平成17年度　大分大学2次試験前期日程(数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成17年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数II・III・A・B・C(100分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数II・A・B (100分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数II・A・B (80分)
- 医学部は，$\boxed{8}$ 〜 $\boxed{10}$ 数I・II・III・A・B・C(80分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a_1 = \dfrac{1}{2}$，$a_{n+1} = a_n + \dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列を $\{a_n\}$ とする．

(1) a_4 を求めなさい．

(2) 一般項 a_n を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathrm{OA} = 3$，$\mathrm{OB} = 2$，$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$ の $\triangle\mathrm{OAB}$ において，辺 AB を $3:1$ に内分する点を P，辺 OB の中点を Q，OP と AQ の交点を R とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表しなさい．

(2) 線分 PQ の長さを求めなさい．

(3) OR : RP を求めなさい．

(4) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a は $a \neq 0$ をみたす実数である．α，β を方程式 $x^2 - 2x + a = 0$ の2つの解とし，複素数平面上の3点を $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{B}(\beta)$ とする．

(1) $\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ$ となるような a の範囲を求めなさい．

(2) $\angle\mathrm{AOB} = 30^\circ$ となるような a の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a は $a \neq 1$ をみたす実数である．関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して

$$f(x) = \left(x^2 + ax\int_0^1 f(t)\,dt - 1\right)e^x$$

をみたす．

(1) 関数 $f(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるとき，a の値を求めなさい．

(3) (2) での a の値のとき，関数 $f(x)$ の極値を求めなさい．

$\boxed{5}$ 整数 n について，$f(n) = (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)$ とおく.

(1) k を自然数とするとき，等式

$$f(k) - f(k-1) = a(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$$

が成立するように，定数 a の値を定めなさい.

(2) m が自然数であるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$ を $f(m)$ を用いて表しなさい.

$\boxed{6}$ a，b を実数とし，関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 3$ は $x = -\dfrac{2}{3}$，2 で極値をとる.

(1) a，b の値と，関数 $f(x)$ の極大値，極小値を求めなさい.

(2) 曲線 $y = f'(x) + \dfrac{7}{3}$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい.

$\boxed{7}$ n を整数とする方程式を $5x + 3y = 2n$ とする.

(1) $n = 30$ のとき，この方程式をみたす正の整数 x，y の組をすべて求めなさい.

(2) この方程式をみたす整数 x，y の組をすべて求めなさい.

$\boxed{8}$ a，b，c，d は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，等式 $A^2 + BA = 4E$，$AB + B^2 = 12E$ をみたす行列 B が存在するとき，$a+d$ と $ad-bc$ の値を求めよ．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

$\boxed{9}$ 実数 a_n，b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は次の条件をみたすとする.

$$\tan(a_n) = \frac{1}{2n^2},\ 0 < a_n < \frac{\pi}{2} \quad \tan(b_n) = \frac{1}{2n+1},\ 0 < b_n < \frac{\pi}{2}$$

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x$ と x との大小を調べよ.

(2) $\tan(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ の値を求めよ.

(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_n$ の値を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ の値を求めよ.

$\boxed{10}$ a は正の定数とする．放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = ax$ で囲まれる図形を，直線 $y = ax$ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 与えられた漸化式から

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=a_1+\frac{3}{4},\quad a_3=a_2+\frac{5}{8},\quad a_4=a_3+\frac{7}{16}$$

上式から　$a_4=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}=\mathbf{\frac{37}{16}}$

(2) $a_{n+1}=a_n+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$ より

$$2^{n+1}a_{n+1}-2\cdot 2^n a_n=2n+1 \quad \cdots ①$$

ここで，次式をみたす定数 a，b を求める．

$$f(n)=an+b,\quad f(n+1)-2f(n)=2n+1 \quad \cdots ②$$

すなわち　$a(n+1)+b-2(an+b)=2n+1$

整理すると　$-an+a-b=2n+1$

係数を比較すると　$-a=2$，$a-b=1$

これを解いて　$a=-2$，$b=-3$　ゆえに　$f(n)=-2n-3$

①，② から　$2^{n+1}a_{n+1}-f(n+1)=2\{2^n a_n-f(n)\}$

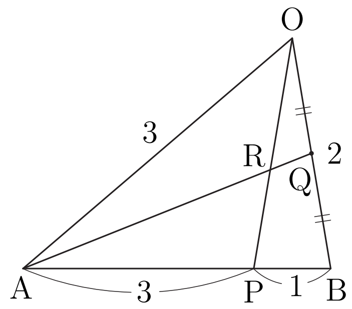
$\{2^n a_n-f(n)\}$ は，初項 $2a_1-f(1)=6$，公比 2 の等比数列であるから

