平成 16 年度　大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉・医学部　平成 16 年 2 月 25 日

- 工学部　1　2　3　4　数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部　1　2　3　7　数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部　2　5　6　数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　8　9　10　数 I・II・III・A・B・C (80 分)

1 次の問いに答えなさい．

(1) $2^{10} = 1024 > 1000$ を利用して，$\log_{10} 2$ と 0.3 の大小を比べなさい．

(2) (1) の結果を利用して，2^{21} と 5^9 の大小を比べなさい．

2 $a \geqq 0$ とし，関数 $f(x) = 3|x^2 - 1|$ について，$S(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ とする．

(1) $S(0)$ を求めなさい．

(2) $S(a)$ を求めなさい．

(3) $S(a)$ を最小にする a の値を求めなさい．

3 3 つのベクトルを $\vec{a} = (p,\ 2)$，$\vec{b} = (-1,\ 3)$，$\vec{c} = (1,\ q)$ とする．

(1) $\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行で，$\vec{b} - \vec{c}$ と $\vec{a}$ は垂直であるとき，p，q の値を求めなさい．

(2) $\sqrt{2}\,|\vec{a}| = |\vec{b}|$ が成立し，$\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角が 60° であるとき，p，q の値を求めなさい．

4 $a \neq 0$ とし，曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $(e^a,\ a)$ における接線を l とする．ただし，対数は自然対数である．

(1) 接線 l の方程式を求めなさい．

(2) 接線 l，y 軸および直線 $y = a$ で囲まれた三角形の面積を S_1 とする．また，曲線 C，x 軸，y 軸および直線 $y = a$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1 = S_2$ となる a の値を求めなさい．

5 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を

$$S_n = -n^3 + 21n^2 + 65n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とする．

(1) 初項 a_1 を求めなさい．

(2) 一般項 a_n を求めなさい．

(3) $a_n > 151$ を満たす自然数 n の範囲を求めなさい．

6 座標平面上に 3 点 A(2, 0)，B(4, 0)，C(0, 4) がある．点 D(0, 1) を中心とする半径 1 の円の周上の点 P が，次の条件を満たすとき，点 P と直線 AC の距離を求めなさい．

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot (2\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

7 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を

$$S_n = -n^3 + 21n^2 + 65n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とする．

(1) 一般項 a_n を求めなさい．

(2) $a_n > 151$ を満たす自然数 n の範囲を求めなさい．

(3) $a_n > 151$ を満たす a_n について，それらの和を求めなさい．

8 n を正の整数とする．

(1) 整式 x^n を x^5-1 で割った余りを求めよ．

(2) 整式 $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$ を $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割った余りを求めよ．

9 曲線 $y=f(x)=x(4-x)$ 上に四点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$，$\mathrm{C}(3,\ 3)$ $(0<a<b<3)$ をとる．

(1) 四角形 OABC の面積が最大になるときの a，b の値を求めよ．

(2) 角 OAC の大きさが最小になるときの a の値を求めよ．

10 $f(x)=x^3-3x-5$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ はただ一つの実数解をもつことを示せ．さらに，この実数解を α とするとき，$2<\alpha<3$ をみたすことを示せ．

(2) $\alpha<t\leqq 3$ とし，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸との交点を $(s,\ 0)$ とするとき，$0<s-\alpha<\dfrac{1}{3}(t-\alpha)$ が成り立つことを示せ．

(3) $t_1=3$ とする．点 $(t_n,\ f(t_n))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸との交点を $(t_{n+1},\ 0)$ とする．このように数列 $\{t_n\}$ を定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n=\alpha$ が成り立つことを示せ．

