平成19年度　大分大学2次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成19年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C(100分)
- 経済学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (100分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (80分)
- 医学部は，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ 数I・II・III・A・B・C(80分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 行列 A，B を

$$A = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) 積 AB を求めなさい.

(2) AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めなさい.

(3) $(AB)^{-1} + A^{-1}$ を求めなさい.

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を自然数とするとき，和

$$S_n = n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots x^{n-1}$$

について，次の問いに答えなさい.

(1) $x \neq 1$ のとき，$(1-x)S_n$ を求めなさい.

(2) $x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ を求めなさい.

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を定数とする．関数 $f(x) = 4x^3 - 3(a+2)x^2 + 6ax + 1$ は $x = -\dfrac{1}{2}$ で極大値をとる.

(1) a の値を求め，曲線 $y = f(x)$ の概形をかきなさい.

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\cos\theta)$ の最大値，最小値，および，そのときの θ の値を求めなさい.

$\boxed{\mathbf{4}}$ a は正の定数とする．関数 $f(x)$ は $x \geqq a$ で

$$\int_a^x f(t)\,dt = x\log 2x - x$$

を満たす．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $f(x)$ を求めなさい．

(2) a の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ r，s を 0 でない定数とする．x，y に関する不等式

$$\frac{(x-1)^2+y^2}{r} - \frac{x^2+(y-2)^2}{s} \geqq 0$$

の表す領域について，次の問いに答えなさい．

(1) $r = s = 1$ のときの領域を図示しなさい．

(2) $r = 2$，$s = 3$ のときの領域を図示しなさい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 辺 AB を $3:1$ に内分する点を D，辺 AC を $4:1$ に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする．BP : PE，CP : PD を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ に関する内積を，それぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = x$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = y$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = z$ とおく．$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を x，y，z を使って表しなさい．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $6(x-y) = xy$ をみたす自然数の組 x，y をすべて求めよ．

(2) $7(x+y+z) = 2(xy+yz+zx)$ をみたす自然数の組 $(x \leqq y \leqq z)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $n \geqq 2$ を自然数とする．

(1) 関数 $f(x) = nx - 1 + (1-x)^n$ の極値を求めよ．

(2) 次の不等式を示せ．

(i) $(1-x^2)e^x \leqq 1 + x \leqq e^x \quad (x \geqq -1)$

(ii) $0 \leqq e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2}{n}e^x \quad (x \geqq -n)$

$\boxed{\mathbf{9}}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \cos k\pi, \quad b_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} \cos \frac{2k\pi}{3}$$

によって定義する.

(1) $a_n = -\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ を示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $AB=\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sqrt{2}+1} & \boldsymbol{\sqrt{3}}\\ \boldsymbol{\sqrt{3}} & \boldsymbol{\sqrt{2}+1}\end{pmatrix}$

(2) $\det(AB)=(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{3})^2=2\sqrt{2}$ であるから，(1) の結果から

$$\boldsymbol{(AB)^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & \sqrt{2}+1\end{pmatrix}}$$

(3) $\det A=(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=-2\sqrt{2}$ より

$$A^{-1}=\frac{1}{-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & \sqrt{2}-1\end{pmatrix}$$

上式および (2) の結果から　　$\boldsymbol{(AB)^{-1}+A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

別解 $B^{-1}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ より，$A=B^{-1}+E$ (E は単位行列) であるから

$$(AB)^{-1}+A^{-1}=B^{-1}A^{-1}+A^{-1}=(B^{-1}+E)A^{-1}=AA^{-1}=E$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & n+(n-1)x+\cdots+2x^{n-2}+x^{n-1}\\ -) & xS_n = & \quad\ nx+\cdots+3x^{n-2}+2x^{n-1}+x^n\\ \hline & (1-x)S_n = & n\quad -x-\cdots-x^{n-2}-x^{n-1}-x^n\end{array}$$

$x\neq 1$ であるから

$$(1-x)S_n=n-x(1+x+\cdots+x^{n-1})=\boldsymbol{n-\frac{x(1-x^n)}{1-x}}$$

(2) (1) の結果に $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\frac{1}{2}S_n=n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad S_n=2n-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$\begin{aligned} S_1+S_2+\cdots+S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left\{2k-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \boldsymbol{n^2-n+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = 4x^3 - 3(a+2)x^2 + 6ax + 1$ を微分すると

$$f'(x) = 12x^2 - 6(a+2)x + 6a = 6(x-1)(2x-a)$$

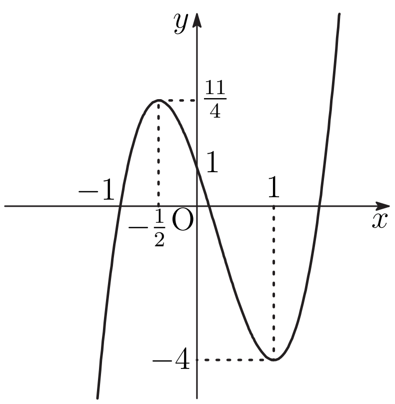
$x = -\dfrac{1}{2}$ で極値をとるので

$$\frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = -1}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{11}{4}$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

曲線 $y = f(x)$ の概形は右のようになる.



