平成 14 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉科学部　平成 14 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 II・III・A・B・C(100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ (1)(2), $\boxed{5}$ 数 II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 数 II・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 条件 $a_1 = 0$，$na_{n+1} = (n+1)a_n + 2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列を $\{a_n\}$ とし，条件 $b_1 = 1$，$nb_{n+1} = (n+1)b_n + n(n+1)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列を $\{b_n\}$ とする．

(1) a_n，b_n を表す n の式を推定し，それらが正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(2) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる数を小さい順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とするとき，c_n を表す n の式を求め，簡潔にその理由を述べなさい．

(3) $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $y = ax^2 - b$ が，3 点 A$(0, -2)$，B$(2,\ 0)$，C$(-2,\ 0)$ を頂点とする $\triangle$ABC の 2 辺 AB，AC に接している．ただし，接点は三角形の頂点上にないものとする．

(1) a と b の関係式および，a と b それぞれの値の範囲を求めなさい．

(2) $a = b$ のとき，この放物線と $\triangle$ABC の辺 BC とで囲まれた図形の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 の 3 乗根のうち，実数でないものの 1 つを α とするとき，複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(α^2) を頂点する $\triangle$ABC の重心が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で表される．

(1) 点 B を表す複素数 β を求めなさい．

(2) $\triangle$ABC の外接円の周上の点を表す複素数を z とするとき，z の満たす式を求めなさい．

(3) z が (2) で求めた式を満たすとき，$w = \dfrac{1}{\bar{z}}$ を満たす点 w のえがく図形を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を定数とし，2 つの関数を $f(x) = xe^{-x}$，$g(x) = ax$ とする．

(1) 関数 $h(x) = f(x) - g(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めなさい．

(2) 曲線 $C : y = f(x)$ と直線 $l : y = g(x)$ が 2 点で交わるとき，この曲線 C と直線 l とで囲まれる部分の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 点 O を原点とする空間の 2 点 A(1, 3, 5)，B(6, −2, 10) の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とし，直線 AB 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とする．

(1) $|\vec{p}|$ が最小となる点 P を求めなさい．

(2) (1) で求めた点 P に対して，△OAP の面積を求めなさい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件式から

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n+\frac{2}{n},\quad b_{n+1}=\frac{n+1}{b}b_n+n+1 \quad \cdots(*)$$

上式から　$a_1=0,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=6,$

$b_1=1,\ b_2=4,\ b_3=9,\ b_4=16$

これから，$a_n=2n-2$，$b_n=n^2$ と推定する．

［I］$n=1$ のとき　$a_1=2{\cdot}1-2=0$，$b_1=1^2=1$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［II］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{k+1}{k}(2k-2)+\frac{2}{k}=2(k+1)-2$$
$$b_{k+1}=\frac{k+1}{k}{\cdot}k^2+k+1=(k+1)^2$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［I］，［II］から，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $\{a_n\}$ は 0 以上の偶数列であり，$\{b_n\}$ は平方数の列であるから，
$\{c_n\}$ は偶数の平方数の列である．

よって　$c_n=(2n)^2=\boldsymbol{4n^2}$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\boldsymbol{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}$$

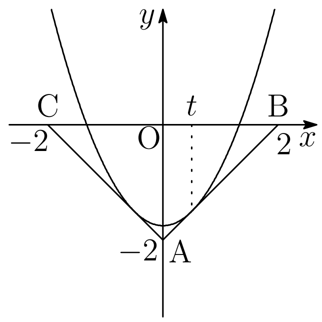
補足 漸化式から　$\dfrac{a_{n+1}+2}{n+1}=\dfrac{a_n+2}{n},\quad \dfrac{b_{n+1}}{n+1}=\dfrac{b_n}{n}+1$

