

平成 16 年度 大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工・経済・教育福祉・医学部 平成 16 年 2 月 25 日

- 工学部は, [1] ~ [4] 数 II・III・A・B・C(100 分)
- 経済学部は, [1] ~ [3], [7] 数 II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は, [2], [5], [6] 数 II・A・B (80 分)
- 医学部は, [8] ~ [10] 数 I・II・III・A・B・C(80 分)

[1] 次の問いに答えなさい.

- (1) $2^{10} = 1024 > 1000$ を利用して, $\log_{10} 2$ と 0.3 の大小を比べなさい.
- (2) (1) の結果を利用して, 2^{21} と 5^9 の大小を比べなさい.

[2] $a \geq 0$ とし, 関数 $f(x) = 3|x^2 - 1|$ について, $S(a) = \int_a^{a+1} f(x) dx$ とする.

- (1) $S(0)$ を求めなさい.
- (2) $S(a)$ を求めなさい.
- (3) $S(a)$ を最小にする a の値を求めなさい.

[3] 3 つのベクトルを $\vec{a} = (p, 2)$, $\vec{b} = (-1, 3)$, $\vec{c} = (1, q)$ とする.

- (1) $\vec{a} - \vec{b}$ と \vec{c} は平行で, $\vec{b} - \vec{c}$ と \vec{a} は垂直であるとき, p, q の値を求めなさい.
- (2) $\sqrt{2}|\vec{a}| = |\vec{b}|$ が成立し, $\vec{a} - \vec{b}$ と \vec{c} のなす角が 60° であるとき, p, q の値を求めなさい.

[4] $a \neq 0$ とし, 曲線 $C: y = \log x$ 上の点 (e^a, a) における接線を l とする. ただし, 対数は自然対数である.

- (1) 接線 l の方程式を求めなさい.
- (2) 接線 l , y 軸および直線 $y = a$ で囲まれた三角形の面積を S_1 とする. また, 曲線 C , x 軸, y 軸および直線 $y = a$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする. $S_1 = S_2$ となる a の値を求めなさい.

5 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を

$$S_n = -n^3 + 21n^2 + 65n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とする.

- (1) 初項 a_1 を求めなさい.
- (2) 一般項 a_n を求めなさい.
- (3) $a_n > 151$ を満たす自然数 n の範囲を求めなさい.

6 座標平面上に 3 点 $A(2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$ がある. 点 $D(0, 1)$ を中心とする半径 1 の円の周上の点 P が, 次の条件を満たすとき, 点 P と直線 AC の距離を求めなさい.

$$\vec{AC} \cdot (2\vec{AP} - \vec{AB}) = |\vec{AC}|^2$$

7 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を

$$S_n = -n^3 + 21n^2 + 65n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とする.

- (1) 一般項 a_n を求めなさい.
- (2) $a_n > 151$ を満たす自然数 n の範囲を求めなさい.
- (3) $a_n > 151$ を満たす a_n について, それらの和を求めなさい.

8 n を正の整数とする.

- (1) 整式 x^n を $x^5 - 1$ で割った余りを求めよ.
- (2) 整式 $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n$ を $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ.

9 曲線 $y = f(x) = x(4 - x)$ 上に四点 $O(0, 0)$, $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, $C(3, 3)$ ($0 < a < b < 3$) をとる.

- (1) 四角形 $OABC$ の面積が最大になるときの a , b の値を求めよ.
- (2) 角 OAC の大きさが最小になるときの a の値を求めよ.

10 $f(x) = x^3 - 3x - 5$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ はただ一つの実数解をもつことを示せ. さらに, この実数解を α とするとき, $2 < \alpha < 3$ をみたすことを示せ.
- (2) $\alpha < t \leq 3$ とし, 点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸との交点を $(s, 0)$ とするとき, $0 < s - \alpha < \frac{1}{3}(t - \alpha)$ が成り立つことを示せ.
- (3) $t_1 = 3$ とする. 点 $(t_n, f(t_n))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸との交点を $(t_{n+1}, 0)$ とする. このように数列 $\{t_n\}$ を定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \alpha$ が成り立つことを示せ.