$$2^n a_n-f(n)=6\cdot 2^{n-1}\quad \text{よって}\quad a_n=3+\frac{f(n)}{2^n}=\mathbf{3-\frac{2n+3}{2^n}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})}$$



(2) (1) の結果から

$$\mathrm{PQ} = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \frac{1}{4}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3^2 + 2\cdot3\cdot2\cos 60^\circ + 2^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{19}}{4}}$$

(3) $\triangle$OPB と直線 AQ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1} = 1$$

よって　　**OR : RP = 4 : 3**

(4) $\triangle\mathrm{OPB} = \dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OPB}$，$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{3}{7}\triangle\mathrm{OPQ}$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{3}{56} \times \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{3}}{112}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x^2 - 2x + a = 0$ の解は　$x = 1 \pm \sqrt{1-a}$　$\cdots(*)$

したがって，この方程式が実数以外の解をもつとき　$\angle\mathrm{AOB} \neq 180^\circ$

$\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ$ となるとき，$\alpha\beta < 0$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha\beta = a \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a < 0}$$

(2) $\angle\mathrm{AOB} = 30^\circ$ となるとき，$(*)$ は虚数であるから $(a > 1)$

ここで，$\alpha = 1 + \sqrt{a-1}\,i$，$\beta = 1 - \sqrt{a-1}\,i$ とすると，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \sqrt{a}, \quad \mathrm{AB} = 2\sqrt{a-1}$$

余弦定理 $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$ により

$$(2\sqrt{a-1}\,)^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{a}\cos 30^\circ$$

$$4(a-1) = a + a - 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{a = 4(2-\sqrt{3})}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $k=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=(x^2+akx-1)e^x$

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 (t^2+akt-1)e^t\,dt \\ &= \Big[\Big\{(t^2+akt-1)-(2t+ak)+2\Big\}e^t\Big]_0^1 \\ &= \Big[\Big\{t^2+(ak-2)t-(ak-1)\Big\}e^t\Big]_0^1 \\ &= ak-1 \end{aligned}$$

ゆえに　$(a-1)k=1$　　$a\neq 1$ であるから　$k=\dfrac{1}{a-1}$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=\left(x^2+\dfrac{a}{a-1}x-1\right)e^x}$

補足 $\displaystyle\int g(x)e^x\,dx=\{g(x)-g'(x)+g''(x)-g'''(x)+\cdots\}e^x+C$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x+\frac{a}{a-1}\right)e^x+\left(x^2+\frac{a}{a-1}x-1\right)e^x \\ &= \left(x^2+\frac{3a-2}{a-1}x+\frac{1}{a-1}\right)e^x \end{aligned}$$

$f'(1)=0$ であるから

$$1+\frac{3a-2}{a-1}+\frac{1}{a-1}=0 \quad \text{これを解いて} \quad a=\frac{1}{2}$$

このとき　　$f'(x)=(x+2)(x-1)e^x$

したがって，$x=1$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化するので，$f(x)$ で $x=1$ で極値をとる．

よって　　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

(3) (2) の結果から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$5e^{-2}$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$

よって　　$\begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{5e^{-2}} & \boldsymbol{(x=-2)} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{-e} & \boldsymbol{(x=1)} \end{cases}$

$\boxed{5}$ (1)
$$\begin{aligned}&f(k)-f(k-1)\\=&(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)(2k+9)\\&\quad-(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\\=&(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\{(2k+9)-(2k-1)\}\\=&10(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{a=10}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{m}\{f(k)-f(k-1)\}\\&=\frac{1}{10}\{f(m)-f(0)\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{10}\{f(m)-945\}}\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ (1) $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$ より　$f'(x)=3x^2-2ax+b$

