

平成 15 年度 大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工・経済・教育福祉 平成 15 年 2 月 25 日

- 工学部 ① ② ③ ④ 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部 ① ⑤ ⑥ ⑦ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部 ① ③ ⑤ 数 I・II・A・B (80 分)

① 等差数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 + a_3 + a_5 = 66, a_2 + a_4 + a_6 = 54$$

を満たしているとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 初項 a_1 と公差 d を求めなさい。
- (2) 初項から第 n 項までの和が最大となるとき、その最大値と n の値を求めなさい。
- (3) 第 $n+1$ 項から第 $2n$ 項までの和をその項数で割った値が -99 より小さくなるような n の最小値を求めなさい。

② n を自然数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) A^2, A^3 を求めなさい。
- (2) A^n を推定し、それが正しいことを数学的帰納法によって証明しなさい。
- (3) A^n の逆行列が存在するための条件と、そのときの A^n の逆行列を求めなさい。

③ $\triangle OAB$ において、 $OA = 1, OB = \sqrt{2}, \angle AOB = 90^\circ$ とする。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P 、線分 OP を P の方へ延長してその上の点を Q とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $\triangle PQB = 2\triangle POA$ のとき、 \overrightarrow{OQ} を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} で表しなさい。
- (2) $\angle OQA = \angle OQB$ のとき、 $OP:PQ$ を求めなさい。

4 $b > 0$ とし、関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + (a-1)x$ が $x=0$ で極値をとる。さらに、曲線 $C: y = f(x)$ と x 軸との交点のうち、原点と異なるものを P とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) a の値と交点 P の座標を求めよ。
- (2) 交点 P における C の接線と、曲線 C で囲まれる図形の面積 S_1 を求めなさい。
- (3) x 軸と、曲線 C で囲まれる図形の面積を S_2 とするとき、 $S_1 : S_2$ は b の値にかかわらず一定であることを示しなさい。

5 等式

$$f(x) = x^2 - \int_{-2}^1 2xf(t) dt$$

を満たす関数 $f(x)$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $f(x)$ を求めなさい。
- (2) $\int_{-2}^1 |f(x)| dx$ を求めなさい。
- (3) k を実数とすると、直線 $y = x + k$ と曲線 $y = |f(x)|$ との共有点の個数を求めなさい。

6 複素数平面上の2点を $A(-1+i)$, $B(2+i)$ とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 線分 AB を一辺とする正三角形 ABC の頂点 $C(\gamma)$ を表す複素数 γ を求めなさい。
- (2) 点 $P(z)$ が線分 AB 上を A から B まで動く。このとき複素数 iz^2 が表す点は、複素数平面上でどのような図形をえがくか図示しなさい。

7 $a \neq 0$ とする。関数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + bx^2 + ax + 1$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = f(x)$ が異なる2つの極値をとる条件を求め、それを満たす点 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示しなさい。
- (2) 曲線 $C: y = f(x)$ と y 軸との交点を P とする。曲線 C の点 P における接線と曲線 C との交点のうち、 P とは異なる点を Q とするとき、交点 Q の座標を求めなさい。

解答例

1 (1) $a_1 + a_3 + a_5 = 66$ より $a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 66$
 $a_2 + a_4 + a_6 = 54$ より $(a_1 + d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 54$
すなわち $\begin{cases} a_1 + 2d = 22 \\ a_1 + 3d = 18 \end{cases}$ これを解いて $a_1 = 30, d = -4$

(2) (1)の結果から $a_n = 30 + (n-1) \cdot (-4) = 34 - 4n \geq 0$
 n が自然数であることに注意してこれを解くと $n \leq 8$
よって、 $n = 8$ のとき、求める最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \{2 \cdot 30 + (8-1) \cdot (-4)\} = 128$$

(3) $S_n = \frac{1}{2}n\{30 \cdot 2 + (n-1) \cdot (-4)\} = 2n(16-n)$

また $S_{2n} = 2 \cdot 2n(16-2n) = 8n(8-n)$

したがって、第 $n+1$ 項から第 $2n$ 項までの和は

$$S_{2n} - S_n = 8n(8-n) - 2n(16-n) = n(32-6n)$$

ゆえに $\frac{n(32-6n)}{n} < -99$ これを解いて $n > \frac{131}{6}$

$\frac{131}{6} = 21.8\dots$ であるから、求める n の最小値は **22** ■

$$\boxed{2} \quad (1) \quad A^2 = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 - a^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 - a^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & b^3 - a^3 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から } A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n - a^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ と推定する.}$$

i) $n = 1$ のとき, $(*)$ は明らかに成り立つ.

ii) $n = k$ のとき

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & b^k - a^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \\ &= \begin{pmatrix} a^k & b^k - a^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & a^k(b-a) + (b^k - a^k)b \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & b^{k+1} - a^{k+1} \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i), ii) より, $(*)$ はすべての自然数 n について成り立つ.

