令和７年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和７年２月25日

- 教育Ａ・経済・環境科学部　$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ 数Ｉ・II・Ａ・Ｂ (80分)
- 水産・情報データ科学部Ａ　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数Ｉ・II・Ａ・Ｂ・Ｃ (110分)
- 教育Ｂ・薬・歯・工・情報データ科学部Ｂ　$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$
  数Ｉ・II・III・Ａ・Ｂ・Ｃ (130分)
- 医学部　$\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ 数Ｉ・II・III・Ａ・Ｂ・Ｃ (130分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 2次関数 $y = ax^2 - 2ax + b$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が4で，最小値が -2 であるとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1$，$a_2 = 4$，$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ $(n \geqq 1)$ で定義されている．$b_n = a_{n+1} - 2a_n$，$c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，b_n，c_n をそれぞれ n の式で表し，一般項 a_n を求めよ．

(3) $\triangle$ABC において，AB $= 4$，BC $= 6$，CA $= 5$ である．$\angle$A の2等分線と辺 BC が交わる点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．また，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ をそれぞれ求めよ．

(4) は選択問題である．(A)，(B) いずれか1問を解答すること．

(4) (A) 円 $C : x^2 + y^2 = 1$ がある．この円 C を，y 軸をもとにして x 軸方向に3倍，x 軸をもとにして y 軸方向に2倍にした，だ円 D の方程式を求めよ．また，だ円 D と y 軸との2つの交点を A，B とする．ただし，A の y 座標は正である．点 P$(x,\ y)$ が，だ円 D 上を動くとき，A と P との距離 AP の最大値と，そのときの P の座標を求めよ．

(B) $0 \leqq x \leqq 1$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = kx(x-1)$ であるとき，定数 k の値を求めよ．また，X が $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲の値をとる確率を $P(\alpha \leqq X \leqq \beta)$ とするとき，$P\left(0 \leqq X \leqq \dfrac{1}{4}\right)$ および $P\left(\dfrac{1}{4} \leqq X \leqq 1\right)$ の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

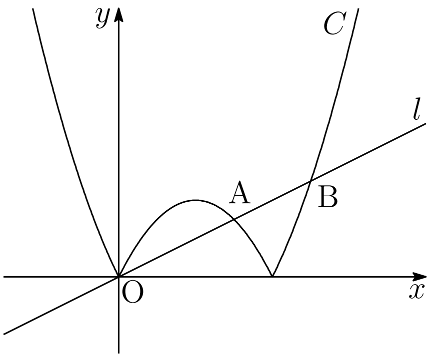
(1) 2 次方程式 $x^2-2ax+a=0$ が $0<x<3$ の範囲において異なる 2 つの実数解をもつように定数 a の値の範囲を定めよ．

(2) $0<y<x<\pi$ のとき，以下の連立方程式の解 $(x,\ y)$ を求めよ．

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ 4\cos^2 x-\sin^2 y=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

(3) 関数 $f(x)=\log_2 x+2\log_2(3-x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ．

3 下図のように，原点を O とする xy 座標平面上における曲線 $C : y = |x^2 - x|$ と直線 $l : y = ax$ $(a > 0)$ は，異なる 3 点 O，A，B を共有している．ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいものとする．以下の問いに答えよ．



(1) 2 点 A，B の x 座標を，a を用いてそれぞれ表せ．また，a の取り得る値の範囲を求めよ．

(2) 線分 OA と曲線 C とで囲まれる図形の面積 S_1 を a を用いて表せ．

(3) 線分 AB と曲線 C とで囲まれる図形の面積 S_2 を a を用いて表せ．

(4) (2) と (3) の S_1 と S_2 の和 $(S_1 + S_2)$ の最小値と，そのときの a の値を求めよ．

$\boxed{4}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 2 次関数 $y = ax^2 - 2ax + b$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 4 で，最小値が -2 であるとき，定数 a, b の値を求めよ．

(2) $0 < y < x < \pi$ のとき，以下の連立方程式の解 $(x,\ y)$ を求めよ．

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4\cos^2 x - \sin^2 y = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

(3) は選択問題である．(A)，(B) いずれか 1 問を解答すること．

(3) (A) 円 $C : x^2 + y^2 = 1$ がある．この円 C を，y 軸をもとにして x 軸方向に 3 倍，x 軸をもとにして y 軸方向に 2 倍にした，だ円 D の方程式を求めよ．また，だ円 D と y 軸との 2 つの交点を A，B とする．ただし，A の y 座標は正である．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が，だ円 D 上を動くとき，A と P との距離 AP の最大値と，そのときの P の座標を求めよ．

(B) $0 \leqq x \leqq 1$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = kx(x-1)$ であるとき，定数 k の値を求めよ．また，X が $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲の値をとる確率を $P(\alpha \leqq X \leqq \beta)$ とするとき，$0 \leqq a \leqq 1$ における $P(0 \leqq X \leqq a)$ を a を用いて表し，$P(0 \leqq X \leqq a) = \dfrac{7}{20}P(a \leqq X \leqq 1)$ を満たす定数 a の値を求めよ．

$\boxed{5}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 原点を O とする複素数平面上に，原点 O と異なる 2 点 A(α)，B(β) があり，$4\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2 = 0$ が成り立つ．このとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ．ただし，$0 < \arg\dfrac{\beta}{\alpha} < \pi$ とする．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1$，$a_2 = 4$，$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ $(n \geqq 1)$ で定義されている．$b_n = a_{n+1} - 2a_n$，$c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，b_n，c_n をそれぞれ n の式で表し，一般項 a_n を求めよ．

(3) 部分積分法を用いて定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 図 1 のように，原点を O とする xy 平面上に，曲線 $C : y = x^2$ がある．曲線 C 上の点 A$(-1,\ 1)$ と曲線 C 上を動く点 P$(t,\ t^2)$ がある．ただし，$-1 < t < 0$ とする．C 上の A における接線を l とし，A を通り l に垂直な直線を法線 l' とする．同様に C 上の P における接線を m とし，P を通り m に垂直な直線を法線 m' とする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 l および法線 l' の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) 接線 m および法線 m' の方程式をそれぞれ t を用いて表せ．

(3) l' と m' の交点を R とする．曲線 C 上を P が A に限りなく近づくとき，R が限りなく近づく点を $\mathrm{R_0}$ とする．$\mathrm{R_0}$ の座標を求めよ．

(4) (3) の $\mathrm{R_0}$ を中心とし，A を通る円 D の方程式を求めよ．また，円 D と曲線 C が共有する点のうち，A と異なる点を B とする．B の座標を求めよ．

(5) (4) において，円 D と法線 l' が共有する点のうち，A と異なる点を E とするとき，線分 BE，円 D，曲線 C とで囲まれる図形 (図 2 の斜線部，境界を含む) の面積を求めよ．

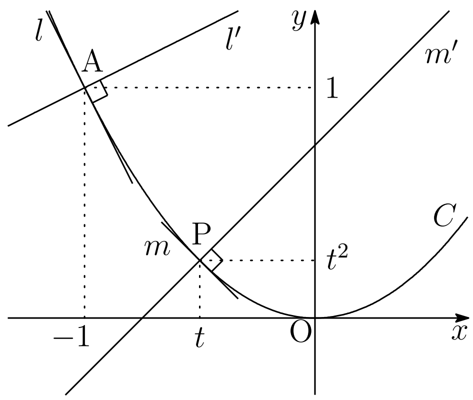


図 1

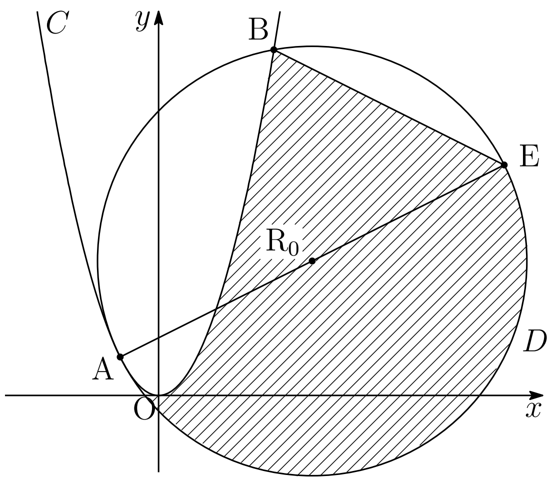
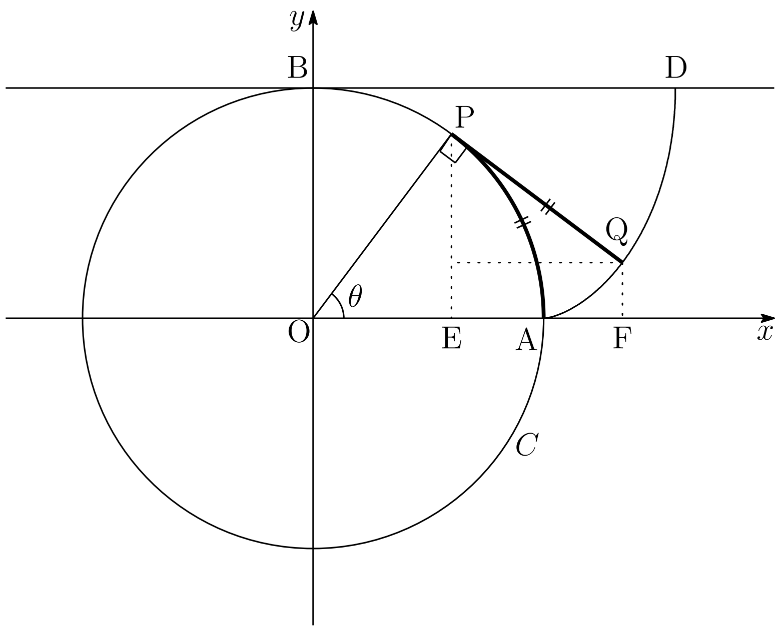


図 2

7 下図のように，xy 座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円 C がある．点 A$(2,\ 0)$，点 B$(0,\ 2)$ とするとき，点 P は円 C の周上を A から B まで反時計まわりに動くものとする．また，$\angle \mathrm{AOP} = \theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，点 Q$(x,\ y)$ は，$\angle \mathrm{OPQ}$ の大きさが常に $\dfrac{\pi}{2}$ で，線分 PQ の長さが弧 AP の長さに等しくなるように動く．ただし，点 Q の x 座標は常に 2 以上とし，$\theta = 0$ のときの Q の位置を A，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときの Q の位置を D とする．以下の問いに答えよ．



(1) 弧 AP の長さ l を θ を用いて表せ．また，D の座標を求めよ．ただし，答えのみでよい．

(2) 2 点 P，Q から x 軸に下した垂線と x 軸との交点をそれぞれ E，F とするとき，4 点 P，E，F，Q の座標を θ を用いて表せ．ただし，答えのみでよい．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 2\theta \, d\theta$ および $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos 2\theta \, d\theta$ を，それぞれ求めよ．

(4) Q$(x,\ y)$ が描く曲線と円 C および直線 BD とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．ただし，この C については $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の円弧で考える．

(5) Q$(x,\ y)$ がえがく曲線の長さ L を求めよ．

$\boxed{8}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \log_2 x + 2\log_2(3-x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1$，$a_2 = 4$，$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ $(n \geqq 1)$ で定義されている．$b_n = a_{n+1} - 2a_n$，$c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，b_n，c_n をそれぞれ n の式で表し，一般項 a_n を求めよ．

(3) は選択問題である．(A)，(B) いずれか 1 問を解答すること．

(3) (A) 原点を O とする複素数平面上に，原点 O と異なる 2 点 A(α)，B(β) があり，$4\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2 = 0$ が成り立つ．このとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表し，△OAB はどのような三角形か答えよ．ただし，$0 < \arg \dfrac{\beta}{\alpha} < \pi$ とする．

(B) $0 \leqq x \leqq 1$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = kx(x-1)$ であるとき，定数 k の値を求めよ．また，X が $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲の値をとる確率を $P(\alpha \leqq X \leqq \beta)$ とするとき，$0 \leqq a \leqq 1$ における $P(0 \leqq X \leqq a)$ を a を用いて表し，$P(0 \leqq X \leqq a) = \dfrac{7}{20}P(a \leqq X \leqq 1)$ を満たす定数 a の値を求めよ．