正解

□1 (1) $2^{10} > 10^3$ より $\log_{10} 2^{10} > \log_{10} 10^3$
 ゆえに $10 \log_{10} 2 > 3$ よって $\log_{10} 2 > 0.3$

(2) $\log_{10} 2^{21} - \log_{10} 5^9 = 21 \log_{10} 2 - 9 \log_{10} \frac{10}{2}$
 $= 30 \log_{10} 2 - 9 = 30(\log_{10} 2 - 0.3) > 0$

ゆえに $\log_{10} 2^{21} > \log_{10} 5^9$ よって $2^{21} > 5^9$

補足 $\frac{2^{21}}{5^9} = \frac{2^9 \cdot 2^{12}}{2^9 \cdot 5^9} = \left(\frac{2^{10}}{10^3}\right)^3 > 1$ よって $2^{21} > 5^9$

□2 (1) $S(0) = \int_0^1 3|x^2 - 1| dx = -\int_0^1 (3x^2 - 3) dx = -\left[x^3 - 3x\right]_0^1 = 2$

(2) $3x^2 - 3$ の原始関数の 1 つを $F(x) = x^3 - 3x$ とおくと

(i) $0 \leq a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} 3f(x) dx = -\left[F(x)\right]_a^1 + \left[F(x)\right]_1^{a+1} \\ &= F(a) + F(a+1) - 2F(1) \\ &= (a^3 - 3a) + (a^3 + 3a^2 - 2) - 2 \cdot (-2) \\ &= 2a^3 + 3a^2 - 3a + 2 \end{aligned}$$

(ii) $a > 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} f(x) dx = \left[F(x)\right]_a^{a+1} = F(a+1) - F(a) \\ &= (a^3 + 3a^2 - 2) - (a^3 - 3a) = 3a^2 + 3a - 2 \end{aligned}$$

よって $S(a) = \begin{cases} 2a^3 + 3a^2 - 3a + 2 & (0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ 3a^2 + 3a - 2 & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

$$(3) \quad S'(a) = \begin{cases} 6a^2 + 6a - 3 & (0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ 6a + 3 & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i) $0 \leq a \leq 1$ のとき

$$S'(a) = 0 \text{ とすると } a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

(ii) $a > 1$ のとき $S'(a) = 6a + 3 > 0$

したがって、 $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$...
$S'(a)$		-	0	+
$S(a)$		↘	極小	↗

よって、 $S(a)$ を最小にする a の値は $a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

3 (1) $\vec{a} - \vec{b} = (p+1, -1)$, $\vec{c} = (1, q)$, $(\vec{a} - \vec{b}) // \vec{c}$ より

$$(p+1)q - (-1) \cdot 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p+1)q + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} - \vec{c} = (-2, 3-q)$$
, $\vec{a} = (p, 2)$, $(\vec{b} - \vec{c}) \perp \vec{a}$ より

$$-2p + (3-q) \cdot 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q = 3 - p \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入すると

$$(p+1)(3-p) + 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 2p - 4 = 0$$

したがって $p = 1 \pm \sqrt{5}$ これを②に代入して $q = 3 \mp \sqrt{5}$

よって $(p, q) = (1 \pm \sqrt{5}, 2 \mp \sqrt{5})$ (複号同順)

(2) $\sqrt{2}|\vec{a}| = |\vec{b}|$ より, $2|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ であるから

$$2(p^2 + 4) = 1 + 9 \quad \text{これを解いて} \quad p = \pm 1$$

$\vec{a} - \vec{b} = (p + 1, -1)$ と $\vec{c} = (1, q)$ のなす角が 60° より

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} &= |\vec{a} - \vec{b}| |\vec{c}| \cos 60^\circ \\ p + 1 - q &= \sqrt{(p + 1)^2 + 1} \sqrt{1 + q^2} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(i) $p = 1$ のとき

$$2(2 - q) = \sqrt{5(1 + q^2)} > 0$$

両辺を平方すると

$$4(2 - q)^2 = 5(1 + q^2) \quad \text{整理すると} \quad q^2 + 16q - 11 = 0$$

これを解くと $q = -8 \pm 5\sqrt{3}$

このとき, $2 - q = 10 \mp 5\sqrt{3} = 2(2 \mp \sqrt{3}) > 0$ である.