$f'(x)=0$ の解が $-\dfrac{2}{3}$，2 であるから，解と係数の関係により

$$-\frac{2}{3}+2=\frac{2a}{3},\quad -\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{b}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=2,\ b=-4}$$

すなわち　$f(x)=x^3-2x^2-4x+3$

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{121}{27}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

よって　$\begin{cases}\textbf{極大値}\ \boldsymbol{\frac{121}{27}} & \boldsymbol{(x=-\frac{2}{3})}\\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{(x=2)}\end{cases}$

(2)
$$f'(x)+\frac{7}{3}=3x^2-4x-\frac{5}{3}=3\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)$$

求める面積を S とすると

$$S=-\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}3\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)dx=\frac{3}{6}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\right)^3=\boldsymbol{4}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $$5x+3y=2n \quad \cdots ①$$

をみたす整数解の 1 つが $(x,\ y)=(n,-n)$ であるから

$$5n+3(-n)=2n \quad \cdots ②$$

①，② から　$5(x-n)+3(y+n)=0$　ゆえに　$5(n-x)=3(y+n)$

ここで，5 と 3 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$n-x=3k,\ \ y+n=5k \quad \text{ゆえに} \quad x=n-3k,\ \ y=-n+5k \quad \cdots (*)$$

$n=30$ のとき　　$x=30-3k$，$y=-30+5k$

x，y は，正の整数であるから

$$30-3k>0,\quad -30+5k>0 \quad \text{ゆえに} \quad 6<k<10$$

すなわち　　$k=7,\ 8,\ 9$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y)=(9,\ 5),\ (6,\ 10),\ (3,\ 15)}$

(2) $(*)$ より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(n-3k,\ -n+5k)}$ **(*k* は整数)**

$\boxed{8}$ $A^2+BA=4E$ より　$(A+B)A=4E$
$AB+B^2=12E$ より　$(A+B)B=12E$
$A+B$ は正則であるから，それぞれの両辺に左から $(A+B)^{-1}$ を掛けると

$$A=4(A+B)^{-1},\quad B=12(A+B)^{-1}\quad \text{ゆえに}\quad B=3A$$

これを $A^2+BA=4E$ に代入すると　$A^2=E$　$\cdots$①

A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O\quad\cdots②$$

①，② より　$(a+d)A=(ad-bc+1)E$

i) $a+d=0$ のとき，$ad-bc+1=0$

ii) $a+d\neq 0$ のとき，$A=kE$ (k は実数) とおける．
これを ① に代入すると　$k^2E=E$
ゆえに　$k=\pm 1$　すなわち　$A=\pm E$
したがって　$A=E$ のとき，　$a+d=2$，$ad-bc=1$
$A=-E$ のとき，$a+d=-2$，$ad-bc=1$

よって　$\boldsymbol{(a+d,\ ad-bc)=(0,-1),\ (2,\ 1),\ (-2,\ 1)}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(x)=\tan x - x$ とおくと，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x>0$$

ゆえに，$f(x)$ は単調増加で，$f(0)=0$ であるから

$$0<x<\frac{\pi}{2} \text{ のとき,}\quad f(x)>0 \quad \text{よって} \quad \tan x>x$$

(2) $\tan a_n=\dfrac{1}{2n^2}$ より，$\tan a_1=\dfrac{1}{2}$，$\tan a_2=\dfrac{1}{8}$，$\tan a_3=\dfrac{1}{18}$ であるから

$$\tan(a_1+a_2)=\frac{\tan a_1+\tan a_2}{1-\tan a_1\tan a_2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{2}{3}$$

$$\tan(a_1+a_2+a_3)=\frac{\tan(a_1+a_2)+\tan a_3}{1-\tan(a_1+a_2)\tan a_3}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\frac{3}{4}$$

上の結果から

$$\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{n}{n+1} \qquad \cdots(*)$$

と推定する．

(i) $n=1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき

$$\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k)=\frac{k}{k+1}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\\
=&\frac{\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k)+\tan a_{k+1}}{1-\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k)\tan a_{k+1}}\\
=&\frac{\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{1}{2(k+1)^2}}{1-\dfrac{k}{k+1}\cdot\dfrac{1}{2(k+1)^2}}=\frac{2k(k+1)^2+(k+1)}{2(k+1)^3-k}\\
=&\frac{(2k^2+2k+1)(k+1)}{(2k^2+2k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成り立つ．