第 1 式から　$\dfrac{a_n+2}{n}=\dfrac{a_1+2}{1}$　ゆえに　$a_n=2n-2$

第 2 式から，$\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{b_1}{1}=1$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{b_n}{n}=1+(n-1){\cdot}1 \quad \text{よって} \quad b_n=n^2$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 放物線 $y=ax^2-b$ および $\triangle$ABC はともに y 軸に関して対称であるから，これらが辺 AB で接する条件を求める．$f(x)=ax^2-b$ とし，線分 AB 上の接点を $(t,\ t-2)$ とすると $(0<t<2)$



$$f(t)=2-t,\quad f'(t)=1$$

第 1 式から　$at^2-b=t-2$　$\cdots$①

$f'(x)=2ax$ より，第 2 式から　$2at=1$　$\cdots$②

② から　$a=\dfrac{1}{2t}$　$\cdots$②$'$　これを ① に代入すると

$$\frac{1}{2t}\cdot t^2-b=t-2 \quad \text{ゆえに} \quad b=2-\frac{t}{2} \quad \cdots③$$

$0<t<2$ であるから，②$'$，③ より　$\boldsymbol{a>\dfrac{1}{4},\ 1<b<2}$

②$'$，③ から t を消去すると　$\boldsymbol{b=2-\dfrac{1}{4a}}$

(2) $a=b$ のとき，(1) の結果から

$$a=2-\frac{1}{4a} \quad \text{整理すると} \quad 4a^2-8a+1=0$$

$a>\dfrac{1}{4}$ に注意して，これを解くと　$a=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

また，放物線 $y=ax^2-a$ と x 軸との交点の x 座標は　$x=\pm1$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=-\int_{-1}^{1}(ax^2-a)\,dx\\&=-a\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx\\&=\frac{a}{6}(1+1)^3=\frac{4}{3}a=\boldsymbol{\frac{4+2\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 1 の 3 乗根は方程式

$$x^3 = 1 \quad \text{すなわち} \quad (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

の解で，このうち，実数でない解の 1 つが α であるから

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 = -\alpha - 1$$

$\overline{\alpha}$ も 2 次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \overline{\alpha} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \overline{\alpha} = -\alpha - 1$$

したがって，$\alpha^2 = \overline{\alpha}$．3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\overline{\alpha})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるから

$$\frac{\alpha + \overline{\alpha} + \beta}{3} = \frac{-1+\beta}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\beta = \sqrt{3} + 1}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を γ とする．$|\alpha - \gamma| = |\overline{\alpha} - \gamma|$ より

$$|\alpha - \gamma|^2 = |\overline{\alpha} - \gamma|^2 \quad \text{すなわち} \quad (\alpha - \overline{\alpha})(\gamma - \overline{\gamma}) = 0$$

α は実数ではないので，$\alpha \neq \overline{\alpha}$．ゆえに $\gamma = \overline{\gamma}$ より，γ は実数である．
また，$|\alpha - \gamma| = |\beta - \gamma|$ より

$$\begin{aligned} |\alpha - \gamma|^2 &= |\beta - \gamma|^2 \\ \alpha\overline{\alpha} - (\alpha + \overline{\alpha})\gamma &= \beta^2 - 2\beta\gamma \\ 1 - (-1)\gamma &= (\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)\gamma \\ (3 + 2\sqrt{3})\gamma &= 3 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

ゆえに，$\gamma = 1$ となり，円の半径は $|\beta - \gamma| = \sqrt{3}$
よって，求める外接円は $\quad \boldsymbol{|z - 1| = \sqrt{3}}$

(3) $w = \dfrac{1}{z}$ より $z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ を (2) の結果に代入すると $\quad \left|\dfrac{1}{\overline{w}} - 1\right| = \sqrt{3}$

これを平方すると $\quad \left|\dfrac{1}{\overline{w}} - 1\right|^2 = 3 \quad$ ゆえに $\quad 2w\overline{w} + w + \overline{w} = 1$

したがって $\quad \left(w + \dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{w} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4} \quad$ すなわち $\quad \left|w + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，w は**中心** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$**，半径** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ **の円**である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $h(x)=f(x)-g(x)=xe^{-x}-ax$ より

$$h'(x)=(1-x)e^{-x}-a$$
$$h''(x)=(x-2)e^{-x}$$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h''(x)$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}-a$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty}h'(x)=\infty,\quad h'(2)=-\frac{1}{e^2}-a$$

