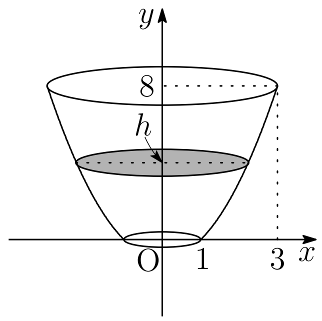
$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 - 2\cdot 3^n & -8 + 8\cdot 3^n \\ 1 - 3^n & -2 + 4\cdot 3^n \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x^2 = y + 1$ であるから



$$V = \pi \int_0^h (y+1)\,dy$$
$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_0^h = \boldsymbol{\pi \left(\frac{h^2}{2} + h \right)}$$

(2) 容器に水が満たされたときの水の体積は，(1) の結果に $h = 8$ を代入して

$$V = \pi \left(\frac{8^2}{2} + 8 \right) = 40\pi$$

毎秒 2π の割合で注入するので　$\dfrac{40\pi}{2\pi} = \mathbf{20}$ (秒後)

(3) $t = 6$ のときの水の体積は　$2\pi \times 6 = 12\pi$

このときの水面の高さ h は，(1) の結果から

$$2\pi \left(\frac{h^2}{2} + h \right) = 12\pi \quad h > 0 \text{ に注意してこれを解くと} \quad h = 4$$

(1) の結果を t で微分すると　$\dfrac{dV}{dt} = \pi(h+1)\dfrac{dh}{dt}$

上式に $\dfrac{dV}{dt} = 2\pi$，$h = 4$ を代入すると

$$2\pi = \pi(4+1)\frac{dh}{dt} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{2}{5} \quad \text{よって} \quad \textbf{毎秒 } \boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a=-3$ より $\begin{cases} x^2+y^2=9 & \cdots ① \\ y=x^2-3 & \cdots ② \end{cases}$ とおく.

①，② から x を消去すると $y^2+y-6=0$

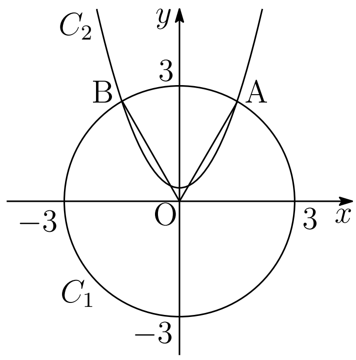
① から $-3 \leqq y \leqq 3$ に注意して，これを解くと $y=-3,\ 2$

$y=-3$ のとき $x=0$，$y=2$ のとき $x=\pm\sqrt{5}$

よって，求める共有点の座標は $\mathbf{(0,-3)}$，$\mathbf{(\pm\sqrt{5},\ 2)}$

(2) C_1 は半径 3 の円であるから，その円周は

$$2\pi\cdot 3=6\pi$$



C_1，C_2 の交点を A，B すると，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\pi$ から

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{6\pi}\times 360^\circ=60^\circ$$

2 点 A，B は y 軸に関して対称であるから，線分 OA の x 軸の正の向きとなす角は 60° である.
ゆえに，点 A の座標は

$$(3\cos 60^\circ,\ 3\sin 60^\circ) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

点 A は C_2 上にあるから

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+a \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{6\sqrt{3}-9}{4}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 各桁の数の組合せは $\{1,1,1,1,2\}$
したがって，求める個数は ${}_5\mathrm{C}_1=\mathbf{5}$ (個)

(2) 各桁の数の組合せは $\{1,1,1,1,3\}$，$\{1,1,1,2,2\}$
したがって，求める個数は ${}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2=5+10=\mathbf{15}$ (個)

(3) 各桁の数の組合せは

$$\{\overbrace{1,1,\cdots,1}^{k-1\text{ 個}},4\},\ \{\overbrace{1,1,\cdots,1}^{k-2\text{ 個}},2,3\},\ \{\overbrace{1,1,\cdots,1}^{k-3\text{ 個}},2,2,2\}$$

したがって，求める個数は

$$\begin{aligned} {}_k\mathrm{C}_1+{}_k\mathrm{C}_2\times 2+{}_k\mathrm{C}_3 &= k+\frac{k(k-1)}{2!}\times 2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)} \ \text{(個)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $105 = 3 \times 5 \times 7$

105 を最小公倍数とする 2 数 a，b について，次の場合がある．

「a だけが 3 を因数にもつ」

「b だけが 3 を因数にもつ」

「a と b がともに 3 を因数にもつ」

5，7 についても同様であるから，$(a,\ b)$ の組合せは全部で 3^3 個ある．

このうち，$a = b$ となるのは a と b がともに 3，5，7 を因数にもつ，すなわち，$a = b = 3 \times 5 \times 7$ のときである．残りが $a < b$ または $a > b$ であり，これらの個数は等しい．

したがって $$N(105) = \frac{3^3 - 1}{2} = \mathbf{13}$$

(2) $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

2310 を最小公倍数とする 2 数 a，b について，次の場合がある．

「a だけが 2 を因数にもつ」

「b だけが 2 を因数にもつ」

「a と b がともに 2 を因数にもつ」

3，5，7，11 についても同様であるから，$(a,\ b)$ の組合せは全部で 3^5 個ある．このうち，$a = b$ となるのは a と b がともに 2，3，5，7，11 を因数にもつ，すなわち，$a = b = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ のときである．残りが $a < b$ または $a > b$ であり，これらの個数は等しい．

したがって $$N(2310) = \frac{3^5 - 1}{2} = \mathbf{121}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $x^3+y^3=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ より，$(x,\ y)$ を θ の正則な関数として表すことができる．$x^3+y^3=1 \cdots$ ① の両辺を θ で微分すると

$$3x^2\frac{dx}{d\theta}+3y^2\frac{dy}{d\theta}=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2,\ y^2)\cdot\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=0 \quad \cdots(*)$$