9 原点を O とする xy 平面上の 2 点 A(0, 2)，B(1, 0) を通る直線を l_1 とし，x 座標が t $(0 \leqq t \leqq 1)$ である線分 AB 上の点を P とする．P から x 軸，y 軸に下した垂線と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ点 Q，点 R とし，Q，R を通る直線を l_2 とする．P が線分 AB 上を A から B まで動くとき，線分 QR が通過してできる図形の周および内部からなる領域を F とする．ただし，

P が A と一致するときは，Q は O とし，R は A とする．

P が B と一致するときは，Q は B とし，R は O とする．

以下の問いに答えよ．

(1) △AOB の周および内部からなる領域を不等式で表せ．ただし，答えのみでよい．

(2) 直線 l_2 の方程式意を t の 2 次方程式 $2t^2 + at + b = 0$ の形で表すとする．a，b をそれぞれ x と y の式で表せ．

(3) 点 $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ は領域 F に含まれるかどうかを調べよ．

(4) 領域 F を x と y の不等式で表せ．

(5) 解答用紙の xy 座標平面上に領域 F を図示せよ．また，領域 F が表す図形の面積 S を求めよ．

10 xyz 座標空間の xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円 C があり，円 C の周上を動く点を $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ とする．また，$z=1$ で表される平面 T 上に，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円 D があり，円 D の周上を動く点を $\mathrm{Q}(\cos(\theta+\alpha),\ \sin(\theta+\alpha),\ 1)$ とする．ただし，θ は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の変数とし，α は $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とする．このとき，点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ の $x,\ y,\ z$ をそれぞれ $t,\ \theta,\ \alpha$ を用いて表せ．

(2) (1) の R から z 軸に垂線 RH を下ろし，2 点 R と H の距離を d とする．d^2 を α と t の式で表せ．また，t が $t=0$ から $t=1$ まで変化するとき，d の最小値を α を用いて表し，そのときの t の値を求めよ．ただし，$0 < \alpha \leqq \pi$ とする．

(3) θ が $\theta=0$ から $\theta=2\pi$ まで変化するとき，線分 PQ が通過してできる曲面と，xy 平面と平面 T の 2 平面とで囲まれる立体 F の体積 V を α を用いて表せ．

(4) (3) の立体 F は，定数 α の値によって様々な形状になる．立体 F の体積 V が最大，最小になるときの α の値と体積をそれぞれ求め，そのときの形状をそれぞれ答えよ．

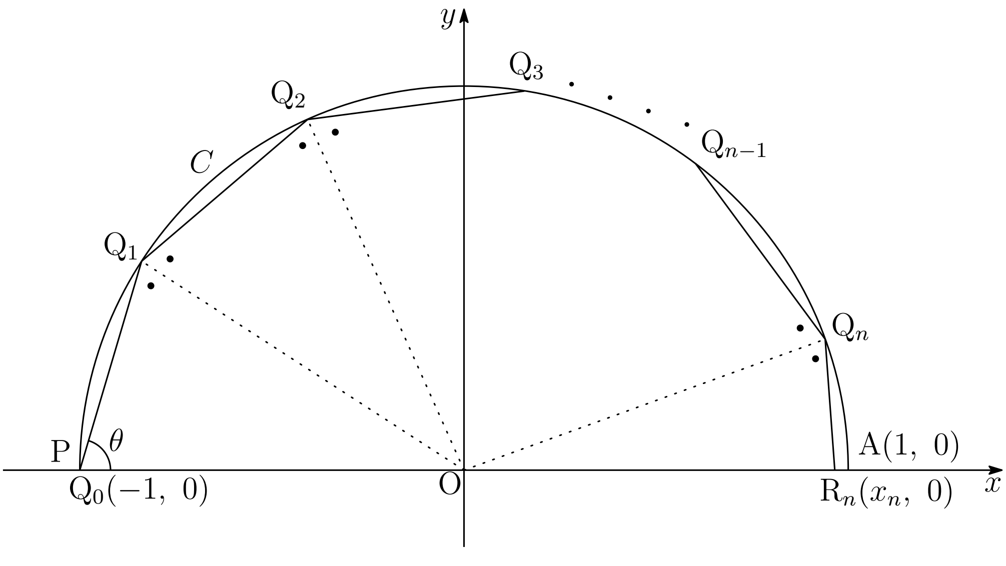
11 原点を O とする xy 平面上において $y = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ で表される半円を C とし，C 上の 2 点を $\mathrm{Q}_0(-1,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする．下図のように，小球 P(以下 P とよぶ) は Q_0 より，x 軸の正の向きとなす角が θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ となるように発射され，P が C 上の点 Q_1 に達すると，$\angle \mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1\mathrm{O} = \angle \mathrm{O}\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ となるように反射される．さらに，P は，このような反射を繰り返し，はじめて x 軸に達したとき，静止するものとする．このような反射を繰り返し，はじめて x 軸に達したとき，静止するものとする．このときの反射の回数を n 回 (最後の反射する点は Q_n) とし，静止する点を $\mathrm{R}_n(x_n,\ 0)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) P が，1 回の反射で A に達するときの P の軌跡を示し，そのときの θ の値を求めよ．また，P が，2 回の反射で A に達するときの P の軌跡を示し，そのときの θ の値を求めよ．ただし，θ の値は答のみでよい．

(2) P が 1 回の反射で x 軸に達するとき，θ の値の範囲を求めよ．このとき，x_1 を $\sin\theta$ の式で表し，x_1 の取り得る値の範囲を求めよ．

(3) P が n 回の反射で x 軸に達するとき，θ の値の範囲を求めよ．また，x_n を n，θ を用いて表せ．

(4) (3) のとき，$\triangle \mathrm{O}\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$ の面積 S_n は，$S_n = \dfrac{\tan 2n\theta \tan\theta}{2(\tan 2n\theta + \tan\theta)}$ と表されることを示し，反射の回数 n が限りなく大きくなる場合は，S_n は限りなく 0 に近づくことを証明せよ．



解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=ax^2-2ax+b$ とおくと　$f(x)=a(x-1)^2-a+b$

$-1 \leqq x \leqq 2$ において，最大値 4，最小値 -2 をとるから　$a \neq 0$

(i) $a>0$ のとき，$f(-1)=4$，$f(1)=-2$ であるから

$$3a+b=4,\ -a+b=-2\quad \text{これを解いて}\quad a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{1}{2}$$

(ii) $a<0$ のとき，$f(-1)=-2$，$f(1)=4$ であるから

$$3a+b=-2,\ -a+b=4\quad \text{これを解いて}\quad a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{5}{2}$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)}$

(2) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0\ (n \geqq 1)$ より

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)\quad \text{ゆえに}\quad b_{n+1}=2b_n$$

$b_1=a_2-2a_1=4-2\cdot 1=2$ より，$\{b_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n=2\cdot 2^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{b_n=2^n}$$

上式を $b_n=a_{n+1}-2a_n$ に代入すると　$2^n=a_{n+1}-2a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad c_{n+1}-c_n=\frac{1}{2}$$

$c_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$ より，$\{c_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$c_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=n\cdot 2^{n-1}}$$

(3) 線分 AD は $\angle$A の二等分線であるから　BD : DC = AB : AC = 4 : 5

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

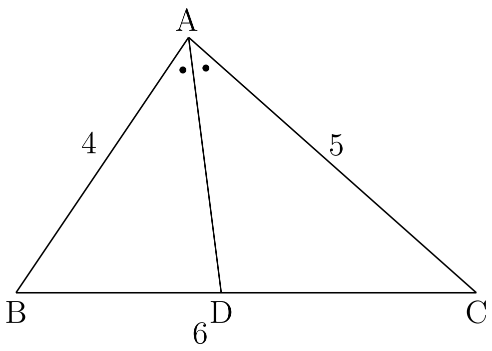
$$6^2 = 5^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{5}{2}$$

したがって　$|5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 25|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 40\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 16|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

$$= 25\cdot 4^2 + 40\cdot\frac{5}{2} + 16\cdot 25 = 900$$

$|5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 30$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \frac{|5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}{9} = \frac{30}{9} = \boldsymbol{\frac{10}{3}}$$



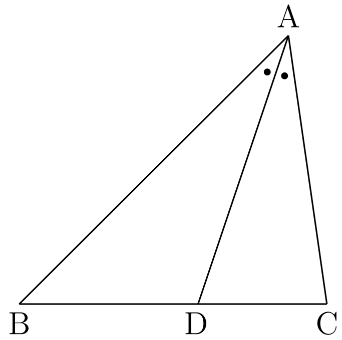
別解　$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} = 4 \times 5 - \frac{4}{9}\cdot 6 \times \frac{5}{9}\cdot 6 = \frac{100}{9}$

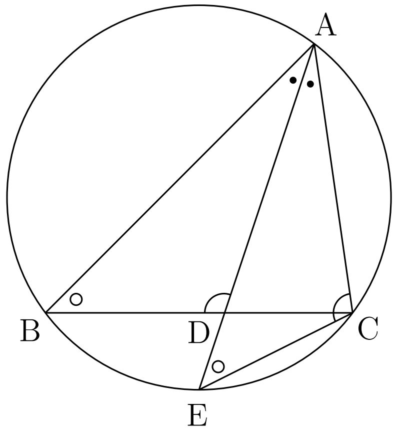
三角形の角の二等分線に関する公式

$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$\mathbf{AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC}$$

証明 右下の図のように $\triangle$ABC の外接円と AD の延長との交点を E とする.





$\triangle$ABD $\backsim$ $\triangle$AEC より

$$\mathrm{AB : AD = AE : AC} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AB \cdot AC = AD \cdot AE}$$

AE $=$ AD $+$ DE より

$$\mathrm{AB \cdot AC = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE}$$

方べきの定理により，AD$\cdot$DE $=$ BD$\cdot$DC であるから

$\mathrm{AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC}$　よって　$\mathrm{AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC}$　**証終**

(4) 楕円 D の頂点が $(\pm 3,\ 0)$，$(0,\ \pm 2)$ であるから，その方程式は

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \qquad (*)$$

点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$ から D 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の距離 AP は

$$\mathrm{AP}^2=x^2+(y-2)^2$$

$(*)$ から $x^2=9-\dfrac{9}{4}y^2\cdots$ ① であるから，これを上式に代入すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=9-\frac{9}{4}y^2+(y-2)^2=-\frac{5}{4}y^2-4y+13\\&=-\frac{5}{4}\left(y+\frac{8}{5}\right)^2+\frac{81}{5}\end{aligned}$$

$-2\leqq y\leqq 2$ であるから，$y=-\dfrac{8}{5}$　これを ① に代入すると　$x^2=\dfrac{81}{25}$

よって，$\mathbf{P}\left(\pm\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}},-\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}\right)$ のとき，**最大値** $\dfrac{\mathbf{9}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$

(5) 確率変数の範囲が $0\leqq x\leqq 1$ である確率密度関数 $f(x)=kx(x-1)$ により (k は定数)

$$\int_0^1 f(x)\,dx=k\int_0^1 x(x-1)=-\frac{k}{6}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k=-6}$$

したがって

$$\begin{aligned}P\leqq(0\leqq x\leqq\frac{1}{4})&=-6\int_0^{\frac{1}{4}}x(x-1)\,dx=-6\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{32}}\\P\left(\frac{1}{4}\leqq x\leqq 1\right)&=1-P\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{4}\right)=1-\frac{5}{32}=\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{32}}\end{aligned}$$

■

2 (1) $f(x)=x^2-2ax+a$ とおくと　$f(x)=(x-a)^2-a^2+a$

2 次方程式 $f(x)=0$ が $0<x<3$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつから

$$0<a<3,\quad f(0)>0,\quad f(a)<0,\quad f(3)>0$$

したがって　$0<a<3,\quad a>0,\quad -a^2+a<0,\quad 9-5a>0$

すなわち $\begin{cases} 0<a<3 \\ a>0 \\ a<0,\ 1<a \\ a<\dfrac{9}{5} \end{cases}$　これを解いて　$\boldsymbol{1<a<\dfrac{9}{5}}$

(2) $\sin x+\cos y=1$ より　$\cos y=1-\sin x$　$\cdots$①

$4\cos^2 x-\sin^2 y=\dfrac{9}{4}$ より　$4(1-\sin^2 x)-(1-\cos^2 y)=\dfrac{9}{4}$

$$\frac{3}{4}-4\sin^2 x+\cos^2 y=0$$

① を上式に代入すると　$\dfrac{3}{4}-4\sin^2 x+(1-\sin x)^2=0$

$$-3\sin^2 x-2\sin x+\frac{7}{4}=0\quad ゆえに\quad 12\sin^2 x+8\sin x-7=0$$

$(2\sin x-1)(6\sin x+7)=0$ より $(-1\leqq\sin x\leqq 1)$　$\sin x=\dfrac{1}{2}$　$\cdots$②

