平成18年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成18年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C(100分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数I・II・A・B (100分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 数I・II・A・B (80分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B・C(80分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ n を自然数とする．$(1+x)^n$ の展開式を利用して，次の問いに答えなさい．

(1) ${}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 127$ を満たす n の値を求めなさい．

(2) 31^{17} を 900 で割ったときの余りを求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $C : y = x^2 - 3x$ と点 $\mathrm{A}(2, -6)$ がある．

(1) 点Aから放物線 C へ引いた接線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C 上を動く点Pに対して，線分APの中点Qの軌跡の方程式を求めなさい．

(3) (1) で求めた接線と，(2) で求めた軌跡とで囲まれる部分の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間内に4点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-2,\ 2, -4)$，$\mathrm{D}(1,\ 2, -4)$ がある．

(1) $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値と $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトルを1つ求めなさい．

(3) 点Dから，3点A，B，Cを含む平面に垂直な直線を引き，その交点をEとするとき，線分DEの長さを求めなさい．

(4) 四面体ABCDの体積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2つの関数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$，$g(x) = e^{x^2}$ がある．

(1) 不等式 $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つような x の値の範囲を求めなさい．

(2) $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ とする．関数 $h(x)$ の最小値を求めなさい．

(3) 曲線 $y = g(x)$ と直線 $y = e^2$ とで囲まれる部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数列 $\{a_n\}$ を次の条件で定義する．

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = 1.05 \times a_n - 10 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 一般項 a_n を求めなさい．

(2) $a_n \leqq 0$ となる最小の n を求めなさい．
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 曲線 $C : y = (x-a)(x-4)(x-b)$ について考える．ここで a，b は $a < 4 < b$ を満たす定数とする．

(1) 曲線 C と x 軸とで囲まれる 2 つの部分の面積が等しいとき，$a+b$ の値を求めなさい．

(2) $a > 0$ とする．曲線 C と x 軸，y 軸とで囲まれる 3 つの部分の面積が等しいとき，a，b の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義されている．

(1) $0 < a_n < 2 \ (n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $2\cos b_n = a_n$，$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす b_n の値を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 等式 $\displaystyle\int_0^2 \left\{ |x^2 - 2x + a| - \frac{1}{2}x + a \right\} dx = a^2$ が成り立つような定数 a の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2項定理により

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k \qquad \cdots (*)$$

これに $x=1$ を代入することにより

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n - 1$$

条件により　$2^n - 1 = 127$　ゆえに　$2^n = 2^7$　よって　$\boldsymbol{n=7}$

(2) $(*)$ に $x=30$, $n=17$ を代入すると

$$\begin{aligned} 31^{17} &= \sum_{k=0}^{17} {}_{17}\mathrm{C}_k \cdot 30^k \\ &= 1 + {}_{17}\mathrm{C}_1 \cdot 30 + 30^2 \sum_{k=2}^{17} {}_{17}\mathrm{C}_k \cdot 30^{k-2} \\ &= 511 + 900 \sum_{k=2}^{17} {}_{17}\mathrm{C}_k \cdot 30^{k-2} \end{aligned}$$

よって，31^{17} を 900 で割った余りは　**511**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = x^2 - 3x$ を微分すると　$y' = 2x - 3$

C 上の点 $(a,\ a^2 - 3a)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 - 3a) = (2a - 3)(x - a) \quad ゆえに \quad y = (2a - 3)x - a^2$$

これが A$(2, -6)$ を通るから

$$-6 = (2a - 3)\cdot 2 - a^2 \quad これを解いて \quad a = 0,\ 2$$

よって，求める接線は　$\boldsymbol{y = 5x - 16}$，$\boldsymbol{y = -3x}$

(2) C 上の点 P$(t,\ t^2 - 3t)$ に対して線分 AP の中点を Q$(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2 + t}{2}, \quad y = \frac{-6 + t^2 - 3t}{2}$$