$\left(\dfrac{dx}{d\theta},\ \dfrac{dy}{d\theta}\right)$ は曲線 ① の接ベクトルであるから

$$(x^2,\ y^2)$$

は曲線 ① の法ベクトルである．

また，a^2x+b^2y は θ の関数であるから，$f(\theta)=a^2x+b^2y$ とおくと

$$f'(\theta)=a^2\frac{dx}{d\theta}+b^2\frac{dy}{d\theta}=(a^2,\ b^2)\cdot\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)$$

$f(\theta)$ が極値をとるとき，$f'(\theta)=0$ であるから

$$(a^2,\ b^2)\cdot\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=0 \quad \cdots(**)$$

このとき，$(*)$，$(**)$ より，$(x^2,\ y^2)/\!/(a^2,\ b^2)$ であるから，$\lambda>0$ を用いて

$$(x^2,\ y^2)=\lambda^2(a^2,\ b^2) \quad \text{ゆえに} \quad x=\lambda a,\ y=\lambda b$$

とおける．これを ① に代入すると

$$(\lambda a)^3+(\lambda b)^3=1 \quad \text{ゆえに} \quad \lambda=(a^3+b^3)^{-\frac{1}{3}}$$

このとき　$a^2x+b^2y=a^2(\lambda a)+b^2(\lambda b)=\lambda(a^3+b^3)=(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$

$$(x,\ y)=(1,\ 0) \text{ のとき} \quad a^2x+b^2y=a^2$$

$$(x,\ y)=(0,\ 1) \text{ のとき} \quad a^2x+b^2y=b^2$$

ここで，$b \geqq a>0$ により　$a^2 \leqq b^2=(b^3)^{\frac{2}{3}}<(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$

よって　$\boldsymbol{a^2 \leqq a^2x+b^2y \leqq \sqrt[3]{(a^3+b^3)^2}}$

補足 $(x,\ y)$ を θ の関数として，例えば $x=\cos^{\frac{2}{3}}\theta$，$y=\sin^{\frac{2}{3}}\theta$ とすればよい．

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 漸化式から，明らかに　$a_n > 0$

$a_1 = 1$，$a_2 = f(a_1) = f(1) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ より，

$a_2 > a_1$ であるから，$a_{n+1} > a_n$ と仮定すると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{2^{\frac{a_{n+1}}{2}}}{2^{\frac{a_n}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)} > 1$$

したがって　$a_{n+2} > a_{n+1}$　ゆえに，$\{a_n\}$ は単調増加列である．

よって　$a_n < a_{n+1}$

(2) $a_1 < 2$ であるから，$a_n < 2$ と仮定すると

$$\frac{a_{n+1}}{2} = \frac{2^{\frac{a_n}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}(a_n-2)} < 1$$

したがって　$a_{n+1} < 2$

よって，すべての自然数 n に対して　$a_n < 2$

(3) $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ は凸関数であるから，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフの交点は高々 2 個である．$f(x) = x$ より

$$2^{\frac{x}{2}} = x \quad \cdots ①$$

この方程式の両辺を 2 乗および 4 乗すると

$$2^x = x^2, \quad 4^x = x^4$$

よって，方程式 ① の解は　$\boldsymbol{x = 2,\ 4}$

(4) (2)，(3) の結果から　$a_n < \alpha$

平均値の定理により

$$\frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} = f'(c) \quad (a_n < c < \alpha) \quad \cdots ②$$

をみたす c が存在する．

$f'(x) = \dfrac{2^{\frac{x}{2}}\log 2}{2}$ であるから，$f'(x)$ は単調増加関数である．ゆえに

$$f'(c) < f'(\alpha) = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}}\log 2}{2} = \frac{\alpha\log 2}{2} \quad \cdots ③$$

②，③ より

$$\frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} < \frac{\alpha\log 2}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha - a_{n+1} < \frac{\alpha\log 2}{2}(\alpha - a_n)$$

(5) $\alpha=2$ を (4) の結果に代入すると

$$2-a_{n+1}<\log 2\cdot(2-a_n)$$

$2-a_n>0$ であるから　$|2-a_{n+1}|<\log 2\cdot|2-a_n|$

したがって　$|2-a_n|<(\log 2)^{n-1}|2-a_1|$

$0<\log 2<1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log 2)^{n-1}=0$

よって　　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=2}$

解説 上に有界な単調増加列は収束するから[1]，その極限値を α とすると

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$$

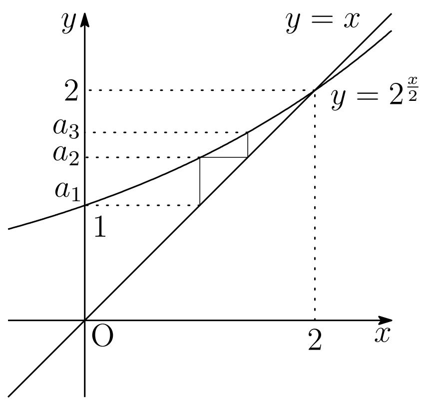
とおくと，$a_{n+1}=2^{\frac{a_n}{2}}$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{a_n}{2}}\quad ゆえに\quad \alpha=2^{\frac{\alpha}{2}}$$

これを解いて　$\alpha=2,\ 4$

また，$a_n<2$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

幾何学的には，極限値 α は，$y=2^{\frac{x}{2}}$ と $y=x$ の交点の y 座標である．



[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2008.pdf の $\boxed{\mathbf{8}}$ を参照