これを ① に代入すると　$\cos y=\dfrac{1}{2}$　$0<y<\pi$ に注意して　$\boldsymbol{y=\dfrac{\pi}{3}}$

$0<y<x<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3}<x<\pi$ に注意して ② を解くと　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{6}\pi}$

(3) $f(x)=\log_2 x+2\log_2(3-x)$ について，真数は正であるから

$$x>0,\quad 3-x>0\quad すなわち\quad 0<x<3$$

$f(x)=\log_2 x(3-x)^2$ より，3 正数 $2x,\ 3-x,\ 3-x$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2x+(3-x)+(3-x)}{3}\geqq\sqrt[3]{2x(3-x)^2}\quad ゆえに\quad x(3-x)^2\leqq 4$$

上式において等号が成立するのは

$$2x=3-x\quad すなわち\quad x=1$$

よって，$\boldsymbol{x=1}$ **のとき最大値 2 をとる．** ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 A の x 座標は

$$-x^2+x=ax \quad ゆえに \quad x(x-1+a)=0$$

$x \neq 0$ であるから　　$\boldsymbol{x=1-a}$

点 B の x 座標は

$$x^2-x=ax \quad ゆえに \quad x(x-1-a)=0$$

$x \neq 0$ であるから　　$\boldsymbol{x=1+a}$

O，A，B の位置関係から，a のとり得る値の範囲は

$$0<1-a<1+a \quad すなわち \quad \boldsymbol{0<a<1}$$

(2)

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{1-a} \{(-x^2+x)-ax\}\,dx \\ &= \int_0^{1-a} x(1-a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}(1-a)^3} \end{aligned}$$

(3) C と x 軸で囲まれた部分の面積を S_3 とすると

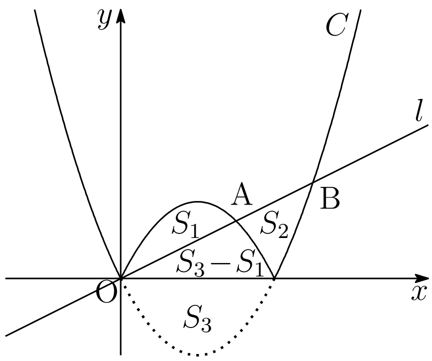
$$S_3=\int_0^1(-x^2+x)\,dx=-\int_0^1 x(x-1)\,dx=\frac{1}{6}$$

曲線 $y=x^2-x$ と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} S_3+(S_3-S_1)+S_2 &= \int_0^{1+a}\{ax-(x^2-x)\}\,dx \\ &= \int_0^{1+a} x(1+a-x)\,dx=\frac{1}{6}(1+a)^3 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{6}(1+a)^3+S_1-2S_3 \\ &= \frac{1}{6}(1+a)^3+\frac{1}{6}(1-a)^3-2\cdot\frac{1}{6} \\ &= \boldsymbol{a^2} \end{aligned}$$



(4) (2)，(3) の結果から，$S(a) = S_1 + S_2$ とおくと

$$S(a) = \frac{1}{6}(1-a)^3 + a^2$$
$$= -\frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}$$
$$S'(a) = -\frac{1}{2}a^2 + 3a - \frac{1}{2}$$

$0 < a < 1$ に注意して，$S'(a) = 0$ を解くと　$a = 3 - 2\sqrt{2}$

a	(0)	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$S(a) = \dfrac{1}{3}(a-3)f'(a) + \dfrac{1}{3}(8a-1)$ より

$$\boldsymbol{a = 3 - 2\sqrt{2}}\ \text{のとき，最小値}\ f(3-2\sqrt{2}) = \boldsymbol{\frac{1}{3}(23 - 16\sqrt{2})}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\boxed{1}$ (1) を参照

(2) $\boxed{2}$ (2) を参照

(3) $\boxed{1}$ (4)(A) を参照

(4) 確率変数の範囲が $0 \leqq x \leqq 1$ である確率密度関数 $f(x) = kx(x-1)$ により (k は定数)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = k\int_0^1 x(x-1) = -\frac{k}{6} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k = -6}$$

$P(0 \leqq x \leqq a) = \dfrac{7}{20}P(a \leqq x \leqq 1)$ より

$$P(0 \leqq x \leqq a) = \frac{7}{20}\{1 - P(0 \leqq x \leqq a)\} \quad P(0 \leqq x \leqq a) = \frac{7}{27}$$

$P(0 \leqq x \leqq a) = -6\displaystyle\int_0^a x(x-1)\,dx = -6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right] = \boldsymbol{-2a^3 + 3a^2}$ より

$$-2a^3 + 3a^2 = \frac{7}{27} \quad \text{整理すると} \quad 54a^3 - 81a^2 + 7 = 0$$

したがって　$(3a-1)(18a^2 - 21a - 7) = 0$　ゆえに　$a = \dfrac{1}{3}, \dfrac{7 \pm \sqrt{105}}{12}$

$0 \leqq a \leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $4\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2 = 0$ より $(\alpha \neq 0)$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 6\cdot\frac{\beta}{\alpha} + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{3}\,i}{3}}$$

$0 < \arg\dfrac{\beta}{\alpha} < \pi$ であるから $\qquad \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{3 + \sqrt{3}\,i}{3}$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって $\qquad \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$

(2) $\boxed{\mathbf{1}}$ (2) を参照

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx &= \int_0^1 (x)'\log(x^2+1)\,dx \\ &= \Big[\,x\log(x^2+1)\,\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \log 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \log 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx\end{aligned}$$

$x = \tan\theta$ とおくと $\quad \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって $\quad \displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx = \log 2 - 2 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\log 2 + \frac{\pi}{2} - 2}$ ■

$\boxed{6}$ (1) $C: y=x^2$ より $y'=2x$ であるから，$x=-1$ のとき，$y'=-2$

C 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ における接線 l の方程式は

$$y-1=-2(x+1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2x-1}$$

C 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ における法線 l' の方程式は

$$y-1=\frac{1}{2}(x+1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$$

(2) $x=t$ のとき，$y'=2t$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線 m の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2tx-t^2}$$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における法線 m' の方程式は

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}}$$

(3) (1)，(2) の結果から，l'，m' の交点 R の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2t}x+t^2+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

を解くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}&=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{t}+1\right)x&=2(t^2-1) \\ (t+1)x&=2t(t+1)(t-1) \end{aligned}$$

$t\neq -1$ であるから　　$x=2t(t-1)$

$$y=\frac{1}{2}\cdot 2t(t-1)+\frac{3}{2}=t^2-t+\frac{3}{2}$$

したがって　　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{2t(t-1),\ t^2-t+\frac{3}{2}}\right)$

$\mathrm{P}\longrightarrow\mathrm{A}$ のとき，$t\longrightarrow -1$ より　$\mathbf{R_0}\left(\boldsymbol{4,\ \frac{7}{2}}\right)$

(4) D は中心 $\mathrm{R_0}\left(4,\ \dfrac{7}{2}\right)$，半径 $\mathrm{R_0A}=\sqrt{(4+1)^2+\left(\dfrac{7}{2}-1\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ の円

$$\boldsymbol{D:(x-4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}}$$

D と $C: y=x^2$ の方程式から y を消去すると

$$(x-4)^2+\left(x^2-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$$

整理すると　$x^4-6x^2-8x-3=0$　ゆえに　$(x+1)^3(x-3)=0$

したがって，共有点の座標は　　$(-1,\ 1),\ (3,\ 9)$

B は A と異なる点であるから　　$\mathbf{B(3,\ 9)}$

(5) AE は円 D の直径の両端であるから，$\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{R_0}\left(4,\ \dfrac{7}{2}\right)$ より　$\mathrm{E}(9,\ 6)$

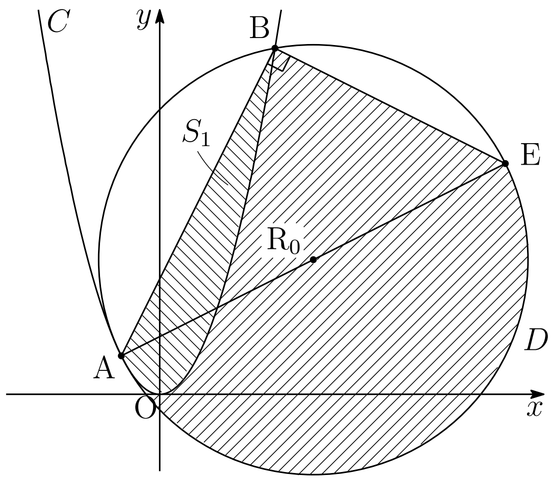
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(9-1)^2}=4\sqrt{5},$$
$$\mathrm{BE}=\sqrt{(9-3)^2+(6-9)^2}=3\sqrt{5},$$
$$\triangle\mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}=30$$

C と直線 $\mathrm{AB}: y=2x+3$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned}S_1&=\int_{-1}^{3}\{(2x+3)-x^2\}\,dx\\&=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)\,dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(3+1)^2=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

求める面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABE}+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2-S_1=30+\frac{125}{8}\pi-\frac{32}{3}=\boldsymbol{\frac{125}{8}\pi+\frac{58}{3}}$$



法線群の包絡線

一般に $C_1 : y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$ における法線の方程式は $(u \neq t)$，それぞれ

$$(x-t)+f'(t)(y-f(t))=0, \quad (x-u)+f'(u)(y-f(u))=0$$

であり，これから

$$x+f'(t)y=t+f'(t)f(t) \quad \cdots ①, \quad x+f'(u)y=u+f'(u)f(u) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$\begin{aligned}\{f'(u)-f'(t)\}y &= u-t+f'(u)f(u)-f'(t)f(t)\\ &= u-t+f'(u)\{f(u)-f(t)\}+f(t)\{f'(u)-f'(t)\}\end{aligned}$$

$u \neq t$ であるから，両辺を $u-t$ で割ると

$$\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}y = 1+f'(u)\cdot\frac{f(u)-f(t)}{u-t}+f(t)\cdot\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}$$

$u \to t$ とすると　　$f''(t)y = 1+f'(t)^2+f(t)f''(t)$

$f''(t) \neq 0$ のとき　　$y = f(t)+\dfrac{1+f'(t)^2}{f''(t)}$

これを ① に代入すると　$x = t-\dfrac{f'(t)\{1+f'(t)^2\}}{f''(t)}$

よって，t を変数として次の $(x,\ y)$ が描く軌跡 (**法線群の包絡線**) が C_2 である．

$$x = t-\frac{f'(t)\{1+f'(t)^2\}}{f''(t)}, \qquad y = f(t)+\frac{1+f'(t)^2}{f''(t)} \tag{$*$}$$

上で求めた $(x,\ y)$ は P における**曲率円 (接触円)** の中心でもある．P における曲率円とは，曲線上の 3 点 P，Q，R について，Q，R が曲線上を P に限りなく近づくときに占める極限の位置の円である．その中心を**曲率中心**という．

C_1 上の 3 点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$，$\mathrm{R}(v,\ f(v))$ とする $(t < u < v)$．3 点 P，Q，R を通る円を $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=0$ とすると

$$\begin{aligned}(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2-r^2=0\\ (u-c_1)^2+\{f(u)-c_2\}^2-r^2=0\\ (v-c_1)^2+\{f(v)-c_2\}^2-r^2=0\end{aligned}$$

ここで，$g(s)=(s-c_1)^2+\{f(s)-c_2\}^2-r^2$ とおくと　　$g(t)=g(u)=g(v)=0$

$g(t)=g(u)$ であるから，ロル (Rolle) の定理により

$$g'(t_1)=0 \quad (t<t_1<u)$$

を満たす t_1 が存在する．同様に，$g(u)=g(v)$ であるから

$$g'(t_2)=0 \quad (u<t_2<v)$$

を満たす t_2 が存在する．$g'(t_1)=g'(t_2)$ であるから，さらにロルの定理を用いると

$$g''(t_3)=0 \quad (t_1<t_3<t_2)$$

を満たす t_3 が存在する．Q，R が P に限りなく近づくとき，$u\to t$，$v\to t$ となるから，上の諸式において

$$g(t)=0, \quad g'(t)=0, \quad g''(t)=0$$

$g'(s)$，$g''(s)$ は

$$\begin{aligned} g'(s)&=2(s-c_1)+2f'(s)\{f(s)-c_2\} \\ g''(s)&=2+2f''(s)\{f(s)-c_2\}+2\{f'(s)\}^2 \end{aligned}$$

