

平成 13 年度 大分大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工・経済・教育福祉科学部 平成 13 年 2 月 25 日

- 工学部は, [1] ~ [4] 数 II・III・A・B・C(100 分)
- 経済学部は, [1] ~ [3], [5] 数 II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部は, [1] ~ [3] 数 II・A・B (80 分)

[1] 数列 $\{a_n\}$ は, 初項 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 5}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をみたす.

(1) $b_n = \frac{a_n}{a_n + 1}$ とおくととき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

[2] $\triangle ABC$ は, $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 4$ をみたす. 頂点 A から対辺 BC におろした垂線の足を H, $\angle B$ の二等分線と辺 CA との交点を I, 線分 AH と線分 BI との交点を J とする. $\vec{a} = \vec{CA}$, $\vec{b} = \vec{CB}$ とおく.

(1) \vec{CH} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.

(2) \vec{CI} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.

(3) \vec{CJ} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.

[3] 曲線 $C: y = x^2 - 2x + 1$ と直線 $l: y = x + k$ が異なる 2 点 P, Q で交わり, 点 P における曲線 C の接線と, 点 Q における曲線 C の接線が直交している.

(1) k の値を求めよ.

(2) 2 点 P, Q の座標を求めよ.

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ.

[4] 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 (x, y) が $x = \frac{1-t}{1+t}$, $y = \frac{2\sqrt{t}}{1+t}$ で与えられている. $0 < t < 1$ のとき, 点 $(1, 0)$ と点 P を結ぶ線分の中点を M とし, 点 M が描く曲線を C とする.

(1) 時刻 t における点 M の座標を t を用いて表せ.

(2) 時刻 t における点 M での C の法線の方程式を求めよ.

(3) C の法線は時刻 t にかかわらず, 常にある定点を通ることを示し, その点の座標を求めよ.

[5] (1) $0^\circ < x < 90^\circ$, $\tan 2x = -\frac{4}{3}$ のとき, $\cos x$ と $\sin x$ の値を求めよ.

(2) $0 < a < 1$ のとき, $\log_2 a$ と $\log_a 2$ の大小を比較せよ.

正解

$$\boxed{1} \quad (1) \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 5}, \quad b_n = \frac{a_n}{a_n + 1} \text{ より}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2a_n}{3a_n + 5}}{\frac{2a_n}{3a_n + 5} + 1} = \frac{2a_n}{5(a_n + 1)} = \frac{2}{5}b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{3}{3 + 1} = \frac{3}{4}$, 公比 $\frac{2}{5}$ の等比数列であるから

$$b_n = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

$$(2) \quad b_n = \frac{a_n}{a_n + 1} \text{ より, } a_n = \frac{b_n}{1 - b_n} \text{ であるから}$$

$$a_n = \frac{\frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{4 \cdot 5^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}}$$

補足 与えられた漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1}} + 1 = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{a_n} + 1 \right)$$

したがって, 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} + 1 \right\}$ は初項が $\frac{4}{3}$, 公比が $\frac{5}{2}$ の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n} + 1 = \frac{4}{3} \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{1}{\frac{4}{3} \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} - 1}$$

解説

$p, q, r \neq 0, s$ を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \dots (*)$$

の一般項について, 以下に述べる.

$ps - qr = 0$ のとき, 右辺は定数となるので, $ps - qr \neq 0$ とする.

(*) の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \dots (**)$$

の解を α, β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \dots (***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき, 上の2式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって
$$\frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$$

上式から, a_n が求まる.

ii) $\alpha = \beta$ のとき, (*) の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \dots \textcircled{1}$$

また, α は (**) の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② により, (***) は

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}}$$

逆数をとると
$$\frac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{a_n - \alpha} + \frac{2r}{p + s}$$

このとき, 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - \alpha} \right\}$ は初項が $\frac{1}{a_1 - \alpha}$, 公差が $\frac{2r}{p + s}$ の等差数列であるから

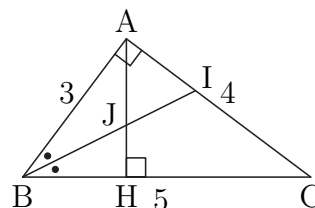
$$\frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} + \frac{2r}{p + s}(n - 1)$$

これから, a_n が求まる.