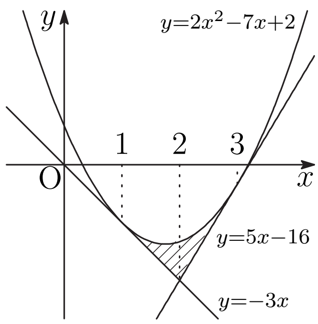
上式の第 1 式から　$t = 2x - 2$　これを第 2 式に代入すると

$$y = \frac{-6 + (2x - 2)^2 - 3(2x - 2)}{2} = 2x^2 - 7x + 2$$

よって，点 Q の軌跡の方程式は　$\boldsymbol{y = 2x^2 - 7x + 2}$

(3) $y = 2x^2 - 7x + 2 \cdots$ ①，$y = -3x \cdots$ ②，$y = 5x - 16 \cdots$ ③ とおく．

①，② から y を消去すると



$$2x^2 - 4x + 2 = 0 \quad ゆえに \quad 2(x - 1)^2 = 0$$

①，② は点 $(1,\ 0)$ で接する．

また，①，③ から y を消去すると

$$2x^2 - 12x + 18 = 0 \quad ゆえに \quad 2(x - 3)^2 = 0$$

①，③ は点 $(3,\ 0)$ で接する．

したがって，求める面積を S とすると[1]

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(2x^2 - 7x + 2) - (-3x)\}\,dx \\ &\qquad + \int_2^3 \{(2x^2 - 7x + 2) - (5x - 16)\}\,dx \\ &= \int_1^2 2(x - 1)^2\,dx + \int_2^3 2(x - 3)^2\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x - 1)^3\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}(x - 3)^3\right]_2^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf の $\boxed{\mathbf{1}}$ を参照

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,-4)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-4)^2}=2\sqrt{6},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\cdot(-2)+1\cdot2+1\cdot(-4)=-6$$

よって $\quad \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{-6}{\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$$

別解 $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{6\cdot24-36}=3\sqrt{3}$

(2) 求めるベクトルを $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とすると $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0$

したがって $\quad 2x+y+z=0,\quad -x+y-2z=0$

ゆえに $\quad x:y:z=-1:1:1\quad$ よって $\quad \boldsymbol{(-1,\ 1,\ 1)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 2,-4)$ と $\vec{n}=(-1,\ 1,\ 1)$ のなす角を α とすると

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\vec{n}|}=\frac{-1+2-4}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\sqrt{1+1+1}}=-\frac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}$$

よって $\quad \mathrm{DE}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\cos\alpha|=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(4) (1)，(3) の結果から $\quad \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DE}=\dfrac{1}{3}\cdot3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\mathbf{3}$

解説 外積 (ベクトル積) を用いると簡単に求めることができる[2]．外積は，高校数学の範囲外であるから，検算用に使用し，答案には書かないようにする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 1,\ 1)\times(-2,\ 2,-4)=(-6,\ 6,\ 6)$$
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3\sqrt{3}$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-6,\ 6,\ 6)\cdot(1,\ 2,-4)=-18$$

四面体 ABCD の体積 V は $\quad V=\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{1}{6}\times18=3$

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf の $\boxed{\mathbf{4}}$ を参照

$\boxed{4}$ (1) $f(x) \geqq g(x)$ より　$e^{\frac{x}{2}} \geqq e^{x^2}$　$e>1$ であるから　$\dfrac{x}{2} \geqq x^2$

ゆえに　$x(2x-1) \geqq 0$　よって　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}}$

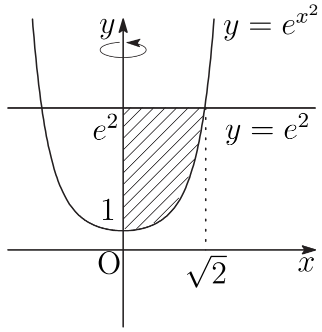
(2) $h(x) = f(x)g(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{x^2} = e^{\frac{x}{2}+x^2}$

$$\frac{x}{2} + x^2 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

よって，$h(x)$ は $x = -\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\boldsymbol{e^{-\frac{1}{16}}}$ をとる．