$g'(t)=0$，$g''(t)=0$ であるから

$$(t-c_1)+f'(t)\{f(t)-c_2\}=0, \quad 1+f'(t)^2+f''(t)\{f(t)-c_2\}=0$$

上の第 2 式から　　$c_2-f(t)=\dfrac{1+f'(t)^2}{f''(t)}$

これを第 1 式に代入すると　　$c_1-t=-\dfrac{f'(t)\{1+f'(t)^2\}}{f''(t)}$

上の 2 式を $g(t)=0$ に代入することにより，曲率円の半径 r は

$$r^2=\frac{\{1+f'(t)^2\}^3}{\{f''(t)\}^2} \quad ゆえに \quad r=\frac{\{1+f'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$$

よって，曲線の P における曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$c_1=t-\frac{f'(t)\{1+f'(t)^2\}}{f''(t)}, \qquad c_2=f(t)+\frac{1+f'(t)^2}{f''(t)} \tag{$**$}$$

曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ の描く軌跡を縮閉線といい，$(*)$，$(**)$ から曲線の法線群の包絡線と一致することがわかる．また，曲率円の半径は

$$\sqrt{(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2}=\frac{\{1+f'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$$

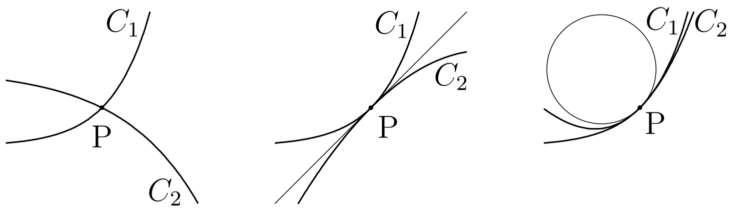
$\boldsymbol{n}$ 次の接触

2 曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ の共有点 P の x 座標を α とする．

1. $f(\alpha) = g(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 0 次の接触をなすという．

2. $f(\alpha) = g(\alpha)$，$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 1 次の接触をなすといい，P における C_1 および C_2 の接線が一致する．

3. $f(\alpha) = g(\alpha)$，$f'(\alpha) = g'(\alpha)$，$f''(\alpha) = g''(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 2 次の接触をなすといい，P における C_1 および C_2 の接触円 (曲率円) が一致する．



0 次の接触　　1 次の接触　　2 次の接触

一般に，$f^{(k)}(\alpha) = g^{(k)}(\alpha)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ が成り立つとき，C_1 と C_2 は点 P で $\boldsymbol{n}$ 次の接触をなすという．

本題において，D は C 上の点 A における接触円であり，C と D は点 A で 2 次の接触をなす．なお，C と D を連立させた方程式

$$(x+1)^3(x-3) = 0$$

から，C と D が 2 次の接触をなすことがわかる．

曲率と曲率半径

曲線の弧長 s に対する接線の向きの変化率を**曲率**といい，曲率 κ は，次式で定義される．

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

点 $(x,\ y)$ における接線が，x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$y' = \tan\theta$$

これを θ について，微分することにより

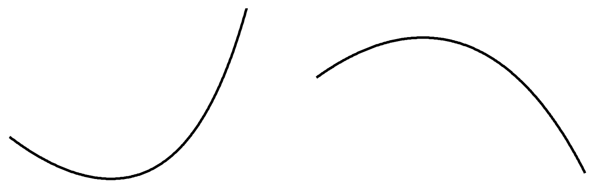
$$y''\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (y')^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$ であるから，$\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$ より

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = \frac{y''}{1+(y')^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

曲率 κ の逆数 $\dfrac{1}{\kappa}$ を**曲率半径**という．曲率円の半径は曲率半径の絶対値に等しい．$\kappa > 0$ すなわち $y'' > 0$ のとき下に凸，$\kappa < 0$ すなわち $y'' <$ のとき上に凸である．

変曲点は曲率の符号が変わる点であり，頂点は曲率が極値をとる点である．



$\kappa > 0$　　　　$\kappa < 0$

2008 年 長崎大学 6 番

放物線 $y = x^2$ 上に，x 座標が t である点 $\mathrm{P}(t)$ をとる．ただし，$t \geqq 0$ とする．$h \neq 0$ とし，放物線の $\mathrm{P}(t)$ における法線と，$\mathrm{P}(t+h)$ における法線を考える．$h \to 0$ とするとき，この 2 法線の交点の x 座標の極限値を $u(t)$，y 座標の極限値を $v(t)$ とする．さらに $(u(t),\ v(t))$ を点 $\mathrm{Q}(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u(t)$ と $v(t)$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が上の放物線上にあるとき，t の値と $\mathrm{Q}(t)$ の座標を求めよ．

(3) 上の放物線，曲線 $x = u(t)$，$y = v(t)$，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答 (1) $y = x^2$ を微分すると　　$y' = 2x$

放物線上の点 $(t,\ t^2)$ における法線の方程式は

$$1(x-t) + 2t(y-t^2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + 2ty = t + 2t^3 \quad \cdots ①$$

$s \neq t$ とする．放物線上の点 $(s,\ s^2)$ における法線の方程式は

$$x + 2sy = s + 2s^3 \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$2(s-t)y = s - t + 2(s^3 - t^3) \quad \text{ゆえに} \quad y = s^2 + st + t^2 + \frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x + 2t\left(s^2 + st + t^2 + \frac{1}{2}\right) = t + 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad x = -2st(s+t)$$

2 直線 ①，② の交点の座標は　$\left(-2st(s+t),\ s^2 + st + t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$

この点を $s \longrightarrow t$ とした極限の点が $(u(t),\ v(t))$ であるから

$$u(t) = \lim_{s\to t}\{-2st(s+t)\} = \boldsymbol{-4t^3}$$

$$v(t) = \lim_{s\to t}\left(s^2 + st + t^2 + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{3t^2 + \frac{1}{2}}$$

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が放物線 $y = x^2$ 上にあるから

$$3t^2 + \frac{1}{2} = (-4t^3)^2 \quad \text{整理すると} \quad 32t^6 - 6t^2 - 1 = 0$$

ゆえに　$(2t^2 - 1)(4t^2 + 1)^2 = 0$　　$t \geqq 0$ に注意して　$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

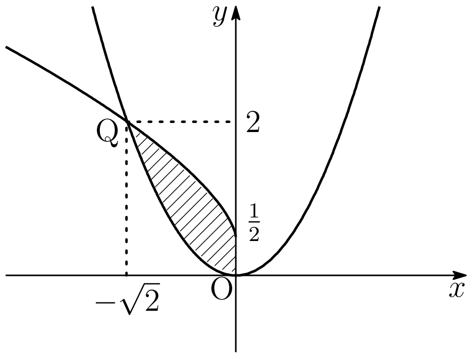
よって　　$\mathbf{Q(-\sqrt{2},\ 2)}$

(3) (1) の結果から　　$x=-4t^3$，$y=3t^2+\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$2x=(-2t)^3$，$y=\dfrac{3}{4}(-2t)^2+\dfrac{1}{2}$

上の 2 式から t を消去すると　　$y=\dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$

求める面積は，下の図の斜線部分である．



この面積を S とすると

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}-x^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{9x(2x)^{\frac{2}{3}}}{20}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}=\boldsymbol{\frac{11}{15}\sqrt{2}}$$

解説 曲線 $y=\dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$ を放物線 $y=x^2$ の法線群の包絡線という．

2009 年 九大理系 3 番

曲線 $C_1: y=\dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b\neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく。A の座標を a で表せ。

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1) $y=\dfrac{x^2}{2}$ を微分すると　$y'=x$

点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルは $(1,\ a)$ であるから，A における法線の方程式は

$$1(x-a)+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+ay=a+\frac{a^3}{2} \qquad \cdots ①$$

同様にして $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は　$x+by=b+\dfrac{b^3}{2}$　$\cdots$②

①，② から x を消去すると

$$(b-a)y=b-a+\frac{b^3-a^3}{2} \quad b\neq a \text{ より} \quad y=1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+a\left(1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right)=a+\frac{a^3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{ab(a+b)}{2}$$

したがって，R の座標は　$\left(-\dfrac{ab(a+b)}{2},\ 1+\dfrac{a^2+ab+b^2}{2}\right)$

よって，$b\to a$ による R の極限の点 A の座標は　$\boldsymbol{\left(-a^3,\ 1+\dfrac{3}{2}a^2\right)}$

(2) (1) の結果から

$$x=-a^3,\ y=1+\frac{3}{2}a^2$$

とおくと，第 1 式から　$a=-x^{\frac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると　$y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

上式が C_2 の方程式であり，C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{2}=1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x^{\frac{2}{3}}-2=0$$

$x^{\frac{1}{3}}=t\cdots$③ とおくと　$x=t^3\cdots$③$'$

$$t^6-3t^2-2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2+1)^2(t^2-2)=0$$

したがって　$t=\pm\sqrt{2}$　　③$'$ より　$x=\pm 2\sqrt{2}$

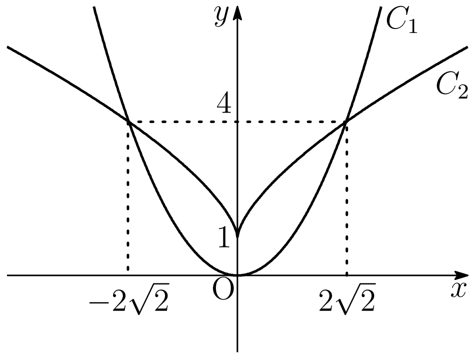
これを C_1 の方程式に代入して　$y=4$

よって，C_1 と C_2 の交点の座標は　$\boldsymbol{(\pm 2\sqrt{2},\ 4)}$

$C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ について　$y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$y'' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに　$y'' < 0$　したがって　C_2 は上に凸の曲線である．

したがって，C_1，C_2 の概形は，次のようになる．



補足

C_2 上の点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ について，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(-a^3,\ \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{3}{2}a^2\left(-\frac{2}{3}a,\ 1\right)$$

$a \to 0$ とすると，C_2 の尖点 $\mathrm{P}(0, 1)$ における接線は，y 軸に平行な直線となる．尖点 (cusp) は，曲線上の可微分でない点であり，接線が定まらないのが一般的である ($y = |x|$ の尖点 $(0,\ 0)$ など)．

(3) C_1，C_2 は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{\left(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= 2\left[\ x + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{6}\ \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{88\sqrt{2}}{15}} \end{aligned}$$

2017 年 九大後期 1 番

座標平面上の曲線 $C : y = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を考える．C 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p})$，$\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{q})$ $(p > 0,\ q > 0)$ における，それぞれの法線 ℓ_1，ℓ_2 を考える．法線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を p と q で表せ．

(2) q が p に限りなく近づくとき，線分 RP の長さの極限値を p で表せ．

解答　(1) $f(x) = \sqrt{x}$ とおくと　　$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p})$ における法線 ℓ_1 の方程式は，$-\dfrac{1}{f'(p)} = -2\sqrt{p}$ より

$y - \sqrt{p} = -2\sqrt{p}(x - p)$　すなわち　$y = -2\sqrt{p}\,x + (2p+1)\sqrt{p}$　$\cdots$①

同様に，C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{q})$ における法線 ℓ_2 の方程式は

$$y = -2\sqrt{q}\,x + (2q+1)\sqrt{q} \quad \cdots ②$$

①，② から y を消去すると

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{p} - \sqrt{q})x &= (2p+1)\sqrt{p} - (2q+1)\sqrt{q} \\ &= 2(p\sqrt{p} - q\sqrt{q}) + \sqrt{p} - \sqrt{q} \end{aligned}$$

2 点 P，Q は異なるので，$\sqrt{p} - \sqrt{q} \neq 0$ であるから

$$x = \frac{p\sqrt{p} - q\sqrt{q}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} + \frac{1}{2} = p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned} y &= -2\sqrt{p}\left(p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2}\right) + (2p+1)\sqrt{p} \\ &= (-2\sqrt{pq} - 2q)\sqrt{p} = -2\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) \end{aligned}$$

よって，点 R の座標は

$$\boldsymbol{\left(p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2}, -2\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q})\right)}$$

