平成15年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉科学部　平成15年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数II・III・A・B・C(100分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数II・A・B (100分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数II・A・B (80分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 等差数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 + a_3 + a_5 = 66,\ a_2 + a_4 + a_6 = 54$$

を満たしているとき，次の問いに答えなさい．

(1) 初項 a_1 と公差 d を求めなさい．

(2) 初項から第 n 項までの和が最大となるとき，その最大値と n の値を求めなさい．

(3) 第 $n+1$ 項から第 $2n$ 項までの和をその項数で割った値が -99 より小さくなるような n の最小値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を自然数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) A^2，A^3 を求めなさい．

(2) A^n を推定し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明しなさい．

(3) A^n の逆行列が存在するための条件と，そのときの A^n の逆行列を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$OAB において，OA $= 1$，OB $= \sqrt{2}$，$\angle$AOB $= 90^\circ$ とする．辺 AB を $2:1$ に内分する点を P，線分 OP を P の方へ延長してその上の点を Q とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) $\triangle\mathrm{PQB} = 2\triangle\mathrm{POA}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表しなさい．

(2) $\angle\mathrm{OQA} = \angle\mathrm{OQB}$ のとき，OP : PQ を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $b>0$ とし，関数 $f(x)=ax^3+bx^2+(a-1)x$ が $x=0$ で極値をとる．さらに，曲線 $C: y=f(x)$ と x 軸との交点のうち，原点と異なるものを P とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) a の値と交点 P の座標を求めよ．

(2) 交点 P における C の接線と，曲線 C で囲まれる図形の面積 S_1 を求めなさい．

(3) x 軸と，曲線 C で囲まれる図形の面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ は b の値にかかわらず一定であることを示しなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 等式

$$f(x)=x^2-\int_{-2}^{1}2xf(t)\,dt$$

を満たす関数 $f(x)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx$ を求めなさい．

(3) k を実数とするとき，直線 $y=x+k$ と曲線 $y=|f(x)|$ との共有点の個数を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 複素数平面上の 2 点を A$(-1+i)$，B$(2+i)$ とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) 線分 AB を一辺とする正三角形 ABC の頂点 C(γ) を表す複素数 γ を求めなさい．

(2) 点 P(z) が線分 AB 上を A から B まで動く．このとき複素数 iz^2 が表す点は，複素数平面上でどのような図形をえがくか図示しなさい．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $a\neq 0$ とする．関数 $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3+bx^2+ax+1$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $y = f(x)$ が異なる 2 つの極値をとる条件を求め，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示しなさい．

(2) 曲線 $C: y=f(x)$ と y 軸との交点を P とする．曲線 C の点 P における接線と曲線 C との交点のうち，P とは異なる点を Q とするとき，交点 Q の座標を求めなさい．

正解

$\boxed{1}$ (1) $a_1+a_3+a_5=66$ より　$a_1+(a_1+2d)+(a_1+4d)=66$

$a_2+a_4+a_6=54$ より　$(a_1+d)+(a_1+3d)+(a_1+5d)=54$

すなわち　$\begin{cases} a_1+2d=22 \\ a_1+3d=18 \end{cases}$　これを解いて　$\boldsymbol{a_1=30,\ d=-4}$

(2) (1) の結果から　$a_n=30+(n-1)\cdot(-4)=34-4n \geqq 0$

n が自然数であることに注意してこれを解くと　$n \leqq 8$

よって，$\boldsymbol{n=8}$ のとき，求める最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot 8\{2\cdot 30+(8-1)\cdot(-4)\}=\mathbf{128}$$

(3) $S_n=\dfrac{1}{2}n\{30\cdot 2+(n-1)\cdot(-4)\}=2n(16-n)$

また　$S_{2n}=2\cdot 2n(16-2n)=8n(8-n)$

したがって，第 $n+1$ 項から第 $2n$ 項までの和は

$$S_{2n}-S_n=8n(8-n)-2n(16-n)=n(32-6n)$$

ゆえに　$\dfrac{n(32-6n)}{n}<-99$　これを解いて　$n>\dfrac{131}{6}$

$\dfrac{131}{6}=21.8\cdots$ であるから，求める n の最小値は　**22**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $A^2 = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2-a^2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b^2} \end{pmatrix}$,

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} a^2 & b^2-a^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{b^3-a^3} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b^3} \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果から $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n-a^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \cdots (*)$ と推定する.

i) $n=1$ のとき，$(*)$ は明らかに成り立つ.

ii) $n=k$ のとき

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & b^k-a^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA \\ &= \begin{pmatrix} a^k & b^k-a^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & a^k(b-a)+(b^k-a^k)b \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & b^{k+1}-a^{k+1} \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i), ii) より，$(*)$ はすべての自然数 n について成り立つ.