解答例

1 (1) $2^{10} > 10^3$ より　$\log_{10} 2^{10} > \log_{10} 10^3$

ゆえに　$10\log_{10} 2 > 3$　よって　$\boldsymbol{\log_{10} 2 > 0.3}$

(2) $\log_{10} 2^{21} - \log_{10} 5^9 = 21\log_{10} 2 - 9\log_{10} \dfrac{10}{2}$

$$= 30\log_{10} 2 - 9 = 30(\log_{10} 2 - 0.3) > 0$$

ゆえに　$\log_{10} 2^{21} > \log_{10} 5^9$　よって　$\boldsymbol{2^{21} > 5^9}$

補足 $\dfrac{2^{21}}{5^9} = \dfrac{2^9 \cdot 2^{21}}{2^9 \cdot 5^9} = \left(\dfrac{2^{10}}{10^3}\right)^3 > 1$　よって　$2^{21} > 5^9$ ■

2 (1) $S(0) = \displaystyle\int_0^1 3|\,x^2 - 1\,|\,dx = -\int_0^1 (3x^2 - 3)\,dx = -\Big[\,x^3 - 3x\,\Big]_0^1 = \mathbf{2}$

(2) $3x^2 - 3$ の原始関数の 1 つを $F(x) = x^3 - 3x$ とおくと

(i) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} 3f(x)\,dx = -\Big[\,F(x)\,\Big]_a^1 + \Big[\,F(x)\,\Big]_1^{a+1} \\ &= F(a) + F(a+1) - 2F(1) \\ &= (a^3 - 3a) + (a^3 + 3a^2 - 2) - 2\cdot(-2) \\ &= 2a^3 + 3a^2 - 3a + 2 \end{aligned}$$

(ii) $a > 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^{a+1} = F(a+1) - F(a) \\ &= (a^3 + 3a^2 - 2) - (a^3 - 3a) = 3a^2 + 3a - 2 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S(a) = \begin{cases} 2a^3 + 3a^2 - 3a + 2 & (0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 3a^2 + 3a - 2 & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}}$

(3) $$S'(a)=\begin{cases} 6a^2+6a-3 & (0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 6a+3 & (a>1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$S'(a)=0$ とすると　$a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

(ii) $a>1$ のとき　$S'(a)=6a+3>0$

したがって，$S(a)$ の増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
S'(a)		$-$	0	$+$
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$S(a)$ を最小にする a の値は　$\boldsymbol{a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}}$ ■

3 (1) $\vec{a}-\vec{b}=(p+1,-1)$，$\vec{c}=(1,\ q)$，$(\vec{a}-\vec{b})//\vec{c}$ より

$$(p+1)q-(-1)\cdot 1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (p+1)q+1=0 \quad \cdots ①$$

$\vec{b}-\vec{c}=(-2,\ 3-q)$，$\vec{a}=(p,\ 2)$，$(\vec{b}-\vec{c})\perp\vec{a}$ より

$$-2p+(3-q)\cdot 2=0 \quad \text{ゆえに} \quad q=3-p \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$(p+1)(3-p)+1=0 \quad \text{整理すると} \quad p^2-2p-4=0$$

したがって　$p=1\pm\sqrt{5}$　これを ② に代入して　$q=2\mp\sqrt{5}$

よって　$\boldsymbol{(p,\ q)=(1\pm\sqrt{5},\ 2\mp\sqrt{5})}$ **(複号同順)**

(2) $\sqrt{2}|\vec{a}| = |\vec{b}|$ より，$2|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ であるから

$$2(p^2+4) = 1+9 \quad \text{これを解いて} \quad p = \pm 1$$

$\vec{a}-\vec{b} = (p+1, -1)$ と $\vec{c} = (1,\ q)$ のなす角が 60° より

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a}-\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ$$
$$p+1-q = \sqrt{(p+1)^2+1}\sqrt{1+q^2}\cdot\frac{1}{2}$$

(i) $p=1$ のとき

$$2(2-q) = \sqrt{5(1+q^2)} > 0$$

両辺を平方すると

$$4(2-q)^2 = 5(1+q^2) \quad \text{整理すると} \quad q^2+16q-11=0$$

これを解くと　$q = -8 \pm 5\sqrt{3}$
このとき，$2-q = 10 \mp 5\sqrt{3} = 2(2 \mp \sqrt{3}) > 0$ である．