(2) q が p に限りなく近づいたとき，点 R の極限の位置は，(1) の結果から

$$\left(3p + \frac{1}{2},\ -4p\sqrt{p}\right)$$

このとき，RP の長さは

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(3p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + (-4p\sqrt{p} - \sqrt{p})^2} \\ =&\sqrt{\left(2p + \frac{1}{2}\right)^2 + 4p\left(2p + \frac{1}{2}\right)^2} \\ =&\left(2p + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 + 4p} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(1 + 4p)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

2020 年 東大理系 6 番

以下の問いに答えよ．

(1) A，α を実数とする．θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0$$

を考える．$A > 1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せ．

(2) 座標平面上の楕円

$$C : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える．また，$0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする．D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r $(0 < r < 1)$ が存在することを示せ．また，そのような r の最大値を求めよ．

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある．

解答 (1) $f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)$ とおくと，$A>1$，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)<0$$
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)<0$$

方程式 $f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)$ にそれぞれ少なくとも 1 つずつ解をもつ．また，$f(0)\leqq 0$ のときは，$f(\theta)=0$ は区間 $\left[\,0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ に解をもち，$f(0)=f(2\pi)>0$ のときは，$f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right)$ に少なくとも 1 つ解をもつ．よって，$f(\theta)=0$ は，$0\leqq\theta<2\pi$ において，少なくとも 4 個解をもつ．

(2) $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ より，$x=\sqrt{2}\cos\theta,\ y=\sin\theta$ とすると $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=\left(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \cos\theta\right)$$

したがって，C 上の点 $(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ における法線の方程式は

$$(-\sqrt{2}\sin\theta)(x-\sqrt{2}\cos\theta)+(\cos\theta)(y-\sin\theta)=0$$

すなわち　$l:\sqrt{2}x\sin\theta-y\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$

$D:2x^2+y^2<r^2$ の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{B\cos(-\beta)}{\sqrt{2}},\ B\sin(-\beta)\right)$ が l 上の点であるとき $(0\leqq B<r,\ 0\leqq\beta<2\pi)$

$$\sqrt{2}\left(\frac{B\cos\beta}{\sqrt{2}}\right)\sin\theta-(-B\sin\beta)\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$$
$$\sin 2\theta-2B\sin(\theta+\beta)=0 \qquad \text{(A1)}$$

(i) $B=0$ のとき，(A1) を満たす θ は　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$
$\mathrm{P}(0,\ 0)$ に対して，Q は $(\pm\sqrt{2},\ 0)$，$(0,\pm 1)$ の 4 点存在する．

(ii) $B>0$ のとき，(A1) より

$$\frac{1}{2B}\sin 2\theta-\sin(\theta+\beta)=0$$

(1) の結果から，$\dfrac{1}{2B}>1$，すなわち，$B<\dfrac{1}{2}$ となるように

$$0<r\leqq\frac{1}{2}$$

をとればよい．

$r > \dfrac{1}{2}$ であるとき，$B = \dfrac{1}{2}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$ を (A1) に代入すると

$$\sin 2\theta - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

これから　$2\theta = \theta + \dfrac{\pi}{4} + 2m\pi,\ \pi - \left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2n\pi$　($m,\ n$ は整数)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して解くと　$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{11\pi}{12},\ \dfrac{19\pi}{12}$

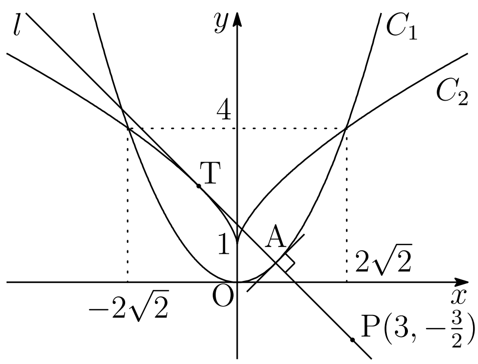
このとき，θ は 3 個であるから，条件を満たす r の最大値は　$\boldsymbol{r = \dfrac{1}{2}}$

補足 $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ 以外に，$\beta = \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ としてもよい．実際，

$$\beta = \frac{3\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta = \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{12},\ \frac{17\pi}{12}$$
$$\beta = \frac{5\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta = \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12}$$
$$\beta = \frac{7\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta = \frac{7\pi}{4},\ \frac{5\pi}{12},\ \frac{13\pi}{12}$$

解説 本題は，点 P から楕円 $C : \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ に引いた法線が 4 本引ける領域について考察する問題である．楕円の法線群の包絡線について理解しておくと，本題の主旨が理解できる．法線が引ける本数は，包絡線に引ける接線の本数に等しい．例えば，放物線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の法線群の包絡線は $C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ である[1]．y 軸上にない点 P をとると，C_2 の下側にある点 P からは C_1 に 1 本の法線，C_2 上の点 P から C_1 に 2 本の法線，C_2 の上側にある点 P からは C_1 に 3 本の法線が引ける．また，y 軸上の点からは C_1 に 1 本の法線が引ける．

$\mathrm{P}(3, -\frac{3}{2})$ から包絡線 C_2 に引いた接線 $l : y = -x + \frac{5}{2}$ は第 2 象限の点 $\mathrm{T}(-1,\ \frac{5}{2})$ で接し，l と C_1 の第 1 象限の交点は $\mathrm{A}(1,\ \frac{1}{2})$ である．このとき C_1 の点 A における法線が l である．また，C_1 の A における接触円 (曲率円) の中心が T である．



[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf の $\boxed{3}$ を参照．

別解 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上に点 $\mathrm{X}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$.

点 X の接方向は $(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \cos\theta)$ であるから，C の点 X における法線は

$$(-\sqrt{2}\sin\theta)(x-\sqrt{2}\cos\theta)+(\cos\theta)(y-\sin\theta)=0$$

すなわち　$\sqrt{2}x\sin\theta-y\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$

C 上に隣接 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{2}\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2}\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとると $(\alpha\neq\beta)$，A，B における法線は，それぞれ

$$\begin{cases}\sqrt{2}x\sin\alpha-y\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha & \cdots ① \\ \sqrt{2}x\sin\beta-y\cos\beta=\sin\beta\cos\beta & \cdots ②\end{cases}$$

① $\times\cos\beta-$ ② $\times\cos\alpha$ より (y を消去)

$$\sqrt{2}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)x=\cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha-\sin\beta)$$

これを解いて　$x=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta(\sin\beta-\sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\beta-\alpha)}\quad\cdots(*)$

$(*)$ において，$\beta\to\alpha$ とすると

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\alpha}x&=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\cos\alpha\cos\beta(\sin\beta-\sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\beta-\alpha)}\\&=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}$ は $\sin x$ の $x=\alpha$ における微分係数 $\cos\alpha$，

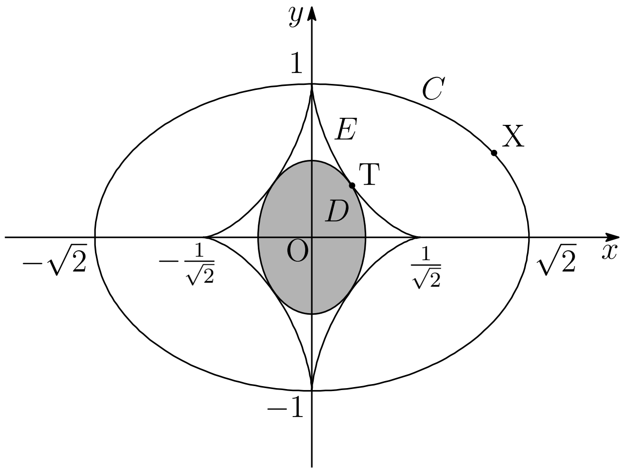
また，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\beta-\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=1$ であるから

$$\lim_{\beta\to\alpha}x=\frac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}}\quad \text{これを①に代入すると}\quad \lim_{\beta\to\alpha}y=-\sin^3\alpha$$

点 A に対応する点 $\left(\dfrac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}},\ -\sin^3\alpha\right)$ が描く軌跡 E の方程式は

$$x=\frac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}},\quad y=-\sin^3\alpha\quad \text{すなわち}\quad E:(\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

与えれた条件を満たす点 P は，E の内部の点である (境界線を含まない).
$\partial D: 2x^2+y^2=r^2$ とすると，求める r は ∂D と E が接するときである.
この ∂D と E の第 1 象限における共有点を A とすると，A におけるこれらの接線は，共通接線である.



∂D より　$4x+2yy'=0$　ゆえに　$y'=-\dfrac{2x}{y}$

E より　$\dfrac{2}{3}(\sqrt{2}x)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$　ゆえに　$y'=-\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

したがって　$-\dfrac{2x}{y}=-\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$　第 1 象限の点であるから　$y=\sqrt{2}x$

これと E の方程式を連立すると　$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

点 A は ∂D の点であるから

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=r^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r=\frac{1}{2}}$$

補足 E の内部 (境界を含まない)E' の点から E に引ける接線は 4 本ある [2]．例えば，第 1 象限にある E' の点からは，E に第 1 象限で接する l_1，l_1' の 2 本の接線，第 2 象限で接する l_2，第 4 象限で接する l_4 がある．l_1，l_1' と C の第 4 象限の交点が，C のそれぞれの点における法線である．l_2 と C の第 3 象限の交点が，C の点における法線である．l_4 と C の第 1 象限の交点が，C の点における法線である．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2020_04_19.pdf を参照

$\boxed{7}$ (1) $l = \overset{\frown}{\mathrm{AP}} = \boldsymbol{2\theta}$

$\mathrm{P} = \mathrm{B}$ のとき，$l = 2\cdot\dfrac{\pi}{2} = \pi$ であるから　$\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi},\ \mathbf{2})$

(2) $\mathbf{P}(\mathbf{2}\cos\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{2}\sin\boldsymbol{\theta})$ より　$\mathbf{E}(\mathbf{2}\cos\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{0})$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の向きは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたもので，$\mathrm{PQ} = \overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\ &= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta) + 2\theta\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta) + 2\theta(\sin\theta, -\cos\theta)\\ &= (2\cos\theta + 2\theta\sin\theta,\ 2\sin\theta - 2\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

$\mathbf{Q}(\mathbf{2}\cos\boldsymbol{\theta} + \mathbf{2}\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{2}\sin\boldsymbol{\theta} - \mathbf{2}\boldsymbol{\theta}\cos\boldsymbol{\theta})$ であるから

$$\mathbf{F}(\mathbf{2}\cos\boldsymbol{\theta} + \mathbf{2}\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{0})$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)' d\theta\\ &= \left[\ \theta\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) - 1\left(-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos 2\theta\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)' d\theta\\ &= \left[\ \theta^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) - 2\theta\left(-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right) + 2\left(-\frac{1}{8}\sin 2\theta\right)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

補足 $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義すると

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\, dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)\\ &\qquad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\, dx\end{aligned}$$

(4) 点 D から x 軸に垂線 DH を引き，点 Q が描く曲線と x 軸および線分 DH で囲まれた部分の面積を S_1 とする．

$$x = f(\theta) = 2\cos\theta + 2\theta\sin\theta,$$
$$y = g(\theta) = 2\sin\theta - 2\theta\cos\theta$$

とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = f'(\theta) = 2\theta\cos 2\theta$ より

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta)f'(\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta - 2\theta\cos\theta)\cdot 2\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\theta\sin\theta\cos\theta - 4\theta^2\cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\sin 2\theta - 2\theta^2 - 2\theta^2\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\,d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos 2\theta - \frac{2}{3}\Big[\ \theta^3\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{4} - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^3}{12} = \pi - \frac{\pi^3}{12}
\end{aligned}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \text{長方形 OHDB} - \frac{1}{4}\text{円} - S_1 \\
&= \pi\cdot 2 - \frac{1}{4}\pi\cdot 2^2 - S_1 = 2\pi - \pi - \left(\pi - \frac{\pi^3}{12}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{12}}
\end{aligned}$$

別解　$x=f(\theta)=2\cos\theta+2\theta\sin\theta,\ y=g(\theta)=2\sin\theta-2\theta\cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}f(\theta)g'(\theta)-f'(\theta)g(\theta)&=(2\cos\theta+2\theta\sin\theta)\cdot 2\theta\sin\theta\\&\qquad\qquad-2\theta\cos\theta(2\sin\theta-2\theta\cos\theta)\\&=4\theta^2\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，OQ の描く図形の面積を S_2 とする．
ガウス・グリーンの定理により

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(\theta)g'(\theta)-f'(\theta)g(\theta)\}\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\theta^2\,d\theta=\frac{2}{3}\Big[\ \theta^3\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{12}\end{aligned}$$