(ii) $p = -1$ のとき

$$-2q = \sqrt{1 + q^2} > 0$$

両辺を平方して整理すると $3q^2 = 1$

$$q < 0 \text{ であるから} \quad q = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

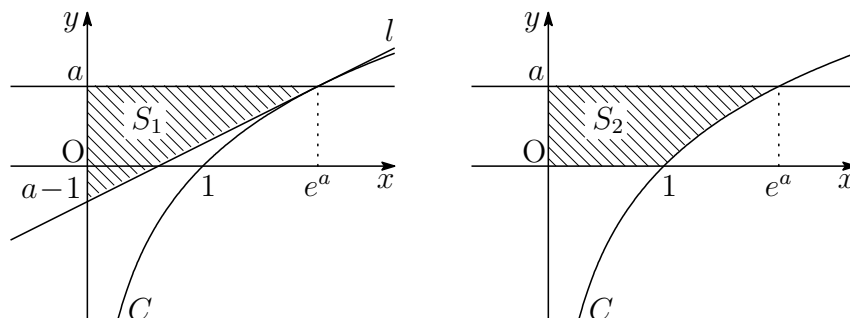
よって $(p, q) = (1, -8 \pm 5\sqrt{3}), \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4 (1) $y = \log x$ より $y' = \frac{1}{x}$

したがって、 C 上の点 (e^a, a) における接線の方程式は

$$y - a = \frac{1}{e^a}(x - e^a) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{e^a}x + a - 1$$

(2) (i) $a > 0$ のとき



上の図から $S_1 = \frac{1}{2}\{a - (a - 1)\}e^a = \frac{e^a}{2}$

また、 C は $x = e^y$ であるから

$$S_2 = \int_0^a e^y dy = \left[e^y \right]_0^a = e^a - 1$$

$S_1 = S_2$ のとき $\frac{e^a}{2} = e^a - 1$ これを解いて $a = \log 2$

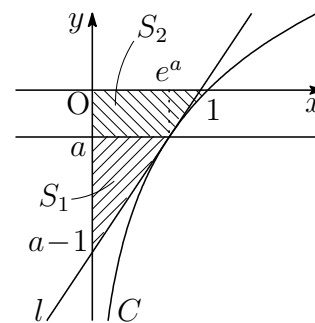
(ii) $a < 0$ のとき

(i) と同様に $S_1 = \frac{e^a}{2}$

$$S_2 = \int_a^0 e^y dy = \left[e^y \right]_a^0 = 1 - e^a$$

$S_1 = S_2$ のとき $\frac{e^a}{2} = 1 - e^a$

これを解いて $a = \log \frac{2}{3}$



(i), (ii) より $a = \log 2, \log \frac{2}{3}$

5 (1) $a_1 = S_1 = -1 + 21 + 65 = 85$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^3 + 21n^2 + 65n - \{(n-1)^3 + 21(n-1)^2 + 65(n-1)\} \\ &= -3n^2 + 45n + 43 \end{aligned}$$

上式は、 $n = 1$ のときも成り立つので $a_n = -3n^2 + 45n + 43$

(3) $a_n > 151$ より

$$-3n^2 + 45n + 43 > 151 \quad \text{ゆえに} \quad (n-3)(n-12) < 0$$

よって $3 < n < 12$ (n は自然数)

6 A(2, 0), B(4, 0), C(0, 4), D(0, 1), P(x, y) とおくと

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 4), \quad 2\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = (2x-6, 2y)$$

これらを $\overrightarrow{AC} \cdot (2\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AC}|^2$ に代入すると

$$-2(2x-6) + 4 \cdot 2y = 4 + 16 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2(y-1) \quad \dots \textcircled{1}$$

P は D を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

① を ② に代入すると

$$4(y-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

これを ① に代入すると $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ したがって $P\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

直線 AC の方程式は $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ すなわち $2x + y - 4 = 0$

よって、点 P と直線 AC の距離は

$$\frac{\left| 2\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}} - 4 \right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|\pm\sqrt{5} - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

7 (1) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^3 + 21n^2 + 65n - \{(n-1)^3 + 21(n-1)^2 + 65(n-1)\} \\ &= -3n^2 + 45n + 43 \end{aligned}$$