(ii) $p=-1$ のとき

$$-2q = \sqrt{1+q^2} > 0$$

両辺を平方して整理すると　　$3q^2 = 1$

$q<0$ であるから　　$q = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

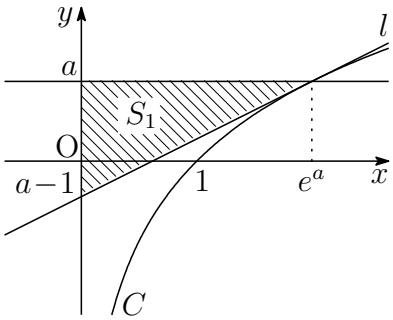
よって　　$\boldsymbol{(p,\ q) = (1, -8 \pm 5\sqrt{3}),\ \left(-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}$ ■

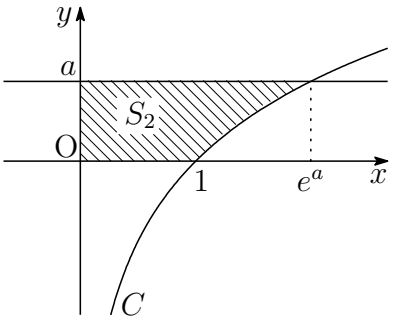
4 (1) $y = \log x$ より　$y' = \dfrac{1}{x}$

したがって，C 上の点 $(e^a,\ a)$ における接線の方程式は

$$y - a = \frac{1}{e^a}(x - e^a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{e^a}x + a - 1}$$

(2) (i) $a > 0$ のとき





上の図から　　$S_1 = \dfrac{1}{2}\{a - (a-1)\}e^a = \dfrac{e^a}{2}$

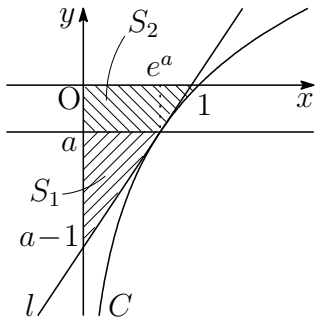
また，C は $x = e^y$ であるから

$$S_2 = \int_0^a e^y\,dy = \Big[\ e^y\ \Big]_0^a = e^a - 1$$

$S_1 = S_2$ のとき　$\dfrac{e^a}{2} = e^a - 1$　これを解いて　$a = \log 2$

(ii) $a < 0$ のとき

(i) と同様に　$S_1 = \dfrac{e^a}{2}$



$$S_2 = \int_a^0 e^y\,dy = \Big[\ e^y\ \Big]_a^0 = 1 - e^a$$

$S_1 = S_2$ のとき　$\dfrac{e^a}{2} = 1 - e^a$

これを解いて　　$a = \log\dfrac{2}{3}$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{a = \log 2,\ \log\dfrac{2}{3}}$ ■

5 (1) $a_1 = S_1 = -1 + 21 + 65 = \mathbf{85}$

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^3 + 21n^2 + 65n - \{(n-1)^3 + 21(n-1)^2 + 65(n-1)\} \\ &= -3n^2 + 45n + 43 \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つので　$\boldsymbol{a_n = -3n^2 + 45n + 43}$

(3) $a_n > 151$ より

$$-3n^2 + 45n + 43 > 151 \quad \text{ゆえに} \quad (n-3)(n-12) < 0$$

よって　$\boldsymbol{3 < n < 12}$　**(n は自然数)**

6 A(2, 0)，B(4, 0)，C(0, 4)，D(0, 1)，P(x, y) とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ 4),\quad 2\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2x-6,\ 2y)$$

これらを $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ に代入すると

$$-2(2x-6) + 4\cdot 2y = 4 + 16 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2(y-1) \quad \cdots ①$$

P は D を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すると

$$4(y-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

これを ① に代入すると　$x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　したがって　$\mathrm{P}\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

直線 AC の方程式は　$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$　すなわち　$2x + y - 4 = 0$