(3) $y = e^{x^2}$ より　$x^2 = \log y$

求める体積は，右の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させたものであるから



$$\pi \int_1^{e^2} \log y \, dy = \pi \Big[\, y(\log y - 1) \,\Big]_1^{e^2}$$
$$= \boldsymbol{\pi(e^2+1)}$$

別解 求める体積を V とすると

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x(e^2 - e^{x^2})dx$$
$$= 2\pi \left[\, \frac{e^2}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2} \,\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= \pi(e^2+1)$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a_{n+1} = 1.05 \times a_n - 10$ より　$a_{n+1} - 200 = 1.05(a_n - 200)$

したがって，数列 $\{a_n - 200\}$ は，初項が $a_1 - 200 = -100$，公比が 1.05 の等比数列であるから

$$a_n - 200 = -100 \cdot 1.05^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a_n = 200 - 100 \cdot 1.05^{n-1}}$$

(2) $a_n \leqq 0$ より　$200 \leqq 100 \cdot 1.05^{n-1}$　したがって　$1.05^{n-1} \geqq 2$

両辺の常用対数をとると　$(n-1)\log_{10} 1.05 \geqq \log_{10} 2$

ここで

$$\begin{aligned} \log_{10} 1.05 &= \log_{10} \frac{21}{20} \\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - (\log_{10} 2 + 1) \\ &= 0.4771 + 0.8451 - 0.3010 - 1 \\ &= 0.0212 \end{aligned}$$

したがって　$n \geqq \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.05} + 1 = 15.1\cdots$

よって，求める n は　**16**

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 3次関数のグラフは，変曲点に関して対称であるから，C と C の変曲点を通る直線で囲まれる2つの部分の面積は等しい．

C の変曲点をPとすると，Pを通り x 軸に平行な直線で囲まれる部分の面積は等しいから，条件よりPの座標は (4, 0) である．

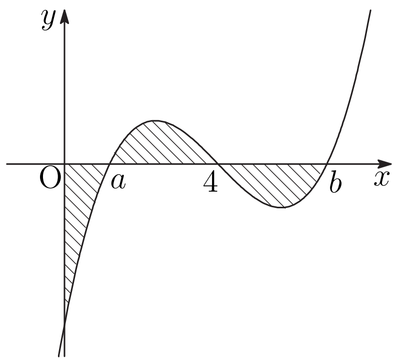
$y=(x-a)(x-4)(x-b)$ より

$$y''=6x-2(a+b+4)$$

$x=4$ のとき，$y''=0$ であるから

$$6\cdot4-2(a+b+4)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a+b=8}$$

(2) (1) の結果より



$$\begin{aligned}&(x-a)(x-4)(x-b)\\=&x^3-(a+b+4)x^2+(ab+4a+4b)x-4ab\\=&x^3-12x^2+(ab+32)x-4ab\end{aligned}$$

条件から $\displaystyle\int_0^4(x-a)(x-4)(x-b)\,dx=0$

上式の左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^4(x-a)(x-4)(x-b)\,dx&=\int_0^4\{x^3-12x^2+(ab+32)x-4ab\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+\frac{1}{2}(ab+32)x^2-4abx\right]_0^4\\&=4^3-4^4+8(ab+32)-16ab\\&=-8ab+64\end{aligned}$$

したがって　$-8ab+64=0$　ゆえに　$ab=8$

これと (1) の結果から，a，b は2次方程式 $t^2-8t+8=0$ の解である．

$a<b$ に注意して　　$\boldsymbol{a=4-2\sqrt{2},\ b=4+2\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $$0 < a_n < 2 \quad (n = 1, 2, \cdots) \qquad \cdots (*)$$

［1］ $n=1$ のとき　$a_1 = \sqrt{2}$ であるから，$(*)$ は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，漸化式より

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} > 0$$

また　$$2 - a_{k+1} = 2 - \sqrt{a_k+2} = \frac{2-a_k}{2+\sqrt{a_k+2}} > 0$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