2 (1) 右の図から $\cos C = \frac{4}{5}$

$$CH = CA \cos C = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\vec{CH} = \frac{CH}{CB} \vec{CB} = \frac{16}{25} \vec{b}$$



(2) 線分 BI は $\angle ABC$ の二等分線であるから

$$AI : IC = AB : BC = 3 : 5 \quad \text{よって} \quad \vec{CI} = \frac{5}{8} \vec{a}$$

(3) (1) の結果から $BH = BC - CH = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$

線分 BJ は $\angle ABC$ の二等分線であるから

$$AJ : JH = AB : BH = 3 : \frac{9}{5} = 5 : 3$$

$$\text{よって} \quad \vec{CJ} = \frac{3}{8} \vec{CA} + \frac{5}{8} \vec{CH} = \frac{3}{8} \vec{a} + \frac{5}{8} \cdot \frac{16}{25} \vec{b} = \frac{3}{8} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}$$

3 (1) $C: y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ と $l: y = x + k$ から y を消去すると

$$x^2 - 2x + 1 = x + k \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 3x + 1 - k = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

C と l は異なる 2 点で交わるから、2 次方程式 ① の判別式 D は

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1(1 - k) > 0 \quad \text{すなわち} \quad k > -\frac{5}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

また、共有点の x 座標を α, β とすると ($\alpha < \beta$)、2 次方程式 ① の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1 - k \quad \dots \textcircled{3}$$

$f(x)$ を微分すると $f'(x) = 2(x - 1)$

このとき、 $f'(\alpha)f'(\beta) = -1$ であるから

$$2(\alpha - 1) \cdot 2(\beta - 1) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad 4\{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1\} = -1$$

上式に ③ を代入すると $4(1 - k - 3 + 1) = -1$

② に注意してこれを解くと $k = -\frac{3}{4}$

(2) $k = -\frac{3}{4}$ のとき、① は $x^2 - 3x + \frac{7}{4} = 0$

これを解いて $x = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$ また $y = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{4}$

よって、2 点 P, Q の座標は

$$\left(\frac{3 - \sqrt{2}}{2}, \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \right), \quad \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2}, \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} \right)$$

(3) (1), (2) から $\beta - \alpha = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} - \frac{3 - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left(x - \frac{3}{4} \right) - (x^2 - 2x + 1) \right\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \left(x^2 - 3x + \frac{7}{4} \right) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

4 (1) 求める点 M の座標を (x, y) とすると

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1-t}{1+t} + 1 \right) = \frac{1}{1+t}, \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{t}}{1+t} = \frac{\sqrt{t}}{1+t}$$

よって $M \left(\frac{1}{1+t}, \frac{\sqrt{t}}{1+t} \right)$

(2) $x = \frac{1}{1+t}, y = \frac{\sqrt{t}}{1+t}$ より

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(1+t)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}(1+t) - \sqrt{t}}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{2\sqrt{t}(1+t)^2}$$

したがって $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1-t}{2\sqrt{t}(1+t)^2}}{-\frac{1}{(1+t)^2}} = -\frac{1-t}{2\sqrt{t}}$

よって、求める接線の方程式は

$$y - \frac{\sqrt{t}}{1+t} = \frac{2\sqrt{t}}{1-t} \left(x - \frac{1}{1+t} \right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{2\sqrt{t}}{1-t}x - \frac{\sqrt{t}}{1-t} \quad \dots (*)$$

(3) (2) の結果から

$$\left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{2\sqrt{t}}{1-t} - y = 0$$

これが t の値にかかわらず常に成り立つとき

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{2}, y = 0$$

この点は、常に法線の方程式 (*) を満たす。

よって、定点は $\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = -\frac{4}{3} \text{ より}$$

$$2 \tan^2 x - 3 \tan x - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2 \tan x + 1)(\tan x - 2) = 0$$

$$0^\circ < x < 90^\circ \text{ より, } \tan x > 0 \text{ であるから} \quad \tan x = 2$$

これを $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ に代入すると

$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$$0^\circ < x < 90^\circ \text{ より, } \cos x > 0 \text{ であるから} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{また} \quad \sin x = \tan x \cos x = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \log_2 a - \log_a 2 &= \log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} \\ &= \frac{(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 1)}{\log_2 a} \\ &= \frac{\log_2 2a \cdot \log_2 \frac{a}{2}}{\log_2 a} \end{aligned}$$

$$0 < a < 1 \text{ より} \quad \log_2 a < 0, \log_2 \frac{a}{2} < 0$$

したがって, $\log_2 a - \log_a 2$ と $\log_2 2a$ の符号は一致する.

$$\text{よって} \quad \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき} & \log_2 a < \log_a 2 \\ a = \frac{1}{2} \text{ のとき} & \log_2 a = \log_a 2 \\ \frac{1}{2} < a < 1 \text{ のとき} & \log_2 a > \log_a 2 \end{cases}$$