求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=S_2+\triangle\mathrm{ODB}-\frac{1}{4}\text{円}\\&=\frac{\pi^3}{12}+\frac{1}{2}\pi\cdot 2-\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\boldsymbol{\frac{\pi^3}{12}}\end{aligned}$$

(5) $f'(\theta)=2\theta\cos\theta$，$g'(\theta)=2\theta\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{f'(\theta)^2+g'(\theta)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(2\theta\cos\theta)^2+(2\theta\sin\theta)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\,d\theta=\Big[\ \theta^2\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\end{aligned}$$

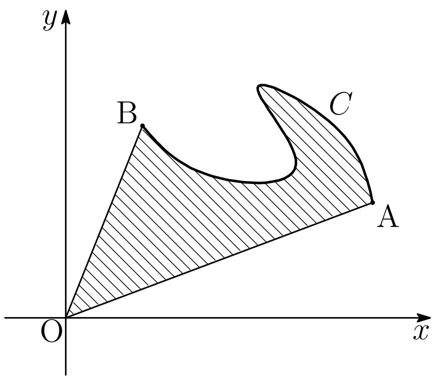
■

ガウス・グリーンの定理

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C: x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



証明　O を原点とする．C 上の 2 点 $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$，$\mathrm{Q}(f(t+\Delta t),\ g(t+\Delta t))$ をとり (OQ の偏角 > OP の偏角)，△OPQ の面積を ΔS とすると

$$\begin{aligned}2\Delta S &= f(t)g(t+\Delta t) - f(t+\Delta t)g(t)\\ &= f(t)\{g(t+\Delta t) - g(t)\} - \{f(t+\Delta t) - f(t)\}g(t)\\ \frac{2\Delta S}{\Delta t} &= f(t)\cdot\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} - \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\cdot g(t)\end{aligned}$$

$\Delta t \to 0$ とすると　　$2\dfrac{dS}{dt} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$

$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$

証終

2025 年 九大後期 4 番

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 θ を用いて次のように定める．

$$x = -\cos\theta - \theta\sin\theta, \quad y = \sin\theta - \theta\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}$ および $\dfrac{dy}{d\theta}$ を計算して θ に関する x，y の増減と極値を調べ，曲線 C の概形を図示せよ．ただし，曲線 C と y 軸に平行な直線が接するときの接点の座標も求めること．

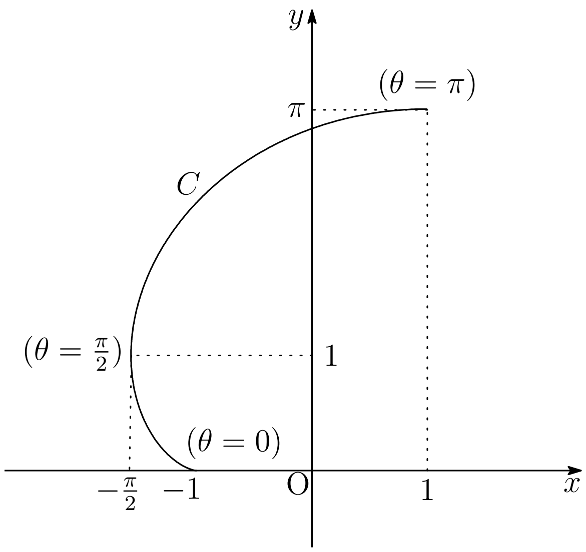
(2) $\theta = 0$ の位置から曲線 C 上を動く点 P を考える．点 P の軌跡の長さが $\dfrac{2}{9}\pi^2$ に達するときの θ を θ_1 と定める．θ_1 を求めよ．

(3) (2) で定めた θ_1 に対応する点 P を点 P_1 とする．点 P_1 から y 軸に垂線を引くとき，この垂線，曲線 C，x 軸，y 軸で囲まれる面積を求めよ．

解答 (1) $C : x = -\cos\theta - \theta\sin\theta, \quad y = \sin\theta - \theta\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = -\theta\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \theta\sin\theta$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	$+$	$+$	
$\left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}\right)$		$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	
(x, y)	$(-1, 0)$	$\cdots$	$(-\frac{\pi}{2}, 1)$	$\cdots$	$(1, \pi)$



(2) $\theta=0$ から $\theta=\theta_1$ までの C の弧長を l とすると $(0 \leqq \theta_1 \leqq \pi)$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \sqrt{(-\theta\cos\theta)^2+(\theta\sin\theta)^2}\,d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \theta\,d\theta = \left[\ \frac{\theta^2}{2}\ \right]_0^{\theta_1} = \frac{{\theta_1}^2}{2} \end{aligned}$$

$l=\dfrac{2}{9}\pi^2$ のとき　$\dfrac{{\theta_1}^2}{2}=\dfrac{2}{9}\pi^2$　これを解いて　$\boldsymbol{\theta_1=\dfrac{2\pi}{3}}$

(3) (2) の結果から，P_1 の x 座標を x_1 とすると

$$\begin{aligned} x_1 &= -\cos\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}<0 \end{aligned}$$

これと (1) の結果から，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ における C 上の x 座標は　$x<0$

$f(\theta)=\sin\theta-\theta\cos\theta$ とし，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(0)}^{f(\frac{2\pi}{3})}(-x)\,dy = \int_0^{\frac{2\pi}{3}}(\cos\theta+\theta\sin\theta)f'(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}}(\cos\theta+\theta\sin\theta)\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}}(\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\sin^2\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta}{2}\sin2\theta-\frac{\theta^2}{2}\cos2\theta\right)d\theta \\ &= \left[\ \frac{\theta^3}{6}\ \right]_0^{\frac{2\pi}{3}}+\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)'d\theta+\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{\theta^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\right)'d\theta \\ &= \frac{4}{81}\pi^3+\left[\ \frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\ \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &\quad+\left[\ \left(-\frac{\theta^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\right)-(-\theta)\left(-\frac{1}{4}\cos2\theta\right)+(-1)\left(-\frac{1}{8}\sin2\theta\right)\ \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{4}{81}\pi^3+\left[\left(-\frac{\theta^2}{4}+\frac{1}{4}\right)\sin2\theta-\frac{\theta}{2}\cos2\theta\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{81}\pi^3+\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

別解 点 P_1 の座標は $\left(-\cos\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{2\pi}{3},\ \sin\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$

すなわち　$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

点 P_1 から y 軸に垂線 $\mathrm{P}_1\mathrm{H}$ を引くと

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}&=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

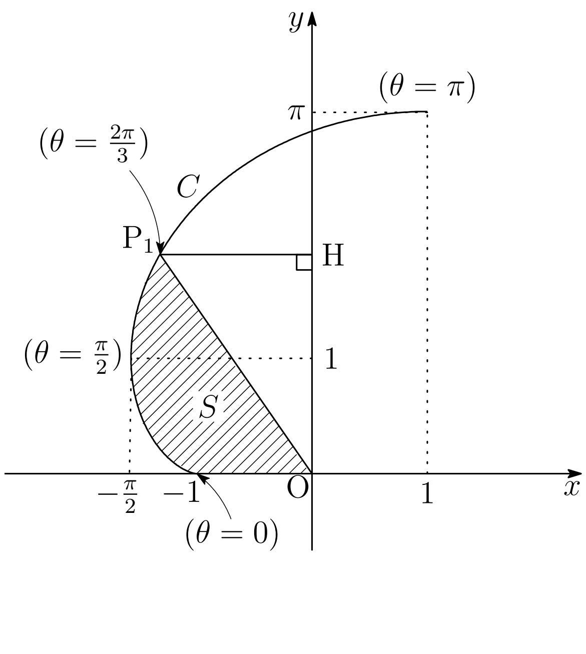
$C: x=-\cos\theta-\theta\sin\theta,\quad y=\sin\theta-\theta\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$ より

$$\begin{aligned}x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y&=(-\cos\theta-\theta\sin\theta)\theta\sin\theta-(-\theta\cos\theta)(\sin\theta-\theta\cos\theta)\\&=-\theta^2\end{aligned}$$

下の図の斜線部分の面積を S とすると，ガウス・グリーンの定理により
(積分区間は回転角の正の向きにとる)

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}(-\theta^2)d\theta=\left[-\frac{\theta^3}{6}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{0}=\frac{4}{81}\pi^3$$

求める面積は　$S+\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}=\boldsymbol{\dfrac{4}{81}\pi^3+\dfrac{\sqrt{3}}{18}\pi^2+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}}$



$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $\boxed{\mathbf{2}}$ (3) を参照

(2) $\boxed{\mathbf{1}}$ (2) を参照

(3) $\boxed{\mathbf{5}}$ (1) を参照

また，$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ より　$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = \sqrt{3} : 2$

$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$ であるから　$\boldsymbol{\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{\pi}{2}}$ **の直角三角形**

(4) $\boxed{\mathbf{4}}$ (4) を参照 ■

9 (1) 直線 AB の方程式は　$y=-2x+2$
したがって，求める領域は

$$\boldsymbol{x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ y \leqq -2x+2}$$

(2) $\mathrm{P}(t,\ 2-2t)$ より　$\mathrm{Q}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 2-2t)$
l_2 は点 $\mathrm{R}(0,\ 2-2t)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(t,\ 2t-2)\neq\vec{0}$ に平行な直線

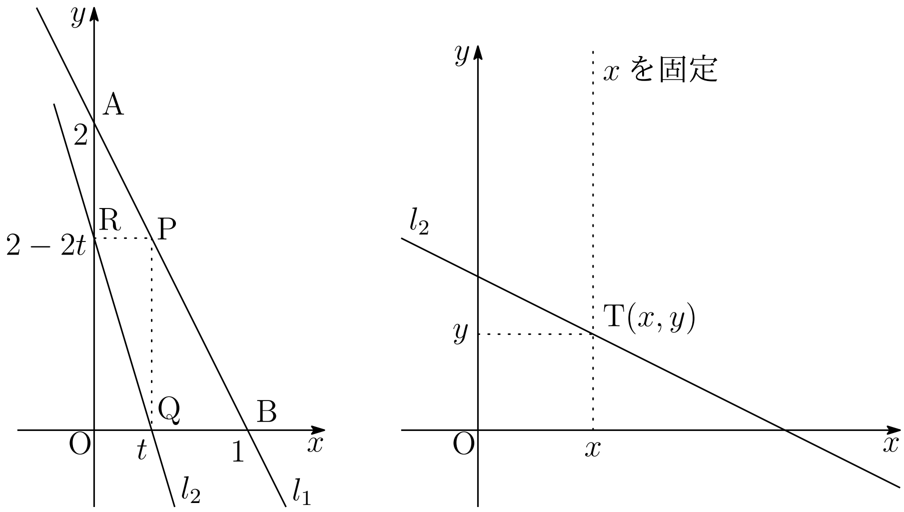
$$(2t-2)x-t\{y-(2-2t)\}=0$$

すなわち　$(2t-2)x-ty+t(2-2t)=0$
これを t について整理すると

$$2t^2+(-2x+y-2)t+2x=0 \qquad (*)$$

$2t^2+at+b=0$ と係数を比較すると

$$\boldsymbol{a=-2x+y-2,\ b=2x}$$



(3) $x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{2}$ を $(*)$ に代入すると

$$2t^2-2t+\frac{1}{2}=0 \quad ゆえに \quad \left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$t=\dfrac{1}{2}$ は $0\leqq t\leqq 1$ を満たすから，点 $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ は領域 F に含まれる．

(4) $0<t<1$ のとき，$(*)$ を y について解くと

$$y=\left(2-\frac{2}{t}\right)x+2-2t \qquad (**)$$

x を固定し，y を t の関数と考えると

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2x}{t^2}-2=\frac{2(x-t^2)}{t^2}$$

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{x}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

したがって，y は $t=\sqrt{x}$ のとき，最大値

$$\left(2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)x+2-2\sqrt{x}=2(1-\sqrt{x})^2$$

をとる．$(**)$ より $\displaystyle\lim_{t\to 1-0} y=0$ であるから

$$0<y\leqq 2(1-\sqrt{x})^2$$

$t=0$ のとき線分 QR は線分 OA，$t=1$ のとき線分 QR は線分 OB である．
線分 OB は $y=0$ $(0\leqq x\leqq 1)$ であるから，F の表す領域は

$$\boldsymbol{0\leqq y\leqq 2(1-\sqrt{x})^2}$$

(5) (4) の結果から

$$S=\int_0^1 2(1-\sqrt{x})^2\,dx=\int_0^1(2-4\sqrt{x}+2x)\,dx=\left[\,2x-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+x^2\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

