令和６年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和６年２月25日

- 教育 A・経済・水産・環境科学・情報データ科学部 A　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学・歯学・工学部　$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 情報データ科学部 B　$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ 必答, $\boxed{7}$ $\boxed{10}$ の２題から１題選択
数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 3 次方程式 $x^3-3x^2-9x+a=0$ が異なる 3 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) 等式 $f(x)=-x^2+4x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^2 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(3) 円に内接する四角形 ABCD があり，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CD}=1$，$\mathrm{DA}=4$ である．$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値および線分 AC の長さを，それぞれ求めよ．また，線分 AC と BD の交点を P とするとき，線分 AP の長さを求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ の初項は $\dfrac{1}{3}$ で，すべての自然数 n に対して $a_{n+1}=r(1-S_n)$ が成り立つ．ただし，r は $0<r<1$ を満たす定数である．a_2，a_3 を r を用いてそれぞれ表せ．また，$n\geqq 2$ のとき，a_{n+1} を r，a_n を用いて表し，数列 $\{a_n\}$ が等比数列になるように r の値を定めよ．

2 下図のように，1辺の長さが1の正四面体OABCがある．2点P，Qはそれぞれ辺OC，辺AB上にあり，線分PQは辺OCと辺ABに垂直である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{OP} : \mathrm{PC} = s : 1 - s \ \ (0 < s < 1)$，
$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = t : 1 - t \ \ (0 < t < 1)$
とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を，$s$，$t$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いてそれぞれ表せ．

(2) PQ⊥OC，PQ⊥ABの関係から，s，tの値および線分PQの長さを，それぞれ求めよ．

(3) △OAB，△CABの重心をそれぞれL，Mとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いてそれぞれ表せ．

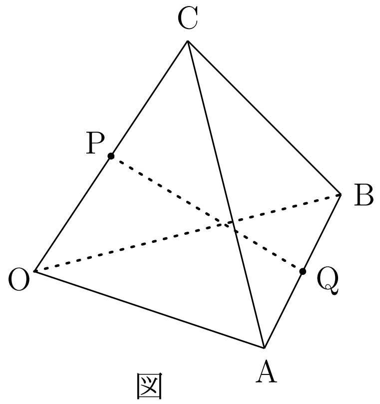
また，線分LMと△PABとの交点をNとする．

$$\mathrm{LN} : \mathrm{NM} = u : (1 - u) \quad (0 < u < 1)$$

とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を$u$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(4) Nは△PAB上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$とおける．このとき，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$の値をそれぞれ求めよ．また，LN : NMを求めよ．

(5) Nは△PABの重心であることを示せ．また，△QLNの面積Sを求めよ．



図

3 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) p，q を実数とし，互いに異なるベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を，

$$\vec{a} = (1,\ p),\quad \vec{b} = (q, -1),\quad \vec{c} = (-1,\ 1)$$

とする．$\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直であり，$\vec{b} - \vec{c}$ と $\vec{a}$ は平行であるとき，p，q の値をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ の初項は $\dfrac{1}{3}$ で，すべての自然数 n に対して $a_{n+1} = r(1 - S_n)$ が成り立つ．ただし，r は $0 < r < 1$ を満たす定数である．a_2，a_3 を r を用いてそれぞれ表せ．また，$n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} を r，a_n を用いて表し，数列 $\{a_n\}$ が等比数列になるように r の値を定めよ．

(3) n を整数とするとき，n^2 を 3 で割った余りは 2 にならないことを，$n = 3k$，$n = 3k + 1$，$n = 3k + 2$ (k は整数) のそれぞれの場合について示せ．

また，l，m，n を整数とするとき，$l^2 + m^2 = n^2$ ならば，l または m は 3 の倍数となることを，背理法を用いて証明せよ．

$\boxed{4}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) $t = \cos x$ とおくとき，$\cos 2x$ および $\cos 3x$ を t の式でそれぞれ表せ．また，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$ となるような x の値の範囲を求めよ．