(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

$f(-1) = 0$ であるから，(1) の結果より

$x = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{2}{3}\pi}$ **のとき　最大値** $\boldsymbol{\dfrac{11}{4}}$

$x = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0}$ **のとき　最小値** $\boldsymbol{-4}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)

$$\int_a^x f(t)\,dt = x\log 2x - x \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の両辺を微分すると

$$f(x) = \log 2x + x \cdot \frac{2}{2x} - 1 = \boldsymbol{\log 2x}$$

(2) $(*)$ に $x = a$ を代入すると　$0 = a\log 2a - a = a(\log 2a - 1)$

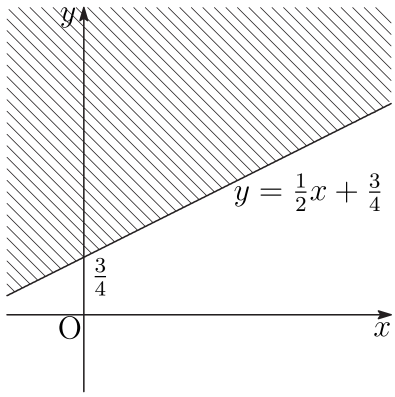
$a > 0$ であるから　$\log 2a = 1$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{e}{2}}$

5 (1) $r=s=1$ のとき

$$(x-1)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\} \geqq 0$$

これを整理すると　$y \geqq \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$

よって，求める領域は図の斜線部分で，境界線を含む.



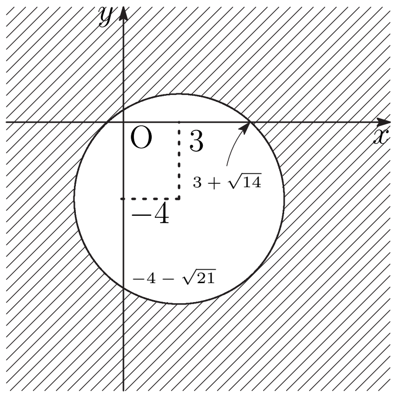
(2) $r=2$，$s=3$ のとき

$$\frac{(x-1)^2+y^2}{2}-\frac{x^2+(y-2)^2}{3} \geqq 0$$

これを整理すると

$$(x-3)^2+(y+4)^2 \geqq 30$$

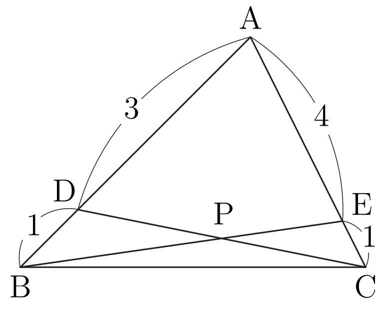
よって，求める領域は図の斜線部分で，境界線を含む.



6 (1) メネラウスの定理を $\triangle$ABE および直線 CD について適用すると

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{1}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{1}{5}=1$$

よって　**BP : PE = 5 : 3**



また，同定理を $\triangle$ACD および直線 BE について適用すると

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4}{1}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{1}{4}=1 \quad \text{よって} \quad \textbf{CP : PD = 1 : 1}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ との内積をそれぞれとると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+x+z=0, \quad z+y+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=0$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=-x-z$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=-y-z$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-z$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(-x-z)(-y-z)-(-z)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{xy+yz+zx}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $6(x-y)=xy$ より　　$(6+x)(6-y)=36$

x，y は自然数であるから

$$(6+x,\ 6-y)=(9,\ 4),\ (12,\ 3),\ (18,\ 2),\ (36,\ 1)$$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 2),\ (6,\ 3), (12,\ 4),\ (30,\ 5)}$