(3) A^n が逆行列をもつための条件は

$$\det(A^n) = a^n b^n \neq 0 \quad \text{すなわち} \quad ab \neq 0$$

$$\text{よって} \quad (A^n)^{-1} = \frac{1}{a^n b^n} \begin{pmatrix} b^n & a^n - b^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$



3 (1) $\angle APO = \angle BPQ = \theta$ とおくと

$$\triangle PQB = \frac{1}{2}PB \cdot PQ \sin \theta, \quad \triangle POA = \frac{1}{2}OP \cdot AP \sin \theta$$

$$\triangle PQB = 2\triangle POA \text{ より } PB \cdot PQ = 2OP \cdot AP$$

$$\text{また, } AP = 2PB \text{ より } PQ = 4OP$$

$$\text{よって } \vec{OQ} = 5\vec{OP} = 5 \times \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{3} = \frac{5}{3}\vec{OA} + \frac{10}{3}\vec{OB}$$

(2) $\angle OQA = \angle OQB$ より

$$AQ : BQ = AP : BP = 2 : 1$$

$$\text{したがって } |\vec{AQ}|^2 = 4|\vec{BQ}|^2 \quad \dots (*)$$

ここで, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ とおくと

$$|\vec{a}|^2 = 1, \quad |\vec{b}|^2 = 2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \dots (**)$$

条件から, $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ とおくと ($k > 1$)

$$\vec{OQ} = k \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right) = \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b}$$

$$\vec{AQ} = \vec{OQ} - \vec{OA}$$

$$= \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b} - \vec{a} = \left(\frac{k}{3} - 1 \right) \vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b}$$

$$\vec{BQ} = \vec{OQ} - \vec{OB}$$

$$= \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b} - \vec{b} = \frac{k}{3}\vec{a} + \left(\frac{2k}{3} - 1 \right) \vec{b}$$

$$(**) \text{ により } |\vec{AQ}|^2 = \left(\frac{k}{3} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2k}{3} \right)^2 \cdot 2 = k^2 - \frac{2}{3}k + 1$$

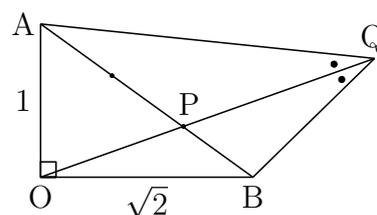
$$|\vec{BQ}|^2 = \left(\frac{k}{3} \right)^2 + \left(\frac{2k}{3} - 1 \right)^2 \cdot 2 = k^2 - \frac{8}{3}k + 2$$

$$\text{上の2式を } (*) \text{ に代入すると } k^2 - \frac{2}{3}k + 1 = 4 \left(k^2 - \frac{8}{3}k + 2 \right)$$

$$\text{整理すると } 3k^2 - 10k + 7 = 0 \quad \text{すなわち } (k-1)(3k-7) = 0$$

$$k > 1 \text{ に注意して, これを解くと } k = \frac{7}{3}$$

$$\text{したがって } \vec{OQ} = \frac{7}{3}\vec{OP} \quad \text{よって } \mathbf{OP : PQ = 3 : 4}$$



- 4 (1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + (a-1)x$ を微分すると $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + a - 1$
 $x = 0$ で極値をもつことから, $f'(0) = 0$ より $a = 1$
 逆に, $a = 1$ のとき $f'(x) = 3x^2 + 2bx = x(3x + 2b)$
 $b > 0$ より, $x = 0$ の前後で $f'(x)$ の符号が負から正に変わるから,
 $f(x)$ は $x = 0$ で極小値をとる. よって $a = 1$
 このとき, $f(x) = 0$ とすると $x^2(x+b) = 0$
 よって, C の x 軸との交点のうち, 原点と異なる点 P の座標は $(-b, 0)$

- (2) (1) の結果から $f'(-b) = b^2$
 したがって, C の P における接線の方程式は

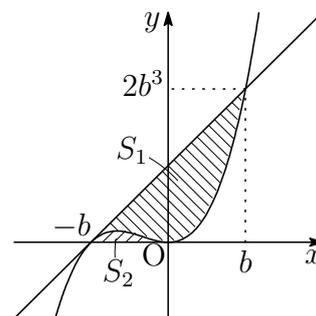
$$y = b^2(x+b) \quad \text{すなわち} \quad y = b^2x + b^3$$