(2) 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x，y に対して

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

を満たしている．このとき，$f(0)$ の値を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 2$ のとき，$f'(x)$ および $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x}\,dx$ が成り立つことを示し，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx$ を求めよ．

5 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) p，q を実数とし，互いに異なるベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を，

$$\vec{a} = (1,\ p),\quad \vec{b} = (q, -1),\quad \vec{c} = (-1,\ 1)$$

とする．$\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直であり，$\vec{b} - \vec{c}$ と $\vec{a}$ は平行であるとき，p，q の値をそれぞれ求めよ．

(2) 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x，y に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

を満たしている．このとき，$f(0)$ の値を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 2$ のとき，$f'(x)$ および $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x^4}{1+e^x}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1+e^x}\,dx$ が成り立つことを示し，
定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 - x^4}{1+e^x}\,dx$ を求めよ．

(4) n を整数とするとき，n^2 を 3 で割った余りは 2 にならないことを，$n = 3k$，$n = 3k+1$，$n = 3k+2$ (k は整数) のそれぞれの場合について示せ．
また，l，m，n を整数とするとき，$l^2 + m^2 = n^2$ ならば，l または m は 3 の倍数となることを，背理法を用いて証明せよ．

6 xy 座標平面上において，x 軸上に点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$ (ただし，$a_1 > 2$) がある．関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 - 8$ とするとき，$x = a_1$ における曲線 $C : y = f(x)$ 上の点を $\mathrm{Q}_1(a_1,\ f(a_1))$ とする．また，Q_1 における C の接線 l_1 が x 軸と交わる点を $\mathrm{P}_2(a_2,\ 0)$ とする．さらに，$x = a_2$ における C 上の点を $\mathrm{Q}_2(a_2,\ f(a_2))$ とし，Q_2 における C の接線 l_2 が x 軸と交わる点を $\mathrm{P}_3(a_3,\ 0)$ とする．このような操作を繰り返して得られる数列 $\{a_n\}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $\mathrm{Q}_n(a_n,\ f(a_n))$ における曲線 C の接線 l_n の方程式を a_n を用いて表せ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) すべての自然数 n に対して，$a_n > 2$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(4) すべての自然数 n に対して，$a_n > a_{n+1}$ を示せ．

(5) すべての自然数 n に対して，$a_{n+1} - 2 < \dfrac{2}{3}(a_n - 2)$ を示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{7}$ 原点をOとする xy 座標平面上において，放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = x$ があり，C と l で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする．

また，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を通り，ℓ に垂直な直線を m とし，m と l の交点をQとする．以下の問いに答えよ．

(1) 図形 F を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 直線 m の方程式および点Qの座標を，t を用いてそれぞれ表せ．

(3) 線分PQの長さの平方 (PQ^2) を t を用いて表せ．

(4) 線分OQの長さを s とするとき，s および $\dfrac{ds}{dt}$ を，t を用いてそれぞれ表せ．

(5) 図形 F を直線 l の周りに1回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．また，(1) で求めた V_1 との比 $\dfrac{V_2}{V_1}$ を求めよ．

$\boxed{8}$ 下図のように，一辺の長さが1の正方形OABCがある．辺OA上に点$\mathrm{P_1}$をとり，$\mathrm{AP_1} = a_1$とする．ただし，$0 < a_1 < 1$とする．

$\angle \mathrm{AP_1Q_1} = \angle \mathrm{BQ_1R_1} = \angle \mathrm{CR_1S_1} = \theta \ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$となるように点$\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{R_1}$，$\mathrm{S_1}$を，それぞれ辺AB，BC，CO上にとる．

さらに，$\angle \mathrm{OS_1P_2} = \angle \mathrm{AP_2Q_2} = \angle \mathrm{BQ_2R_2} = \angle \mathrm{CR_2S_2} = \theta$となるように点$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{Q_2}$，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{S_2}$を，それぞれ辺OA，AB，BC，CO上にとる．