別解 $u=1-\sqrt{x}$ とおくと　$x=(1-u)^2$，$\dfrac{dx}{du}=-2(1-u)$

x	$0\longrightarrow 1$
u	$1\longrightarrow 0$

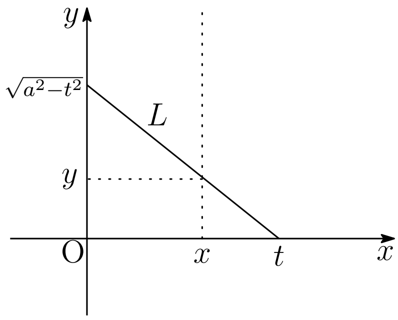
求める面積は

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1 2(1-\sqrt{x})^2\,dx=\int_1^0 2u^2\{-2(1-u)\}\,du=4\int_0^1 u^2(1-u)\,du\\&=4\cdot\frac{2!1!}{4!}(1-0)^4=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\boldsymbol{\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

関連 アステロイドは，次の線分 L の接線群の包絡線である．

長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．
右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について



$$y = -\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}x + \sqrt{a^2-t^2} \quad \cdots (*)$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a^2x-t^3}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$
これを $(*)$ に代入すると

$$y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

したがって

$$\begin{aligned} y^2 &= x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2 \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \end{aligned}$$

よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．

■

積分公式

m，n を 0 以上の整数とする．

$$I(m,n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

とおくと，部分積分法により

$$\begin{aligned}
I(m,n)&=\frac{1}{m+1}\int_0^1 (t^{m+1})'(1-t)^n\,dt\\
&=\left[\frac{1}{m+1}t^{m+1}(1-t)^n\right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt\\
&=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}I(m+n,0)\\
&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^{m+n}\,dt=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}
\end{aligned}$$

この結果を利用すると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

このとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$

したがって，次の積分公式が成立する．

積分公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

接線群の包絡線

2011年 阪大理系2番

実数θが動くとき，xy平面上の動点$\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$および$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$を考える．$\theta$が$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，平面内で線分PQが通過する部分をDとする．Dをx軸のまわりに1回転してできる立体の体積Vを求めよ．

解答 2点$\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$を通る直線の方程式は$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{x}{8\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=1 \quad \text{ゆえに} \quad y=\sin\theta-\frac{x}{8}\tan\theta \quad \cdots①$$

この直線上のxを固定し，yが極値をとる点では，$\dfrac{dy}{d\theta}=0$であるから

$$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\frac{x}{8\cos^2\theta}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=8\cos^3\theta \quad \cdots②$$

② を ① に代入すると

$$y=\sin\theta-\frac{8\cos^3\theta}{8}\tan\theta \quad \text{ゆえに} \quad y=\sin^3\theta \quad \cdots③$$

②，③ より，直線PQの包絡線は，$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$のときも成立することに注意して

$$(*)\begin{cases} x=8\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$(*)$から，θを消去すると

$$y=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \qquad (0 \leqq x \leqq 8)$$

$x=8t$とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=8$

x	$0 \longrightarrow 8$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^8 y^2\,dx=\int_0^8\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 dx=8\int_0^1(1-t^{\frac{2}{3}})^3\,dt\\&=8\int_0^1(1-3t^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{4}{3}}-t^2)\,dt\\&=8\Big[\,t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}t^3\,\Big]_0^1=\frac{128}{105} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{V=\frac{128}{105}\pi}\end{aligned}$$

別解 (∗) より $\dfrac{dx}{d\theta} = -24\cos^2\theta\sin\theta$

x	$0 \longrightarrow 8$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6\theta(-24\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 3\cos^4\theta + 3\cos^6\theta - \cos^8\theta)\sin\theta\,d\theta \\
&= 24\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{3}{5}\cos^5\theta - \frac{3}{7}\cos^7\theta + \frac{1}{9}\cos^9\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{105}
\end{aligned}
$$

2014 年 名大理系 2 番

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

解答 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線は

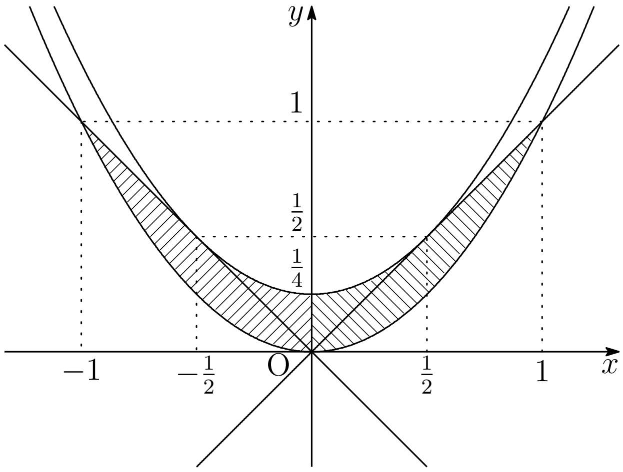
$$y - t^2 = \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1)-t}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y = (2t+1)x - t^2 - t \quad \cdots①$$

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = t + \frac{1}{2} \quad \cdots②$$

①，② から t を消去すると $\quad y = x^2 + \dfrac{1}{4} \quad \cdots(*)$

$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，線分 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ が通過してできる図形は，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_0^1 (x-x^2)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-x\right\}dx \\
&= \int_0^1 x(1-x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{6} + \left[\ \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\ \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \frac{5}{12}}$

2014 年 東大文系 3 番

座標平面の原点を O で表す．
線分 $y=\sqrt{3}x\ (0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x\ (-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1) s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2) D を図示せよ．

解答　(1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -2 \leqq q \leqq 0)$，

$$\mathrm{OP} = 2p, \quad \mathrm{OQ} = -2q$$

$\mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = 6$ であるから　$2p + (-2q) = 6$　ゆえに　$q = p - 3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2$，$-3 \leqq p - 3 \leqq 0$　すなわち　$0 \leqq p \leqq 2$

2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x - p)$$

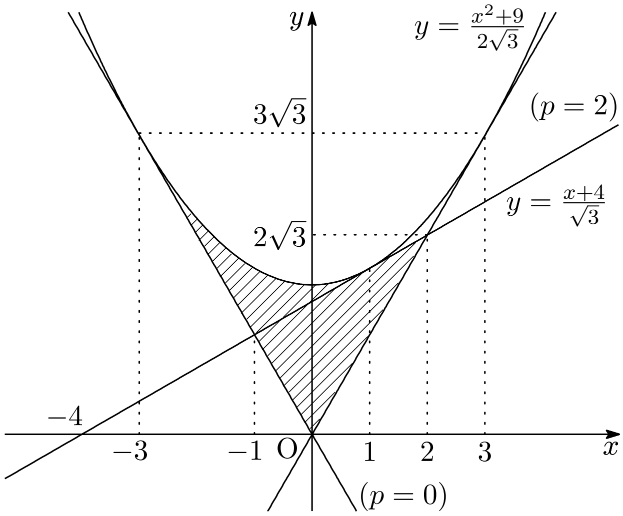
すなわち　$$y = \frac{(2p-3)x - 2p^2 + 6p}{\sqrt{3}} \quad \cdots ①$$

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 4p + 6) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2p - 3 \quad \cdots ②$$

①，② から p を消去すると　$$y = \frac{x^2+9}{2\sqrt{3}} \quad \cdots (*)$$

D は，$0 \leqq p \leqq 2$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ(直線 ①) が通過する領域であるから，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\boldsymbol{-3 \leqq s \leqq 0} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{0 \leqq s \leqq 1} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{1 \leqq s \leqq 2} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s+4}{\sqrt{3}}}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域．

2014 年 東大理系 6 番

座標平面の原点を O で表す．
線分 $y=\sqrt{3}\,x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}\,x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2) D を図示せよ．

解答 (1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -2 \leqq q \leqq 0)$，

$$\mathrm{OP}=2p, \quad \mathrm{OQ}=-2q$$

$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ であるから　$2p+(-2q)=6$　ゆえに　$q=p-3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -2 \leqq p-3 \leqq 0$　すなわち　$1 \leqq p \leqq 2$

2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y-\sqrt{3}p=\frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x-p)$$

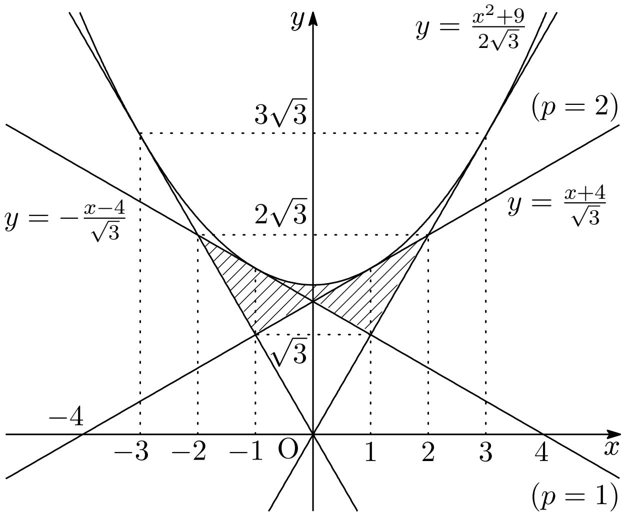
すなわち　$y=\dfrac{(2p-3)x-2p^2+6p}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp}=0$ であるから

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-4p+6)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=2p-3 \quad \cdots②$$

①，② から p を消去すると　$y=\dfrac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$　$\cdots(*)$

D は，$1 \leqq p \leqq 2$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ(直線 ①) が通過する領域であるから，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\mathbf{0 \leqq s \leqq 1 \text{ のとき } -\frac{s-4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$$

$$\mathbf{1 \leqq s \leqq 2 \text{ のとき } \sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s+4}{\sqrt{3}}}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域．

10 (1) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos(\theta+\alpha),\ \sin(\theta+\alpha),\ 1)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= (1-t)(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)+t(\cos(\theta+\alpha),\ \sin(\theta+\alpha),\ 1)\\ &= ((1-t)\cos\theta+t\cos(\theta+\alpha),\ (1-t)\sin\theta+t\sin(\theta+\alpha),\ t)\end{aligned}$$

したがって，点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ の座標は

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x=(1-t)\cos\theta+t\cos(\theta+\alpha)},\\ &\boldsymbol{y=(1-t)\sin\theta+t\sin(\theta+\alpha)},\\ &\boldsymbol{z=t}\end{aligned}$$

(2) d は点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ から z 軸上の点 $(0,\ 0,\ z)$ までの距離であるから，(1) の結果により

$$\begin{aligned}d^2 &= x^2+y^2\\ &= \{(1-t)\cos\theta+t\cos(\theta+\alpha)\}^2+\{(1-t)\sin\theta+t\sin(\theta+\alpha)\}^2\\ &= (1-t)^2+t^2+2t(1-t)\{\cos(\theta+\alpha)\cos\theta+\sin(\theta+\alpha)\sin\theta\}\\ &= 2t^2-2t+1+2t(1-t)\cos\alpha\\ &= 2(1-\cos\alpha)^2t^2-2(1-\cos\alpha)t+1\\ &= 2(1-\cos\alpha)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad (*)\end{aligned}$$

d^2 の最小値は，$0<d\leqq\pi$ より，$1-\cos\alpha>0$ であるから

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}\ \text{のとき，最小値}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\boldsymbol{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

(3) $(*)$ から，曲面 (線織面) の方程式は

$$x^2+y^2=2(1-\cos\alpha)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad (**)$$

したがって，求める立体 F の体積 V は

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi}&=\int_0^1(x^2+y^2)\,dz\\
&=\int_0^1\left\{2(1-\cos\alpha)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1+\cos\alpha}{2}\right\}dz\\
&=\left[\,\frac{2}{3}(1-\cos\alpha)\left(z-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1+\cos\alpha}{2}z\,\right]_0^1\\
&=\frac{1}{6}(1-\cos\alpha)+\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{2+\cos\alpha}{3}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{(2+\cos\alpha)\pi}{3}}$

(4) V が最大となるのは，$\cos\alpha=1$，すなわち，$\boldsymbol{\alpha=0}$ **のとき，**$\boldsymbol{V=\pi}$
このとき，$(**)$ より，F は**円柱**

$$\boldsymbol{x^2+y^2=1,\ \ 0\leqq z\leqq 1}$$

V が最小となるのは，$\cos\alpha=-1$，すなわち，$\boldsymbol{\alpha=\pi}$ **のとき，**$\boldsymbol{V=\dfrac{\pi}{3}}$
このとき，$(**)$ より，F は**円錐**