(2) $7(x+y+z)=2(xy+yz+zx)\cdots(*)$ より

$$(2y+2z-7)x=7y+7z-2yz$$

y，z は整数であるから，$2y+2z-7\neq 0$ より

$$x=\frac{7(y+z)-2yz}{2(y+z)-7}\quad\text{ゆえに}\quad x-\frac{7}{2}=\frac{2\left(\dfrac{49}{4}-yz\right)}{2(y+z)-7}\quad\cdots(**)$$

$x\geqq 4$ のとき，$4\leqq y\leqq z$ であるから，$(**)$ の左辺は正，右辺は負となり，不適．したがって，$x=1,\ 2,\ 3$ の場合について求めればよい．

(i) $x=1$ を $(*)$ に代入して整理すると　$(2y-5)(2z-5)=39$

$-3\leqq 2y-5\leqq 2z-5$ より

$(2y-5,\ 2z-5)=(1,\ 39),\ (3,\ 13)$　すなわち　$(y,\ z)=(3,\ 22),\ (4,\ 9)$

(ii) $x=2$ を $(*)$ に代入して整理すると　$(2y-3)(2z-3)=37$

$1\leqq 2y-3\leqq 2z-3$ より

$$(2y-3,\ 2z-3)=(1,\ 37)\quad\text{すなわち}\quad (y,\ z)=(2,\ 20)$$

(iii) $x=3$ を $(*)$ に代入して整理すると　$(2y-1)(2z-1)=43$

$5\leqq 2y-3\leqq 2z-3$ より，これを満たす自然数 y，z は存在しない．

(i)，(ii)，(iii) より　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 22),\ (1,\ 4,\ 9),\ (2,\ 2,\ 20)}$

解説 $(*)$ より　　$x(2y-7)+y(2z-7)+z(2x-7)=0$

$x(2y-7)$，$y(2z-7)$，$z(2x-7)$ は 0 ではないので，これらの少なくと 1 つは負である．このとき

$$2x-7\leqq 2y-7\leqq 2z-7\quad\text{ゆえに}\quad 2x-7<0$$

$\boxed{8}$ (1) $f(x) = nx - 1 + (1-x)^n$ より　　$f'(x) = n\{1 - (1-x)^{n-1}\}$

(i) n が偶数のとき

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0$

増減表は右のようになる．

$x = 0$ で**極小値 0**

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(ii) n が奇数のとき

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$

増減表は右のようになる．

$x = 0$ で**極小値 0**,

$x = 2$ で**極大値 $2n-2$**

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2n-2$	$\searrow$

(2) (i) 曲線 $y = e^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式は　$y = x + 1$

曲線 $y = e^x$ は下に凸であるから　$e^x \geqq x + 1$　$\cdots$①

① の x を $-x$ に置き換えると　$e^{-x} \geqq -x + 1$　$\cdots$②

$x \geqq -1$ のとき，$(1+x)e^x > 0$ を ② の両辺に掛けると

$$1 + x \geqq (1 - x^2)e^x \quad (x \geqq -1) \quad \cdots ③$$

① および ③ から　$(1-x^2)e^x \leqq 1 + x \leqq e^x$　$(x \geqq -1)$

(ii) ① の x を $\dfrac{x}{n}$ に置き換えると

$$e^{\frac{x}{n}} \geqq \frac{x}{n} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad e^x \geqq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \cdots ④$$

次に　$\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)e^x \leqq \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$　$(x \geqq -n)$　$\cdots(*)$

を示せばよいが，$x \geqq n$ のときは自明であるから，$-n \leqq x < n$ の場合について $(*)$ を示す．

$-n \leqq x < n$ のとき $-1 \leqq \dfrac{x}{n} < 1$ であるから，③ より

$1 + \dfrac{x}{n} \geqq \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)e^{\frac{x}{n}}$　ゆえに　$\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \geqq \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n e^x$　$\cdots$⑤

ここで，(1) の結果から，$f\left(\dfrac{x^2}{n^2}\right) \geqq 0$ であるから

$n\cdot\dfrac{x^2}{n^2} - 1 + \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqq 0$　ゆえに　$\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqq 1 - \dfrac{x^2}{n}$　$\cdots$⑥

したがって，⑤，⑥ より $(*)$ が成り立つ．よって，④，$(*)$ より，次式が成り立つ．

$$0 \leqq e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqq \frac{x^2}{n}e^x \quad (x \geqq -n)$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \cos k\pi \\ &= -\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\frac{k}{n}} \\ &= -\int_1^2 \frac{dx}{x} = -\Big[\ \log x\ \Big]_1^2 = \mathbf{-\log 2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} \cos \frac{2k\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{\frac{k}{n}} \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\Big[\ \log x\ \Big]_1^3 = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\log 3} \end{aligned}$$