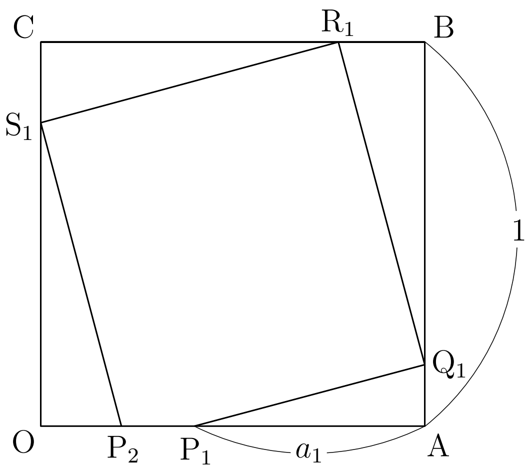
このような操作を繰り返し，点P_n，Q_n，R_n，S_nを，それぞれ辺OA，AB，BC，CO上にとる．$\mathrm{AP}_n = a_n$とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分AQ_n，BR_n，CS_nの長さを，a_n，θを用いてそれぞれ表せ．

(2) a_{n+1}をa_n，θを用いて表せ．

(3) a_nをa_1，n，θを用いて表せ．

(4) $\mathrm{P_1}$と$\mathrm{P_2}$が同じ点のとき，a_1をθを用いて表せ．また，$\mathrm{P_1}$と$\mathrm{P_2}$が異なる点のとき，この操作を繰り返すと，P_nは線分OAをどのような比に内分する点に限りなく近づくか説明せよ．



図

9 z に関する 4 次方程式 $z^4+pz^2+qz+27=0$ ($p,\ q$ は実数) がある．複素数 α と α^2 はこの 4 次方程式の解であり，α の実部と虚部はともに正とする．以下の問いに答えよ．ただし，$\overline{z}$ は複素数 z の共役複素数を表すものとする．

(1) z_1，z_2 が複素数のとき，$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$，および $\overline{z_1}\ \overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\overline{\alpha}$ はこの 4 次方程式の解であることを示せ．

(3) $\alpha+\alpha^2$ は純虚数であることを示せ．

(4) $|\alpha|$ および α の値をそれぞれ求めよ．

(5) この 4 次方程式のすべての解を求めよ．また，p，q の値をそれぞれ求めよ．

10 ある町の中学校 1 年生の 50 メートル走における所要時間 (単位は秒) は，母平均 m，母分散 1 の正規分布に従うものとする．

高校生の花子さんと太郎さんは，この母集団から無作為に何人かを抽出して，母集団の調査をそれぞれ行った．

表 1 は，花子さんが 10 人の生徒 (A,B,C,$\cdots$,J) を無作為に抽出したときの各自の所要時間 (測定値) を示している．以下の問いに答えよ．必要に応じて，次のページの正規分布表を用いてもよい．

表 1

生徒	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
測定値 (秒)	9.0	9.0	8.0	8.0	9.0	9.0	10.0	9.0	10.0	x

(x は正の実数)

(1) 花子さんが選んだ 10 人の生徒のうち，J を除いた 9 人の標本の平均 m_1 と分散 ${S_1}^2$ を，それぞれ求めよ．

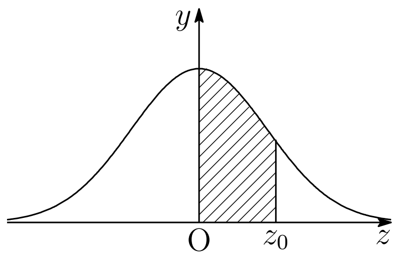
(2) 花子さんが選んだ (1) の 9 人の測定値の標本を用いて，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を，小数第 3 位を四捨五入して求めよ．

(3) 花子さんが選んだ 10 人の標本の平均 m_2 と分散 ${S_2}^2$ を，x を用いてそれぞれ表せ．また，$8\leqq x\leqq 10$ のとき，平均 m_2 と分散 ${S_2}^2$ の取り得る値の範囲を，それぞれ求めよ．