上式は、 $n = 1$ のときも成り立つので $a_n = -3n^2 + 45n + 43$

(2) $a_n > 151$ より

$$-3n^2 + 45n + 43 > 151 \quad \text{ゆえに} \quad (n-3)(n-12) < 0$$

よって $3 < n < 12$ (n は自然数)

(3) (2) の結果から、求める和は

$$\begin{aligned} S_{11} - S_3 &= (-11^3 + 21 \cdot 11^2 + 65 \cdot 11) - (-3^3 + 21 \cdot 3^2 + 65 \cdot 3) \\ &= 1925 - 357 \\ &= \mathbf{1568} \end{aligned}$$

$$\boxed{8} \quad (1) \quad x^{n+5} - x^n = x^n(x^5 - 1)$$

x^{n+5} と x^n を $x^5 - 1$ で割った余りは等しいから、 $m \equiv n \pmod{5}$ のとき、 x^m と x^n を $x^5 - 1$ で割った余りは等しい。

よって、 n を 5 で割った余りを r とすると、 x^n を $x^5 - 1$ で割った余りは、

$$\begin{cases} 0 < r \leq 4 \text{ のとき} & \text{余り } x^r \\ r = 0 \text{ のとき} & \text{余り } 1 \end{cases}$$

(2) 整数 r, s を $1 \leq r, s \leq 4, r \neq s$ とする。

$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ に注意して

(i) $n \not\equiv 0 \pmod{5}$ のとき、 $rn \not\equiv sn \pmod{5}$ であるから、(1) の結果から $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n$ を $x^5 - 1$ で割った余りは、 $x^4 + x^3 + x^2 + x$ を $x^5 - 1$ で割った余りに等しいから

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot 1 - 1$$

したがって、求める余りは -1

(ii) $n \equiv 0 \pmod{5}$ のとき、(1) の結果から、 $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n$ を $x^5 - 1$ で割った余りは、 $x^5 + x^5 + x^5 + x^5 = 4x^5$ を $x^5 - 1$ で割った余りに等しいから

$$4x^5 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot 4(x - 1) + 4$$

したがって、求める余りは 4

$$\text{よって} \quad \begin{cases} n \not\equiv 0 \pmod{5} \text{ のとき} & \text{余り } -1 \\ n \equiv 0 \pmod{5} \text{ のとき} & \text{余り } 4 \end{cases}$$

解説 $n \not\equiv 0 \pmod{5}$ のとき、 $rn \equiv sn \pmod{5}$ が成り立つ仮定すると

$$(r - s)n \equiv 0 \pmod{5}$$

$r \neq s, -3 \leq r - s \leq 3, n \not\equiv 0 \pmod{5}$ であるから、矛盾。

法 5 について、 $n, 2n, 3n, 4n$ はどれも合同ではないので、これらは順序を無視すると、法 5 について、 $1, 2, 3, 4$ である。

したがって、 $x^n, x^{2n}, x^{3n}, x^{4n}$ を $x^5 - 1$ で割った余りは、順序を無視すると、 x, x^2, x^3, x^4 で割った余りに等しい。

よって、 $x^n + x^{2n} + x^{3n} + x^{4n}$ を $x^5 - 1$ で割った余りは、 $x^4 + x^3 + x^2 + x$ を $x^5 - 1$ で割った余りに等しい。

- 9 (1) $\overrightarrow{OA} = (a, a(4-a))$, $\overrightarrow{OB} = (b, b(4-b))$, $\overrightarrow{OC} = (3, 3)$ より
 四角形 OABC の面積を S とすると, $0 < a < b < 3$ に注意して

$$\begin{aligned} S &= \triangle OAB + \triangle OBC \\ &= \frac{1}{2}|a \cdot b(4-b) - a(4-a) \cdot b| + \frac{1}{2}|b \cdot 3 - b(4-b) \cdot 3| \\ &= \frac{1}{2}|ab(a-b)| + \frac{3}{2}|b(b-3)| \\ &= \frac{1}{2}ab(b-a) + \frac{3}{2}b(3-b) = \frac{1}{2}(-ba^2 + b^2a - 3b^2 + 9b) \\ &= -\frac{b}{2}\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}(b^3 - 12b^2 + 36b) \end{aligned}$$

したがって, $a = \frac{b}{2}$ のとき, S は最大値 $\frac{1}{8}(b^3 - 12b^2 + 36b)$ をとる.
 ここで, $g(b) = b^3 - 12b^2 + 36b$ とおくと

$$g'(b) = 3b^2 - 24b + 36 = 3(b-2)(b-6)$$

$g(b)$ の増減表は次のようになる.

b	(0)	...	2	...	(3)
$g'(b)$		+	0	-	
$g(b)$		↗	極大	↘	

よって, $a = \frac{b}{2} = 1$, $b = 2$ のとき, S は最大になる.