(3) A^n が逆行列をもつための条件は

$$\det(A^n) = a^nb^n \neq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{ab \neq 0}$$

よって $\quad \boldsymbol{(A^n)^{-1} = \dfrac{1}{a^nb^n}\begin{pmatrix} b^n & a^n-b^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}$

3 (1) $\angle\mathrm{APO} = \angle\mathrm{BPQ} = \theta$ とおくと

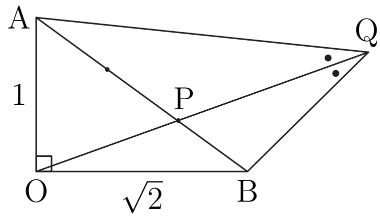
$$\triangle\mathrm{PQB} = \frac{1}{2}\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PQ}\sin\theta, \quad \triangle\mathrm{POA} = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta$$

$\triangle\mathrm{PQB} = 2\triangle\mathrm{POA}$ より　　$\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PQ} = 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{AP}$

また，$\mathrm{AP} = 2\mathrm{PB}$ より　　$\mathrm{PQ} = 4\mathrm{OP}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 5\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 5 \times \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{10}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

(2) $\angle\mathrm{OQA} = \angle\mathrm{OQB}$ より



$$\mathrm{AQ} : \mathrm{BQ} = \mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 2 : 1$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 = 4|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2 \quad \cdots(*)$

ここで，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$|\vec{a}|^2 = 1, \quad |\vec{b}|^2 = 2, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \cdots(**)$$

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと $(k > 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b} - \vec{a} = \left(\frac{k}{3} - 1\right)\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{\mathrm{BQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b} - \vec{b} = \frac{k}{3}\vec{a} + \left(\frac{2k}{3} - 1\right)\vec{b}\end{aligned}$$

$(**)$ により　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 = \left(\dfrac{k}{3} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{2k}{3}\right)^2\cdot 2 = k^2 - \dfrac{2}{3}k + 1$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2 = \left(\frac{k}{3}\right)^2 + \left(\frac{2k}{3} - 1\right)^2\cdot 2 = k^2 - \frac{8}{3}k + 2$$

上の2式を $(*)$ に代入すると　$k^2 - \dfrac{2}{3}k + 1 = 4\left(k^2 - \dfrac{8}{3}k + 2\right)$

整理すると　$3k^2 - 10k + 7 = 0$　すなわち　$(k-1)(3k-7) = 0$

$k > 1$ に注意して，これを解くと　　$k = \dfrac{7}{3}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{7}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　　よって　$\mathbf{OP : PQ = 3 : 4}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=ax^3+bx^2+(a-1)x$ を微分すると　$f'(x)=3ax^2+2bx+a-1$

$x=0$ で極値をもつことから，$f'(0)=0$ より　$a=1$

逆に，$a=1$ のとき　$f'(x)=3x^2+2bx=x(3x+2b)$

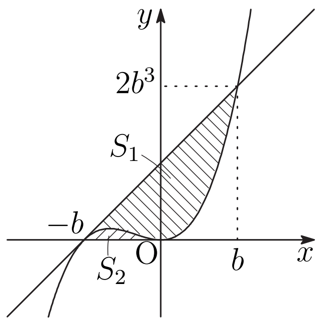
$b>0$ より，$x=0$ の前後で $f'(x)$ の符号が負から正に変わるから，

$f(x)$ は $x=0$ で極小値をとる．よって　　$\boldsymbol{a=1}$

このとき，$f(x)=0$ とすると　　$x^2(x+b)=0$

よって，C の x 軸との交点のうち，原点と異なる点 P の座標は　$\boldsymbol{(-b,\ 0)}$

(2) (1) の結果から　　$f'(-b)=b^2$



したがって，C の P における接線の方程式は

$$y=b^2(x+b)\quad すなわち\quad y=b^2x+b^3$$

C とこの接線の共有点の x 座標は

$$x^3+bx^2=b^2x+b^3$$

ゆえに　$(x+b)^2(x-b)=0$　　これを解いて　$x=-b,\ b$

よって

$$\begin{aligned}S_1&=\int_{-b}^{b}\{b^2x+b^3-(x^3+bx^2)\}\,dx\\&=2\int_0^b(-bx^2+b^3)\,dx\\&=2\Big[-\frac{b}{3}x^3+b^3x\Big]_0^b=\boldsymbol{\frac{4}{3}b^4}\end{aligned}$$