(4) 太郎さんは，花子さんとは別に 4 人の生徒を無作為に抽出して調べることとした．母平均 $m=8$ のとき，4 人の標本の平均が 9 秒以上となる確率を，小数第 3 位を四捨五入して求めよ．

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の斜線部分の面積の値をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$ とすると

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	$a-27$	$\nearrow$

$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき

$$a-27<0<a+5 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{-5<a<27}$$

(2)
$$f(x)=-x^2+4x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^2 f(t)\,dt$$

$A=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt,\quad B=\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=-x^2+4Ax+B$

$$\begin{aligned}
A&=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(-t^2+4At+B)\,dt\\
&=\left[-\frac{t^3}{3}+2At^2+Bt\right]_0^1=-\frac{1}{3}+2A+B,\\
B&=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(-t^2+4At+B)\,dt\\
&=\left[-\frac{t^3}{3}+2At^2+Bt\right]_0^2=-\frac{8}{3}+8A+2B
\end{aligned}$$

上の 2 式から　$A+B=\dfrac{1}{3},\quad 8A+B=\dfrac{8}{3}$　ゆえに　$A=\dfrac{1}{3},\quad B=0$

よって　$\boldsymbol{f(x)=-x^2+\dfrac{4}{3}x}$

(3) △ABC，△ADC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{BC}\cos B \\
&= 4^2+3^2-2{\cdot}4{\cdot}3\cos\theta = 25-24\cos\theta, \\
\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2-2\mathrm{AD}{\cdot}\mathrm{DC}\cos D \\
&= 4^2+1^2-2{\cdot}4{\cdot}1\cos(\pi-\theta) = 17+\cos\theta
\end{aligned}$$

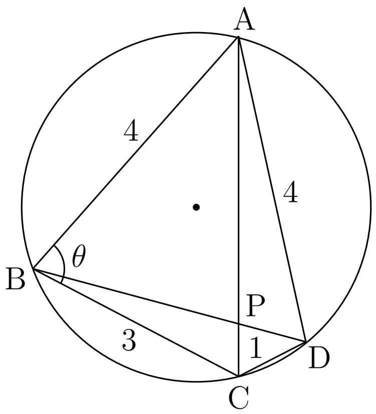
上の 2 式から　$25-24\cos\theta = 17+8\cos\theta$　ゆえに　$\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

したがって　$\mathrm{AC}^2 = 19$　よって　$\mathbf{AC} = \boldsymbol{\sqrt{19}}$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PC} = \triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{BCD}$ であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}:\mathrm{PC} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AD}\sin A : \frac{1}{2}\mathrm{BC}{\cdot}\mathrm{CD}\sin(\pi-A) \\
&= \mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AD}:\mathrm{BC}{\cdot}\mathrm{CD} = 4{\cdot}4:3{\cdot}1 = 16:3
\end{aligned}$$

よって　$\mathrm{AP} = \dfrac{16}{16+3}\mathrm{AC} = \boldsymbol{\dfrac{16}{19}\sqrt{19}}$



(4) $a_1 = \frac{1}{3},\quad a_{n+1} = r(1 - S_n) \quad \cdots (*)$

$S_1 = a_1 = \frac{1}{3}$ であるから，$n = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$a_2 = r\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{3}r}$$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r$ であるから，$n = 2$ を $(*)$ に代入すると

$$a_3 = r\left\{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}r\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{2}{3}r(1 - r)}$$

$n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1} = r(1 - S_n)$，$a_n = r(1 - S_{n-1})$ の 2 式の差をとると

$$a_{n+1} - a_n = -r(S_n - S_{n-1}) = -ra_n \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_{n+1} = (1 - r)a_n}$$

上の第 2 式が $n = 1$ のときも成立するとき　$\frac{2}{3}r = (1 - r)\cdot\frac{1}{3}$

$0 < r < 1$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{r = \frac{1}{3}}$

補足 $a_{n+1} = (1 - r)a_n$ より，公比は $1 - r = \frac{2}{3}$

${a_2}^2 = a_1a_3$ を利用すると　$\left(\frac{2}{3}r\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}r(1 - r)$

