令和６年度　長崎大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部　令和６年３月12日 (2科目選択120分)
数学I・II・III・A・B(2題)，物理 (2題)，化学 (2題)

問題 1 2

1 (1) 関数 $f(x)=x^{\sin x\cos x}$ $(0<x<1)$ とする．以下の問に答えよ．

(i) $\log f(x)=\boxed{}\log x$ のうち，$\boxed{}$ に当てはまる関数を求めよ．

(ii) $\log f(x)$ を x で微分し，整理sると，$f'(x)$ は次式のようになる．

$$f'(x)=\{g(x)\sin 2x+h(x)\cos 2x\}x^{\sin x\cos x}$$

$g(x)$，および $h(x)$ を求めよ．ただし，$g(x)$，および $h(x)$ は x の関数である．

(2) 次の定積分を求めると，$A(\log 2)^B+C(\log 2)+D$ となる．A，B，C，および D の値を求めよ．ただし，A，B，C，および D は整数である．

$$\int_1^2(\log x)^2\,dx$$

(3) 関数 $f(x)=3^{x+2}+3^{-x}$ の最小値，およびそのときの x の値を，それぞれ求めよ．

2 (1) θ を媒介変数として，次式で表される曲線 C を，直交座標の x，y の方程式で表せ．

$$x=2\cos\theta,\quad y=3\sin\theta$$

(2) (1) の曲線 C に関し，θ が時刻 t の関数として，$\theta=\pi t$ で与えられるとする．時刻 t における曲線 C 上の動点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(i) $t=0$ の時刻における動点 P の速さ v_0 を求めよ．

(ii) 時刻 $0<t<1$ において動点 P の速さが最小となる時刻 t_1，およびそのときの速さ v_1 を求めよ．

(iii) 時刻 $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{4}$ に動点 P が描く曲線と x 軸，および直線 $x=\sqrt{2}$ によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x^{\sin x \cos x} = x^{\frac{1}{2}\sin 2x}$ $(0 < x < 1)$

(i) $\log f(x) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin 2x}\log x$

(ii) (i) の結果を微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos 2x \log x + \frac{1}{2x}\sin 2x$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left\{\frac{1}{2x}\sin 2x + \log x\cdot\cos 2x\right\} f(x) \\ &= \left\{\frac{1}{2x}\sin 2x + \log x\cdot\cos 2x\right\} x^{\sin x \cos x} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2x}}$, $\boldsymbol{h(x) = \log x}$

(2) $t = \log x$ とおくと [1], $x = e^t$ より $\dfrac{dx}{dt} = e^t$

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$0 \longrightarrow \log 2$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\log x)^2\,dx &= \int_0^{\log 2} t^2 e^t\,dt \\ &= \Big[(t^2 - 2t + 2)e^t\Big]_0^{\log 2} \\ &= \{(\log 2)^2 - 2\log 2 + 2\}\cdot 2 - 2 \\ &= \boldsymbol{2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2} \end{aligned}$$

(3) $3^{x+2} > 0$, $3^{-x} > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$f(x) = 3^{x+2} + 3^{-x} \geqq 2\sqrt{3^{x+2}\cdot 3^{-x}} = 6$$

上式において，等号が成立するのは $3^{x+2} = 3^{-x}$

$$x + 2 = -x \quad \text{すなわち} \quad x = -1$$

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = -1}$ のとき，**最小値 6** ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2022.pdf (p.12 を参照)

2 (1) $\cos\theta = \dfrac{x}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{y}{3}$ より

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

(2) $(x,\ y) = (2\cos\pi t,\ 3\sin\pi t)$ より

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = (-2\pi\sin\pi t,\ 3\pi\cos\pi t)$$

(1) $t = 0$ のとき　$\vec{v} = (0,\ 3\pi)$　よって　$\boldsymbol{|\vec{v}| = 3\pi}$

(2)

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2 &= (-2\pi\cos\pi t)^2 + (3\pi\cos\pi t)^2 \\ &= 4\pi^2 + 5\pi^2\cos^2\pi t\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ において $(0 < \pi t < \pi)$，$|\vec{v}|$ が最小となる時刻 t_1 は

$$\pi t = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad t = \frac{1}{2}$$

このとき　$v_1 = |\vec{v}| = \boldsymbol{2\pi}$

(3) 求める面積 S は，図の斜線部分であるから，ガウス・グリーンの定理により

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} (xy' - x'y)\,dt - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} 6\pi\,dt - \frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{2}}\end{aligned}$$