$h(x)$ が $x=x_0$ で極値をとるとき，$x=x_0$ の前後で $h'(x)$ の符号が変化する．このための条件は，$h'(2)<0$ であるから

$$-\frac{1}{e^2}-a<0\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{a>-\frac{1}{e^2}}$$

(2) 曲線 C と直線 l の共有点の x 座標は，$h(x)=0$ より

$$x(e^{-x}-a)=0$$

C と l が異なる 2 点で交わるとき，$a>0$ であり，その共有点の x 座標は

$$x=0,-\log a$$

(i) $0<a<1$ のとき，$0<x<-\log a$ において

$x>0$，$e^{-x}>a$ であるから　　$h(x)>0$

したがって，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{-\log a}h(x)\,dx&=\int_0^{-\log a}x(e^{-x}-a)\,dx\\&=\Big[-e^{-x}(x+1)-\frac{a}{2}x^2\Big]_0^{-\log a}\\&=a(\log a-1)-\frac{a}{2}(\log a)^2+1\end{aligned}$$

(ii) $a>1$ のとき，$-\log a<x<0$ において

$x<0$，$e^{-x}<a$ であるから　　$h(x)>0$

したがって，求める面積は，(i) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\int_{-\log a}^{0}h(x)\,dx&=-\int_0^{-\log a}h(x)\,dx\\&=-a(\log a-1)+\frac{a}{2}(\log a)^2-1\end{aligned}$$

よって
$$\begin{cases}\boldsymbol{a(\log a-1)-\frac{a}{2}(\log a)^2+1} & \textbf{(}\boldsymbol{0<a<1}\,\textbf{のとき)}\\ \boldsymbol{-a(\log a-1)+\frac{a}{2}(\log a)^2-1} & \textbf{(}\boldsymbol{a>1}\,\textbf{のとき)}\end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6, -2,\ 10) - (1,\ 3,\ 5) = 5(1, -1,\ 1)$

直線 AB 上の点 P の位置ベクトルを

$$\vec{p} = (1,\ 3,\ 5) + t(1, -1,\ 1) = (t+1, -t+3,\ t+5)$$

とおくと (t は媒介変数)，このとき

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= (t+1)^2 + (-t+3)^2 + (t+5)^2 \\ &= 3t^2 + 6t + 35 \\ &= 3(t+1)^2 + 32 \end{aligned}$$

$|\vec{p}|$ が最小となるとき　$t = -1$　ゆえに　$\vec{p} = (0,\ 4,\ 4)$

よって　　**P(0，4，4)**

(2) (1) の結果から　　$|\vec{a}|^2 = 35,\quad |\vec{b}|^2 = 32,\quad \vec{a}\cdot\vec{p} = 32$

よって　$\triangle\mathrm{OAP} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{p}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{p})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{35\cdot 32 - 32^2} = \mathbf{2\sqrt{6}}$

解説 $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ とおくと

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= |\vec{a} + t\vec{d}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{d}) + t^2|\vec{d}|^2 \\ &= |\vec{d}|^2\left(t + \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^2}\right)^2 + \frac{|\vec{a}|^2|\vec{d}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{d})^2}{|\vec{d}|^2} \end{aligned}$$

$|\vec{p}|$ が最小となるとき，$t = -\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^2}$ より　$\vec{p} = \vec{a} - \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^2}\vec{d}$

このとき，$\vec{d}\cdot\vec{p} = 0$ であるから　　$\vec{d}\perp\vec{p}$

(1) において，直線 AB の方向ベクトルを $\vec{d} = (1, -1,\ 1)$ とおくと

$$\vec{p} = (t+1, -t+3,\ t+5)$$

について，$|\vec{p}|$ を最小にする点を，$\vec{d}\cdot\vec{p} = 0$ から求めることもできる．

また，A(1，3，5)，P(0 4, 4) から　$\mathrm{AP} = \sqrt{3}$，$\mathrm{OP} = 4\sqrt{2}$

このとき，AP⊥OP であるから

$$\triangle\mathrm{OAP} = \frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{OP} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$