- (2) $O(0, 0)$, $A(a, a(4-a))$, $C(3, 3)$ より

$$\overrightarrow{OA} = (a, a(4-a)), \quad \overrightarrow{AC} = (3-a, a^2 - 4a + 3)$$

\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{AC} の x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α , β とすると

$$\tan \alpha = \frac{a(4-a)}{a} = 4-a, \quad \tan \beta = \frac{a^2 - 4a + 3}{3-a} = 1-a$$

$\theta = \angle OAC$ とすると, $\theta = \pi - (\alpha - \beta)$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan\{\pi - (\alpha - \beta)\} = -\tan(\alpha - \beta) \\ &= -\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{4-a - (1-a)}{1 + (4-a)(1-a)} \\ &= -\frac{3}{a^2 - 5a + 5} = \frac{3}{-(a - \frac{5}{2})^2 + \frac{5}{4}} \end{aligned}$$

θ が最小となるのは, $\tan \theta > 0$ で, $\tan \theta$ が最小になるのときであるから

$$a = \frac{5}{2}$$

10 (1) $f(x) = x^3 - 3x - 5$ より $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-3	↘	-7	↗

よって、 $f(x) = 0$ はただ1つの実数解をもつ。

$$f(2) = -3 < 0, \quad f(3) = 13 > 0$$

$f(x)$ は連続であるから、 $f(\alpha) = 0$ となる $2 < \alpha < 3$ が存在する。

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

この直線と x 軸との交点が $(s, 0)$ であるから

$$-f(t) = f'(t)(s - t) \quad \text{ゆえに} \quad s = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$$

$$s = t - \frac{t^3 - 3t - 5}{3t^2 - 3} = \frac{2t^3 + 5}{3t^2 - 3} \quad \text{であるから}$$

$$s - \alpha = \frac{2t^3 + 5}{3t^2 - 3} - \alpha = \frac{2t^3 - 3\alpha t^2 + 3\alpha + 5}{3t^2 - 3}$$

$\alpha^3 - 3\alpha - 5 = 0$ であるから、 $3\alpha + 5 = \alpha^3$ より

$$s - \alpha = \frac{2t^3 - 3\alpha t^2 + \alpha^3}{3t^2 - 3} = \frac{(t - \alpha)^2(2t + \alpha)}{3(t + 1)(t - 1)} \quad \dots (*)$$

$$\frac{s - \alpha}{t - \alpha} - \frac{1}{3} = \frac{(t - \alpha)(2t + \alpha)}{3(t + 1)(t - 1)} - \frac{1}{3} = \frac{t^2 - \alpha t - \alpha^2 + 1}{3(t + 1)(t - 1)} \quad \dots (**)$$

ここで $g(t) = t^2 - \alpha t - \alpha^2 + 1 = \left(t - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\alpha^2 + 1$

$\alpha < t \leq 3$ より、最大値 $g(\alpha) = -\alpha^2 - 3\alpha + 10 = -(\alpha + 5)(\alpha - 2) < 0$

$2 < \alpha < t \leq 3$ より、(*), (**) および上式から

$$s - \alpha > 0, \quad \frac{s - \alpha}{t - \alpha} - \frac{1}{3} < 0 \quad \text{よって} \quad 0 < s - \alpha < \frac{1}{3}(t - \alpha)$$

(3) (2)の結果に $t = t_n$ とすると, $s = t_{n+1}$ であるから

$$0 < t_{n+1} - \alpha < \frac{1}{3}(t_n - \alpha)$$

$$t_1 = 3 \text{ より } 0 < t_n - \alpha < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (3 - \alpha)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (3 - \alpha) = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - \alpha) = 0 \text{ よって } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \alpha$$