よって，点 P と直線 AC の距離は

$$\frac{\left|2\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) + 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}} - 4\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|\pm\sqrt{5} - 3|}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$

7 (1) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^3 + 21n^2 + 65n - \{(n-1)^3 + 21(n-1)^2 + 65(n-1)\} \\ &= -3n^2 + 45n + 43 \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つので　$\boldsymbol{a_n = -3n^2 + 45n + 43}$

(2) $a_n > 151$ より

$$-3n^2 + 45n + 43 > 151 \quad \text{ゆえに} \quad (n-3)(n-12) < 0$$

よって　$\boldsymbol{3 < n < 12}$　**(n は自然数)**

(3) (2) の結果から，求める和は

$$\begin{aligned} S_{11} - S_3 &= (-11^3 + 21 \cdot 11^2 + 65 \cdot 11) - (-3^3 + 21 \cdot 3^2 + 65 \cdot 3) \\ &= 1925 - 357 \\ &= \mathbf{1568} \end{aligned}$$

■

8 (1)
$$x^{n+5}-x^n=x^n(x^5-1)$$

x^{n+5} と x^n を x^5-1 で割った余りは等しいから，$m\equiv n \pmod 5$ のとき，x^m と x^n を x^5-1 で割った余りは等しい．

よって，n を 5 で割った余りを r とすると，x^n を x^5-1 で割った余りは，

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<r\leqq 4} \text{ のとき} & \text{余り } \boldsymbol{x^r} \\ \boldsymbol{r=0} \text{ のとき} & \text{余り } \boldsymbol{1} \end{cases}$$

(2) 整数 r，s を $1\leqq r,s\leqq 4$，$r\neq s$ とする．

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ に注意して

(i) $n\not\equiv 0 \pmod 5$ のとき，$rn\not\equiv sn \pmod 5$ であるから，(1) の結果から $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$ を x^5-1 で割った余りは，$x^4+x^3+x^2+x$ を x^5-1 で割った余りに等しいから

$$x^4+x^3+x^2+x=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot 1-1$$

したがって，求める余りは　-1

(ii) $n\equiv 0 \pmod 5$ のとき，(1) の結果から，$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$ を x^5-1 で割った余りは，$x^5+x^5+x^5+x^5=4x^5$ を x^5-1 で割った余りに等しいから

$$4x^5=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot 4(x-1)+4$$

したがって，求める余りは　4

よって
$$\begin{cases} \boldsymbol{n\not\equiv 0 \pmod 5} \text{ のとき} & \text{余り } \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{n\equiv 0 \pmod 5} \text{ のとき} & \text{余り } \boldsymbol{4} \end{cases}$$

解説 $n\not\equiv 0 \pmod 5$ のとき，$rn\equiv sn \pmod 5$ が成り立つ仮定すると

$$(r-s)n\equiv 0 \pmod 5$$

$r\neq s$，$-3\leqq r-s\leqq 3$，$n\not\equiv 0 \pmod 5$ であるから，矛盾．

法 5 について，n，$2n$，$3n$，$4n$ はどれも合同ではないので，これらは順序を無視すると，法 5 について，1，2，3，4 である．

したがって，x^n，x^{2n}，x^{3n}，x^{4n} を x^5-1 で割った余りは，順序を無視すると，x，x^2，x^3，x^4 で割った余りに等しい．

よって，$x^n+x^{2n}+x^{3n}+x^{4n}$ を x^5-1 で割った余りは，$x^4+x^3+x^2+x$ を x^5-1 で割った余りに等しい．■

9 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ a(4-a))$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b,\ b(4-b))$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3,\ 3)$ より
四角形 OABC の面積を S とすると，$0<a<b<3$ に注意して

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}\\&=\frac{1}{2}|a\cdot b(4-b)-a(4-a)\cdot b|+\frac{1}{2}|b\cdot 3-b(4-b)\cdot 3|\\&=\frac{1}{2}|ab(a-b)|+\frac{3}{2}|b(b-3)|\\&=\frac{1}{2}ab(b-a)+\frac{3}{2}b(3-b)=\frac{1}{2}(-ba^2+b^2a-3b^2+9b)\\&=-\frac{b}{2}\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{1}{8}(b^3-12b^2+36b)\end{aligned}$$