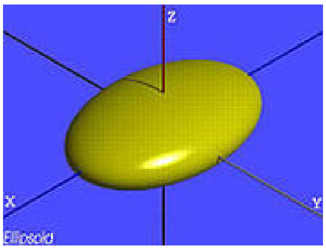
$$\boldsymbol{x^2+y^2-4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=0,\ \ 0\leqq z\leqq 1}$$

補足 円柱は楕円柱面に，円錐は楕円錐面に分類される．
本題 (4) は，$0<\alpha<\pi$ のとき，F は一葉双曲面になる．
一般に，直線が動いてできる曲面を線織面という．平面，円柱，円錐は線織面の典型例であり，一葉双曲面，双曲放物面も線織面である．


2 次曲面の種類

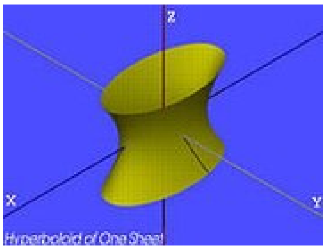
退化しない 2 次曲面は次の 9 通りである．下図において $\mu > 0$ とする．

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



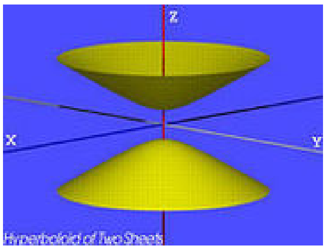
楕円面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



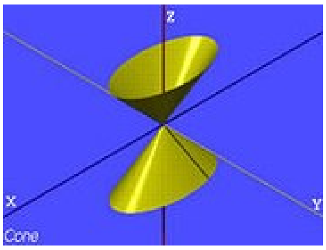
一葉双曲面

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



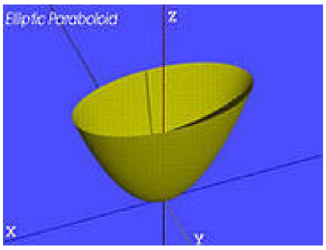
二葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



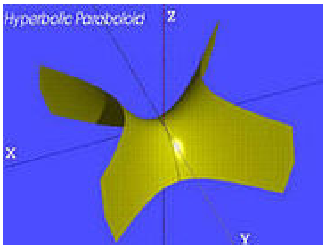
楕円錐面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mu z$$



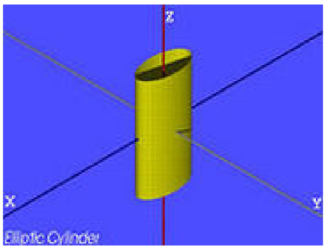
楕円放物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\mu z$$



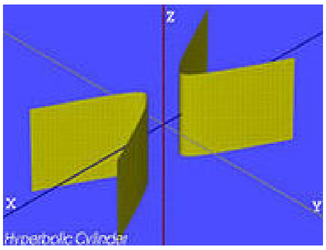
双曲放物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



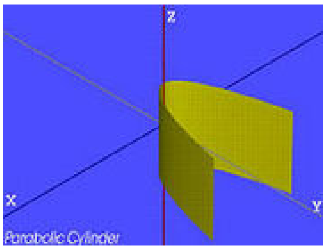
楕円柱面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



双曲柱面

$$x^2=\mu y$$



放物柱面

$(x,\ y,\ z)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)+t(-a\sin\theta,\ b\cos\theta,\ \pm c)$ とすると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$(x,\ y,\ z)=\left(as,\ 0,\ \dfrac{s^2}{\mu}\right)+t\left(a,\ \pm b,\ \dfrac{2s}{\mu}\right)$ とすると $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\mu z$

2004 年 北大理系 4 番

a，b を正の実数とする．空間内の 2 点 A$(0,\ a,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を ℓ とする．直線 ℓ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする．

(1) x 座標の値が t であるような直線 ℓ 上の点 P の座標を求めよ．

(2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ．

(3) 図形 M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ．

解答 (1) 2 点 A$(0,\ a,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ b)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$x=\frac{y-a}{-a}=\frac{z}{b}$$

$x=t$ のとき，点 P の座標は $\boldsymbol{(t,\ a-at,\ bt)}$

(2) ℓ の方程式から $y=a-ax,\ \ z=bx$
M は ℓ を x 軸まわりに 1 回転させたものであるから，M は

$$y^2+z^2=(a-ax)^2+(bx)^2 \qquad (*)$$

M と xy 平面が交わって得られる図形は，$z=0$ を代入して

$$y^2=(a-ax)^2+bx^2$$

よって $\boldsymbol{y^2=(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2}$

(3) (2) の結果から，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^1\{(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2\}\,dx\\ &=\pi\left[\ \frac{1}{3}(a^2+b^2)x^3-a^2x^2+a^2x\ \right]_0^1\\ &=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(a^2+b^2)} \end{aligned}$$

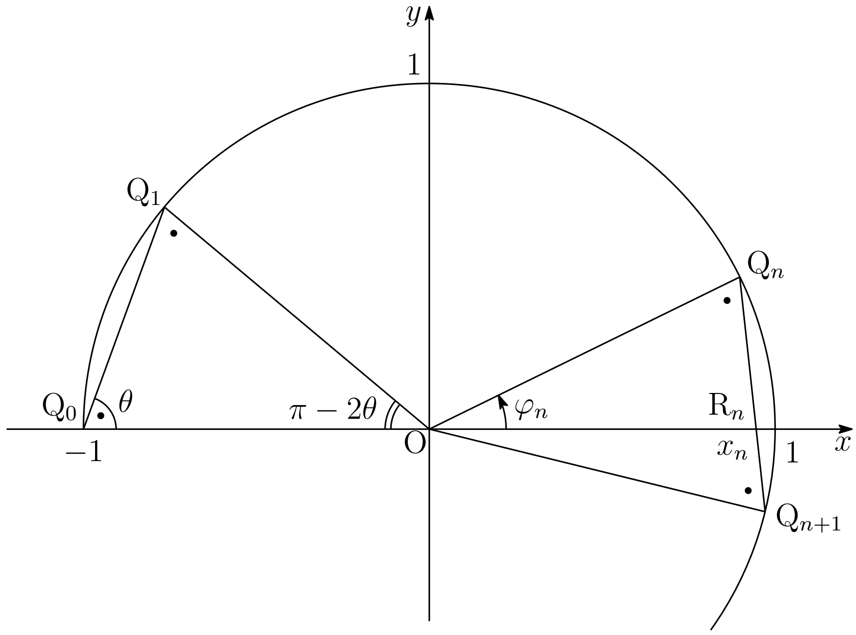
補足 $(*)$ は一葉双曲面

$$-(a^2+b^2)\left(x-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

であり，これと xy 平面との断面の図形が (2) で求めた双曲線である．一葉双曲面は線織面である．神戸のポートタワーが一葉双曲面で真っ直ぐな鉄筋の柱で支えられていることで有名である．

11 (1) 線分 OQ_n の偏角を φ_n とすると，$\angle \mathrm{Q}_0\mathrm{OQ}_1 = \pi - 2\theta$ より

$$\varphi_n = \pi - n(\pi - 2\theta) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (*)$$



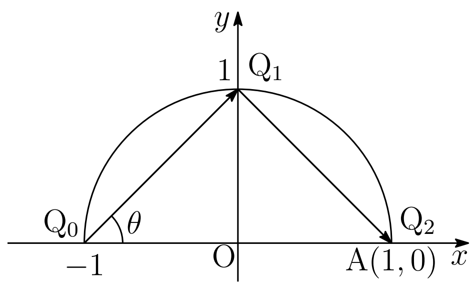
P が 1 回の反射で A に達するとき，$\varphi_2 = 0$ であるから，$(*)$ より

$$\pi - 2(\pi - 2\theta) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

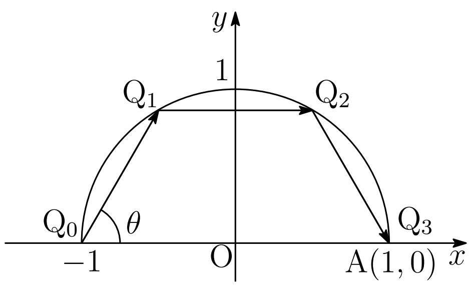
P が 2 回の反射で A に達するとき，$\varphi_3 = 0$ であるから，$(*)$ より

$$\pi - 3(\pi - 2\theta) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

1 回の反射　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$



2 回の反射　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$



(2) (∗) より　　$\varphi_1 = 2\theta,\ \varphi_2 = 4\theta - \pi$

P が 1 回の反射で x 軸に達するとき，$\varphi_2 \leqq 0 < \varphi_1$ であるから

$$4\theta - \pi \leqq 0 < 2\theta \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4}}$$

$\angle \mathrm{OR_1Q_1} = \pi - (\varphi_1 + \theta) = \pi - (2\theta + \theta) = \pi - 3\theta$

$\triangle \mathrm{OR_1Q_1}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{x_1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin(\pi - 3\theta)} \quad \text{ゆえに} \quad x_1 = \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より　$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{1}{3 - 4\sin^2\theta}}$

$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 < \sin\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3} < x_1 \leqq 1}$

(3) (∗) より　　$\varphi_n = \pi - n(\pi - 2\theta),\ \varphi_{n+1} = \pi - (n+1)(\pi - 2\theta)$

P が n 回の反射で x 軸に達するとき，$\varphi_{n+1} \leqq 0 < \varphi_n$ であるから

$$\pi - (n+1)(\pi - 2\theta) \leqq 0 < \pi - n(\pi - 2\theta)$$

これを解いて　　$\boldsymbol{\dfrac{n-1}{2n}\pi < \theta \leqq \dfrac{n}{2(n+1)}\pi}$　　(∗∗)

$\angle \mathrm{OR}_n\mathrm{Q}_n = \pi - \varphi_n - \theta = \pi - \{\pi - n(\pi - 2\theta)\} - \theta = n\pi - (2n+1)\theta$

$\triangle \mathrm{OR}_n\mathrm{Q}_n$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{x_n}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\{n\pi - (2n+1)\theta\}}$$

したがって　　$\boldsymbol{x_n = \dfrac{\sin\theta}{\sin\{n\pi - (2n+1)\theta\}}}$

(4) 点 Q_n の y 座標を y_n とすると

$$\begin{aligned} y_n &= \sin\varphi_n \\ &= \sin\{\pi - n(\pi - 2\theta)\} \\ &= \sin\{2n\theta - (n-1)\pi\} \end{aligned}$$

$\triangle \mathrm{OR}_n\mathrm{Q}_n$ の面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}x_ny_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\{n\pi-(2n+1)\theta\}}\cdot\sin\{2n\theta-(n-1)\pi\} \\ &= \frac{\sin\{2n\theta-(n-1)\pi\}\sin\theta}{2\sin\{n\pi-(2n+1)\theta\}} \end{aligned}$$

ここで，n は整数であるから

$$\begin{aligned} \sin\{2n\theta-(n-1)\pi\} &= \sin 2n\theta\cos(n-1)\pi - \cos 2n\theta\sin(n-1)\pi \\ &= (-1)^{n-1}\sin 2n\theta, \\ \sin\{n\pi-(2n+1)\theta\} &= \sin n\pi\cos(2n+1)\theta - \cos n\pi\sin(2n+1)\theta \\ &= -(-1)^n\sin(2n+1)\theta \\ &= (-1)^{n-1}\{\sin 2n\theta\cos\theta + \cos 2n\theta\sin\theta\} \end{aligned}$$

したがって

$$S_n = \frac{\sin 2n\theta\sin\theta}{2(\sin 2n\theta\cos\theta+\cos 2n\theta\sin\theta)} = \frac{\tan 2n\theta\tan\theta}{2(\tan 2n\theta+\tan\theta)}$$

φ_n は，$(**)$ から

$$\varphi_n = 2n\theta-(n-1)\pi \leqq 2n\cdot\frac{n}{2(n+1)}\pi-(n-1)\pi = \frac{\pi}{n+1}$$

$0 < \varphi_n \leqq \dfrac{\pi}{n+1}$ および $\angle\mathrm{AOQ}_n = \varphi_n$ を中心角とする扇形の面積と S_n の大小関係により

$$0 < S_n < \frac{1}{2}\varphi_n \leqq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

■