C とこの接線の共有点の x 座標は

$$x^3 + bx^2 = b^2x + b^3$$

ゆえに $(x+b)^2(x-b) = 0$ これを解いて $x = -b, b$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S_1 &= \int_{-b}^b \{b^2x + b^3 - (x^3 + bx^2)\} dx \\ &= 2 \int_0^b (-bx^2 + b^3) dx \\ &= 2 \left[-\frac{b}{3}x^3 + b^3x \right]_0^b = \frac{4}{3}b^4 \end{aligned}$$



- (3) 上の図から

$$S_2 = \int_{-b}^0 (x^3 + bx^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{b}{3}x^3 \right]_{-b}^0 = \frac{1}{12}b^4$$

$$\text{したがって} \quad S_1 : S_2 = \frac{4}{3}b^4 : \frac{1}{12}b^4 = 16 : 1$$

よって, $S_1 : S_2$ は b の値にかかわらず一定である. ■

5 (1) $f(x) = x^2 - 2x \int_{-2}^1 f(t) dt$ より, $k = \int_{-2}^1 f(t) dt$ とおくと

$$f(x) = x^2 - 2kx$$

したがって $k = \int_{-2}^1 (t^2 - 2kt) dt$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - kt^2 \right]_{-2}^1 = 3k + 3$$

ゆえに $k = 3k + 3$ これを解いて $k = -\frac{3}{2}$

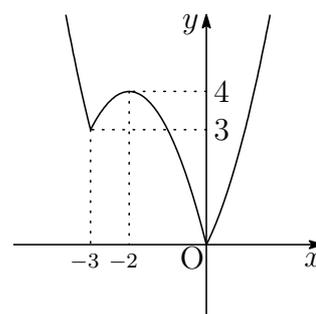
よって $f(x) = x^2 + 3x$

(2) $\int_{-2}^1 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 (-x^2 - 3x) dx + \int_0^1 (x^2 + 3x) dx$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{31}{6}$$

- (3) 直線 $y = x + k$ と曲線 $y = |f(x)|$ との共有点の個数は, 曲線 $y = |f(x)| - x$ と直線 $y = k$ との共有点の個数に等しい.

$$y = |f(x)| - x = \begin{cases} x^2 + 2x & (x \leq -3, 0 \leq x) \\ -x^2 - 4x & (-3 \leq x \leq 0) \end{cases}$$



よって	$k < 0$ のとき	共有点 0 個
	$k = 0$ のとき	共有点 1 個
	$0 < k < 3, 4 < k$ のとき	共有点 2 個
	$k = 3, 4$ のとき	共有点 3 個
	$3 < k < 4$ のとき	共有点 4 個



6 (1) $\alpha = -1 + i$, $\beta = 2 + i$ とすると

$$\begin{aligned}\gamma - \alpha &= (\beta - \alpha) \left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ \gamma - (-1 + i) &= \{(2 + i) - (-1 + i)\} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ \gamma &= \frac{1}{2} + \left(1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) i\end{aligned}$$

(2) 線分 AB 上の点 P(z) は

$$z = t + i \quad (-1 \leq t \leq 2)$$

とおけるから

$$iz^2 = i(t + i)^2 = i(t^2 - 1 + 2ti) = -2t + (t^2 - 1)i$$

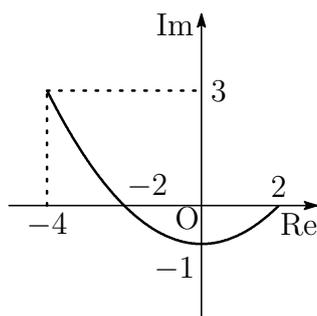
$iz^2 = x + yi$ とおくと

$$x = -2t, \quad y = t^2 - 1 \quad (-1 \leq t \leq 2)$$

上の 2 式から t を消去すると

$$y = \frac{x^2}{4} - 1 \quad (-4 \leq x \leq 2)$$

よって, iz^2 を複素数平面上にえがくと



7 (1) $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + bx^2 + ax + 1$ を微分すると

$$f'(x) = ax^2 + 2bx + a$$

このとき、方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつから

$$b^2 - a \cdot a > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b+a)(b-a) > 0$$

$$\text{したがって} \quad (b+a)(b-a) > 0$$

点 (a, b) の範囲は、右の図のようになる。ただし、境界線は含まない。

(2) $f(0) = 1, f'(0) = a$ であるから、 C の $P(0, 1)$ における接線の方程式は

$$y = ax + 1$$

C とこの直線の方程式から、連立方程式

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x^3 + bx^2 + ax + 1 \\ y = ax + 1 \end{cases}$$

これを解いて $(x, y) = (0, 1), \left(-\frac{3b}{a}, -3b + 1\right)$

よって、点 Q の座標は $\left(-\frac{3b}{a}, -3b + 1\right)$ ■