したがって，$a=\dfrac{b}{2}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{1}{8}(b^3-12b^2+36b)$ をとる．
ここで，$g(b)=b^3-12b^2+36b$ とおくと

$$g'(b)=3b^2-24b+36=3(b-2)(b-6)$$

$g(b)$ の増減表は次のようになる．

b	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$a=\dfrac{b}{2}=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{2}$ のとき，S は最大になる．

(2) $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ a(4-a))$，$\mathrm{C}(3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ a(4-a)),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3-a,\ a^2-4a+3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α，β とすると

$$\tan\alpha=\frac{a(4-a)}{a}=4-a,\quad \tan\beta=\frac{a^2-4a+3}{3-a}=1-a$$

$\theta=\angle\mathrm{OAC}$ とすると，$\theta=\pi-(\alpha-\beta)$ であるから

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan\{\pi-(\alpha-\beta)\}=-\tan(\alpha-\beta)\\&=-\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{4-a-(1-a)}{1+(4-a)(1-a)}\\&=-\frac{3}{a^2-5a+5}=\frac{3}{-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

θ が最小となるのは，$\tan\theta>0$ で，$\tan\theta$ が最小になるのときであるから

$$\boldsymbol{a=\frac{5}{2}}$$

■

10 (1) $f(x)=x^3-3x-5$ より　$f'(x)=3(x+1)(x-1)$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$

よって，$f(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつ．

$$f(2)=-3<0,\quad f(3)=13>0$$

$f(x)$ は連続であるから，$f(\alpha)=0$ となる $2<\alpha<3$ が存在する．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

この直線と x 軸との交点が $(s,\ 0)$ であるから

$$-f(t)=f'(t)(s-t)\quad \text{ゆえに}\quad s=t-\frac{f(t)}{f'(t)}$$

$s=t-\dfrac{t^3-3t-5}{3t^2-3}=\dfrac{2t^3+5}{3t^2-3}$ であるから

$$s-\alpha=\frac{2t^3+5}{3t^2-3}-\alpha=\frac{2t^3-3\alpha t^2+3\alpha+5}{3t^2-3}$$

$\alpha^3-3\alpha-5=0$ であるから，$3\alpha+5=\alpha^3$ より

$$s-\alpha=\frac{2t^3-3\alpha t^2+\alpha^3}{3t^2-3}=\frac{(t-\alpha)^2(2t+\alpha)}{3(t+1)(t-1)}\qquad\cdots(*)$$

$$\frac{s-\alpha}{t-\alpha}-\frac{1}{3}=\frac{(t-\alpha)(2t+\alpha)}{3(t+1)(t-1)}-\frac{1}{3}=\frac{t^2-\alpha t-\alpha^2+1}{3(t+1)(t-1)}\qquad\cdots(**)$$

ここで，$g(t)=t^2-\alpha t-\alpha^2+1$ とすると $(\alpha<t\leqq 3)$

$$g(t)=\left(t-\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\alpha^2+1$$

$2<\alpha<3$ より　$g(t)\leqq g(3)=-\alpha^2-3\alpha+10=-(\alpha+5)(\alpha-2)<0$

$2<\alpha<t\leqq 3$ より，$(*)$，$(**)$ および上式から

$$s-\alpha>0,\quad \frac{s-\alpha}{t-\alpha}-\frac{1}{3}<0\quad \text{よって}\quad 0<s-\alpha<\frac{1}{3}(t-\alpha)$$

(3) (2) の結果に $t = t_n$ とすると，$s = t_{n+1}$ であるから

$$0 < t_{n+1} - \alpha < \frac{1}{3}(t_n - \alpha)$$

$t_1 = 3$ より　　$0 < t_n - \alpha < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3 - \alpha)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3 - \alpha) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(t_n - \alpha) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \alpha$$

■