平成 13 年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・経済・教育福祉　平成 13 年 2 月 25 日

- 工学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (100 分)
- 経済学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育福祉科学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1 = 3$，$a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3a_n+5}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす．

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{a_n+1}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$ABC は，AB $= 3$，BC $= 5$，CA $= 4$ をみたす．頂点 A から対辺 BC におろした垂線の足を H，$\angle$B の二等分線と辺 CA との交点を I，線分 AH と線分 BI との交点を J とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CJ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $C : y = x^2 - 2x + 1$ と直線 $l : y = x + k$ が異なる 2 点 P，Q で交わり，点 P における曲線 C の接線と，点 Q における曲線 C の接線が直交している．

(1) k の値を求めよ．

(2) 2 点 P，Q の座標を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x = \dfrac{1-t}{1+t}$，$y = \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$ で与えられている．$0 < t < 1$ のとき，点 $(1,\ 0)$ と点 P を結ぶ線分の中点を M とし，点 M が描く曲線を C とする．

(1) 時刻 t における点 M の座標を t を用いて表せ．

(2) 時刻 t における点 M での C の法線の方程式を求めよ．

(3) C の法線は時刻 t にかかわらず，常にある定点を通ることを示し，その点の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $0^\circ < x < 90^\circ$，$\tan 2x = -\dfrac{4}{3}$ のとき，$\cos x$ と $\sin x$ の値を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ のとき，$\log_2 a$ と $\log_a 2$ の大小を比較せよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+5}$，$b_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ より

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\frac{\frac{2a_n}{3a_n+5}}{\frac{2a_n}{3a_n+5}+1}=\frac{2a_n}{5(a_n+1)}=\frac{2}{5}b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{a_1+1}=\dfrac{3}{3+1}=\dfrac{3}{4}$，公比 $\dfrac{2}{5}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{b_n=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}$$

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ より，$a_n=\dfrac{b_n}{1-b_n}$ であるから

$$a_n=\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}=\boldsymbol{\frac{3\cdot2^{n-1}}{4\cdot5^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}}$$

補足 与えらえた漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1}}+1=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$$

したがって，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$ は初項が $\dfrac{4}{3}$，公比が $\dfrac{5}{2}$ の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n}+1=\frac{4}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n=\frac{1}{\frac{4}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}$$

解説

p，q，$r\neq0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s} \quad \cdots(*)$$

の一般項について，以下に述べる．

$ps-qr=0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps-qr\neq0$ とする．

$(*)$ の特性方程式

$$x=\frac{px+q}{rx+s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2+(s-p)x-q=0 \quad \cdots(**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)(ra_n+s)}\quad\cdots(***)$$

$$a_{n+1}-\beta=\frac{(ps-qr)(a_n-\beta)}{(r\beta+s)(ra_n+s)}$$

i) $\alpha\neq\beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{r\alpha+s}{r\beta+s}\cdot\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

したがって $\quad \dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\dfrac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\left(\dfrac{r\alpha+s}{r\beta+s}\right)^{n-1}$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha=\beta$ のとき，$(*)$ の係数について

$$(s-p)^2+4rq=0\quad ゆえに\quad (p+s)^2=4(ps-qr)\quad\cdots①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha=\frac{p-s}{2r}\quad ゆえに\quad r\alpha+s=\frac{1}{2}(p+s)\quad\cdots②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)\{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s\}}\\&=\frac{\frac{1}{4}(p+s)^2(a_n-\alpha)}{\frac{1}{2}(p+s)\{r(a_n-\alpha)+\frac{1}{2}(p+s)\}}\end{aligned}$$

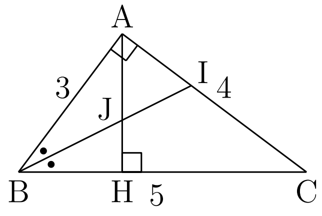
逆数をとると $\quad \dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる． ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 右の図から $\quad \cos C = \dfrac{4}{5}$



$$\mathrm{CH} = \mathrm{CA}\cos C = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CB}}\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \boldsymbol{\frac{16}{25}\vec{b}}$$

(2) 線分 BI は $\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{AI} : \mathrm{IC} = \mathrm{AB} : \mathrm{BC} = 3 : 5 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CI}} = \frac{5}{8}\vec{a}}$$

(3) (1) の結果から $\quad \mathrm{BH} = \mathrm{BC} - \mathrm{CH} = 5 - \dfrac{16}{5} = \dfrac{9}{5}$