よって $\quad \boldsymbol{\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\dfrac{n}{n+1}}$

(3) (2) の結果から

$$
\begin{aligned}
\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n+b_n) &= \frac{\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\tan b_n}{1-\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)\tan b_n} \\
&= \frac{\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}} \\
&= \frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2n+1} = 1 \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

$0 < a_n < \tan a_n$，$0 < b_n < \tan b_n$ であるから，$n > 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
0 < \sum_{k=1}^{n} a_k + b_n &< \sum_{k=1}^{n} \tan a_k + \tan b_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2n+1} \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{2n+1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < 1 \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

$n = 1$ のときも，② が成立する．

したがって　$0 < a_1+a_2+\cdots+a_n+b_n < 1 < \dfrac{\pi}{2}$

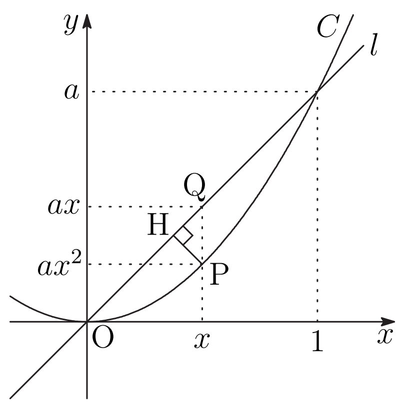
①，② から　　$\boldsymbol{a_1+a_2+\cdots+a_n+b_n = \dfrac{\pi}{4}}$

(4) (3) の結果から　$a_1+a_2+\cdots+a_n = \dfrac{\pi}{4} - b_n$

$0 < b_n < \tan b_n = \dfrac{1}{2n+1}$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

よって　　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n) = \frac{\pi}{4}}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $C : y = ax^2$, $l : y = ax$ とする．C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ ax^2)$，l 上の点を $\mathrm{Q}(x,\ ax)$ とし，P から l に垂線 PH を引くと



$$\mathrm{PH} : \mathrm{HQ} : \mathrm{PQ} = 1 : a : \sqrt{1+a^2}$$

$t = \mathrm{OH}$，$h = \mathrm{PH}$ とすると

$$\mathrm{PQ} = ax - ax^2 = ax(1-x)$$

であるから

$$h = \frac{ax(1-x)}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \mathrm{HQ} = \frac{a^2x(1-x)}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$t = \mathrm{OQ} - \mathrm{HQ} = \sqrt{1+a^2}\,x - \frac{a^2x(1-x)}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{x+a^2x^2}{\sqrt{1+a^2}}$$

ゆえに $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1+2a^2x}{\sqrt{1+a^2}}$

t	$0 \longrightarrow \sqrt{1+a^2}$
x	$0 \longrightarrow 1$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\sqrt{1+a^2}} h^2\,dt = \pi\int_0^1 \frac{a^2x^2(1-x)^2}{1+a^2}\cdot\frac{1+2a^2x}{\sqrt{1+a^2}}dx \\ &= \frac{\pi a^2}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 \{x^2(1-x)^2 + 2a^2x^3(1-x)^2\}dx \end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = \frac{1}{30}$，$\displaystyle\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx = \frac{1}{60}$

よって $\displaystyle V = \frac{\pi a^2}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{30} + 2a^2\cdot\frac{1}{60}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi a^2}{30\sqrt{1+a^2}}}$

解説

m，n を 0 以上の整数とする．

$$I(m,n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

とおくと，部分積分法により

$$\begin{aligned}
I(m,n)&=\frac{1}{m+1}\int_0^1 (t^{m+1})'(1-t)^n\,dt\\
&=\left[\frac{1}{m+1}t^{m+1}(1-t)^n\right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt\\
&=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}I(m+n,0)\\
&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^{m+n}\,dt=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}
\end{aligned}$$

この結果を利用すると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

このとき　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$

よって　$\displaystyle\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

たとえば

$$\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx=\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5=\frac{1}{30}$$

$$\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx=\frac{3!2!}{6!}(1-0)^6=\frac{1}{60}$$