(3) 上の図から

$$S_2=\int_{-b}^{0}(x^3+bx^2)\,dx=\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{b}{3}x^3\Big]_{-b}^{0}=\frac{1}{12}b^4$$

したがって　　$S_1:S_2=\dfrac{4}{3}b^4:\dfrac{1}{12}b^4=\mathbf{16:1}$

よって，$S_1:S_2$ は b の値にかかわらず一定である．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=x^2-2x\displaystyle\int_{-2}^{1}f(t)\,dt$ より，$k=\displaystyle\int_{-2}^{1}f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x)=x^2-2kx$$

したがって　$k=\displaystyle\int_{-2}^{1}(t^2-2kt)\,dt$

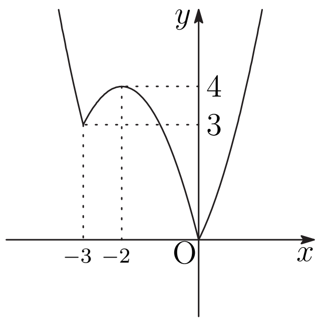
$$=\left[\frac{t^3}{3}-kt^2\right]_{-2}^{1}=3k+3$$

ゆえに　$k=3k+3$　これを解いて　$k=-\dfrac{3}{2}$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3x}$

(2)
$$\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx=\int_{-2}^{0}(-x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\boldsymbol{\frac{31}{6}}$$

(3) 直線 $y=x+k$ と曲線 $y=|f(x)|$ との共有点の個数は，曲線 $y=|f(x)|-x$ と直線 $y=k$ との共有点の個数に等しい．



$$y=|f(x)|-x$$
$$=\begin{cases}x^2+2x & (x\leqq-3,\ 0\leqq x)\\ -x^2-4x & (-3\leqq x\leqq 0)\end{cases}$$

よって
$k<0$ のとき　共有点 0 個
$k=0$ のとき　共有点 1 個
$0<k<3,\ 4<k$ のとき　共有点 2 個
$k=3,\ 4$ のとき　共有点 3 個
$3<k<4$ のとき　共有点 4 個

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\alpha=-1+i,\ \beta=2+i$ とすると

$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\gamma-(-1+i)=\{(2+i)-(-1+i)\}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\gamma=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\left(1\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i}$$

(2) 線分 AB 上の点 P(z) は

$$z=t+i\qquad(-1\leqq t\leqq 2)$$

とおけるから

$$iz^2=i(t+i)^2=i(t^2-1+2ti)=-2t+(t^2-1)i$$

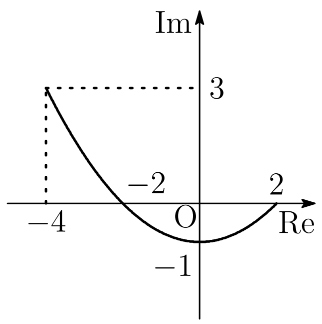
$iz^2=x+yi$ とおくと

$$x=-2t,\quad y=t^2-1\qquad(-1\leqq t\leqq 2)$$

上の 2 式から t を消去すると

$$y=\frac{x^2}{4}-1\quad(-4\leqq x\leqq 2)$$

よって，iz^2 を複素数平面上にえがくと



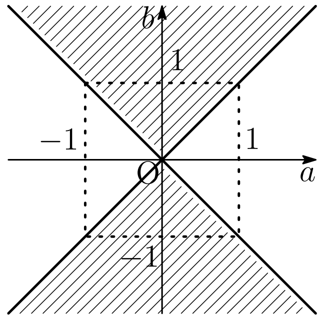
$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3+bx^2+ax+1$ を微分すると

$$f'(x)=ax^2+2bx+a$$

このとき，方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつから

$$b^2-a\cdot a>0 \quad ゆえに \quad (b+a)(b-a)>0$$

したがって　　$(b+a)(b-a)>0$



点 $(a,\ b)$ の範囲は，右の図のようになる．ただし，境界線は含まない．

(2) $f(0)=1$，$f'(0)=a$ であるから，C の $\mathrm{P}(0,\,1)$ における接線の方程式は

$$y=ax+1$$

C とこの直線の方程式から，連立方程式

$$\begin{cases} y=\dfrac{a}{3}x^3+bx^2+ax+1 \\ y=ax+1 \end{cases}$$

これを解いて　$(x,\ y)=(0,\ 1),\ \left(-\dfrac{3b}{a},\ -3b+1\right)$

よって，点 Q の座標は　　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{3b}{a}, -3b+1\right)}$