線分 BJ は $\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{AJ} : \mathrm{JH} = \mathrm{AB} : \mathrm{BH} = 3 : \frac{9}{5} = 5 : 3$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{CJ}} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{3}{8}\vec{a} + \dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{16}{25}\vec{b} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{b}}$ ■

3 (1) $C : y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ と $l : y = x + k$ から y を消去すると

$$x^2 - 2x + 1 = x + k \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 3x + 1 - k = 0 \quad \cdots ①$$

C と l は異なる2点で交わるから，2次方程式 ① の判別式 D は

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1(1-k) > 0 \quad \text{すなわち} \quad k > -\frac{5}{4} \quad \cdots ②$$

また，共有点の x 座標を α，β とすると $(\alpha < \beta)$，2次方程式 ① の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1 - k \quad \cdots ③$$

$f(x)$ を微分すると　$f'(x) = 2(x-1)$

このとき，$f'(\alpha)f'(\beta) = -1$ であるから

$$2(\alpha - 1) \cdot 2(\beta - 1) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad 4\{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1\} = -1$$

上式に ③ を代入すると　$4(1 - k - 3 + 1) = -1$

② に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{k = -\dfrac{3}{4}}$

(2) $k = -\dfrac{3}{4}$ のとき，① は　$x^2 - 3x + \dfrac{7}{4} = 0$

これを解いて　$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$　また　$y = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{4}$

よって，2点P，Qの座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2},\ \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right),\quad \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2},\ \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)}$$

(3) (1)，(2) から　$\beta - \alpha = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{\left(x - \frac{3}{4}\right) - (x^2 - 2x + 1)\right\} dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \left(x^2 - 3x + \frac{7}{4}\right) dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{2})^3 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 求める点 M の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{1+t}+1\right) = \frac{1}{1+t}, \quad y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{t}}{1+t} = \frac{\sqrt{t}}{1+t}$$

よって $\quad \mathbf{M}\left(\boldsymbol{\frac{1}{1+t},\ \frac{\sqrt{t}}{1+t}}\right)$

(2) $x = \dfrac{1}{1+t},\ y = \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$ より

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(1+t)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}(1+t)-\sqrt{t}}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{2\sqrt{t}\,(1+t)^2}$$

したがって $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{1-t}{2\sqrt{t}\,(1+t)^2}}{-\frac{1}{(1+t)^2}} = -\dfrac{1-t}{2\sqrt{t}}$

よって，求める法線の方程式は

$$y-\frac{\sqrt{t}}{1+t} = \frac{2\sqrt{t}}{1-t}\left(x-\frac{1}{1+t}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{2\sqrt{t}}{1-t}x - \frac{\sqrt{t}}{1-t}} \quad \cdots(*)$$

(3) (2) の結果から

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{2\sqrt{t}}{1-t} - y = 0$$

これが t の値にかかわらず常に成り立つとき

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{1}{2},\ y=0$$

この点は，常に法線の方程式 $(*)$ を満たす.

よって，定点は $\quad \boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ 0\right)}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = -\dfrac{4}{3}$ より

$$2\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2\tan x + 1)(\tan x - 2) = 0$$

$0^\circ < x < 90^\circ$ より，$\tan x > 0$ であるから　　$\tan x = 2$

これを $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ に代入すると

$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$0^\circ < x < 90^\circ$ より，$\cos x > 0$ であるから　　$\boldsymbol{\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

また　　$\sin x = \tan x \cos x = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(2)
$$\begin{aligned}\log_2 a - \log_a 2 &= \log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} \\ &= \frac{(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 1)}{\log_2 a} \\ &= \frac{\log_2 2a \cdot \log_2 \frac{a}{2}}{\log_2 a}\end{aligned}$$

$0 < a < 1$ より　$\log_2 a < 0$，$\log_2 \dfrac{a}{2} < 0$

したがって，$\log_2 a - \log_a 2$ と $\log_2 2a$ の符号は一致する．

よって
$$\begin{cases} 0 < a < \dfrac{1}{2} \text{のとき} & \boldsymbol{\log_2 a < \log_a 2} \\ a = \dfrac{1}{2} \text{のとき} & \boldsymbol{\log_2 a = \log_a 2} \\ \dfrac{1}{2} < a < 1 \text{のとき} & \boldsymbol{\log_2 a > \log_a 2} \end{cases}$$

■