(2) (1) の結果から，a_n に対して，$2\cos b_n = a_n$ を満たす b_n $\left(0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が唯一存在する．$a_n = 2\cos b_n$ を $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}$ に代入すると

$$2\cos b_{n+1} = \sqrt{2\cos b_n + 2} = \sqrt{4\cos^2 \frac{b_n}{2}} = 2\cos\frac{b_n}{2}$$

したがって　$\cos b_{n+1} = \cos\dfrac{b_n}{2}$　ゆえに　$b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$

$a_1 = \sqrt{2}$ より　$\cos b_1 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$b_1 = \dfrac{\pi}{4}$

数列 $\{b_n\}$ は，初項が $\dfrac{\pi}{4}$ で，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{b_n = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$$

(3) (2) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\cos b_n = 2\cos 0 = \mathbf{2}$

解説 1　漸化式から　$$|a_{n+1} - 2| = \frac{|a_n - 2|}{2 + \sqrt{a_n+2}} < \frac{1}{2}|a_n - 2|$$

ゆえに　$|a_n - 2| < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2|$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

解説 2　$a_n < 2$，$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n+2} - a_n = \dfrac{(2-a_n)(1+a_n)}{\sqrt{a_n+2}+a_n} > 0$ より

$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列であるから収束し[3]，極限値を α とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n+2} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \sqrt{\alpha+2} \quad \text{よって} \quad \alpha = 2$$

---

[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2008.pdf の $\boxed{\mathbf{8}}$ を参照

$\boxed{8}$ 与えられた等式から

$$\int_0^2 |x^2-2x+a|\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x-a\right)dx + a^2 \quad \cdots (*)$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^2-2x+a|\,dx &= \int_0^2 |(x-1)^2+a-1|\,dx \\ &= \int_{-1}^1 |x^2+a-1|\,dx = 2\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx,\end{aligned}$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x-a\right)dx = \left[\ \frac{1}{4}x^2-ax\ \right]_0^2 = 1-2a$$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$2\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx = 1-2a+a^2 \quad \cdots (**)$$

(i) $a<0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx &= -\int_0^1 (x^2+a-1)\,dx \\ &= -\left[\ \frac{1}{3}x^3+(a-1)x\ \right]_0^1 = \frac{2}{3}-a\end{aligned}$$

これを $(**)$ に代入すると

$$2\left(\frac{2}{3}-a\right) = 1-2a+a^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2=\frac{1}{3}$$

$a<0$ に注意してこれを解くと　　$a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき，$t=\sqrt{1-a}$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx &= \int_0^1 |x^2-t^2|\,dx \\ &= -\int_0^t (x^2-t^2)\,dx + \int_t^1 (x^2-t^2)\,dx \\ &= -\left[\ \frac{x^3}{3}-t^2x\ \right]_0^t + \left[\ \frac{x^3}{3}-t^2x\ \right]_t^1 \\ &= \frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$1-2a+a^2=(1-a)^2=t^4$$

これらを $(**)$ に代入すると　　$2\left(\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}\right)=t^4$

整理すると　　$3t^4-8t^3+6t^2-2=0$

ここで，$f(t)=3t^4-8t^3+6t^2-2$ とおくと，$0<t<1$ において

$$f'(t)=12t^3-24t^2+12t=12t(t-1)^2>0$$

$f(t)$ は，$0<t<1$ で単調増加，$f(1)=-1<0$ であるから，$f(t)=0$ をみたす t $(0 \leqq t \leqq 1)$ は存在しない．

(iii)　$a>1$ のとき

$$\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx=\int_0^1 (x^2+a-1)\,dx$$
$$=\left[\,\frac{x^3}{3}+(a-1)x\,\right]_0^1=a-\frac{2}{3}$$

これを $(**)$ に代入すると

$$2\left(a-\frac{2}{3}\right)=1-2a+a^2\quad \text{整理すると}\quad 3a^2-12a+7=0$$

$a>1$ に注意してこれを解くと　　$a=\dfrac{6+\sqrt{15}}{3}$

(i)〜(iii) から，求める a の値は　　$\boldsymbol{a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{6+\sqrt{15}}{3}}$