$0 < r < 1$ に注意してこれを解くと　$r = \frac{1}{3}$ ■

2 (1) $\mathrm{OP}:\mathrm{PC}=s:(1-s)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{s\vec{c}}$

$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=t:(1-t)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}}$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{OC}$，$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AB}$ より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}\}\cdot\vec{c}\\
&=(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-s|\vec{c}|^2\\
&=\frac{1}{2}(1-t)+\frac{1}{2}t-s=\frac{1}{2}-s=0,\\
\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\
&=(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}\\
&=\frac{1}{2}(1-t)-(1-t)+t-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=t-\frac{1}{2}=0
\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{s=t=\dfrac{1}{2}}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

2 点 P，Q はそれぞれ OC，AB の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\
&=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}\\
&=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a})\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) $\triangle$OAB，$\triangle$CAB のそれぞれの重心が L，M であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} = \frac{\boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}}}{\mathbf{3}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} = \frac{\boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}} + \boldsymbol{\vec{c}}}{\mathbf{3}}$$

LN : NM $= u : (1-u)$ より $(0 < u < 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ON}} &= (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OL}} + u\overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ &= (1-u)\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3} + u\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \frac{\boldsymbol{\vec{a}}}{\mathbf{3}} + \frac{\boldsymbol{\vec{b}}}{\mathbf{3}} + \frac{\boldsymbol{u\vec{c}}}{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

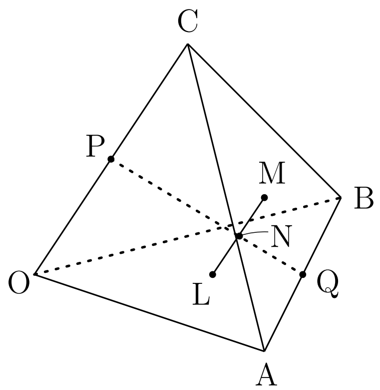
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{2u}{3}\cdot\frac{\vec{c}}{2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{2u}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad (*)$$

直線 LM は平面 OCQ 上にあるから，N は直線 PQ 上の点より

$$\frac{2}{3} + \frac{2u}{3} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad u = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \mathbf{LN : NM = 1 : 1}$$

また，$u = \dfrac{1}{2}$ を $(*)$ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \text{したがって} \quad \boldsymbol{\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}}$$



(5) (3)，(4) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\vec{a}}{3}+\dfrac{\vec{b}}{3}+\dfrac{\vec{c}}{6}$

△PAB の重心の位置ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{3}+\frac{\vec{c}}{6}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

したがって，N は △PAB の重心である．

$$\overrightarrow{\mathrm{LQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{LN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{3}+\frac{\vec{c}}{6}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{\vec{c}}{6}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

上の 2 式から，外積 $\overrightarrow{\mathrm{LQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{LQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{LN}}=\frac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

したがって，上式および (2) の結果から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{QLN}&=\frac{1}{18}\triangle\mathrm{OQC}=\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\\&=\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{72}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}=(1,\ p)$，$\vec{b}=(q,-1)$，$\vec{c}=(-1,\ 1)$

$\vec{a}-\vec{b}=(1-q,\ 1+p)\perp\vec{c}=(-1,\ 1)$ より

$$-(1-q)+(1+p)=0 \quad \text{ゆえに} \quad q=-p \quad \cdots ①$$

$\vec{b}-\vec{c}=(q+1,-2)/\!/\vec{a}=(1,\ p)$ より

$$p(q+1)-(-2)\cdot 1=0 \quad \text{ゆえに} \quad p(q+1)+2=0 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すると

$$p(-p+1)+2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (p-2)(p+1)=0$$

$p=2$ のとき，$q=-2$　ゆえに　$\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,-1)$
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ はそれぞれ異なるので適する．
$p=-1$ のとき，$q=1$　ゆえに　$\vec{a}=\vec{b}=(1,-1)$ となり不適．
よって　$\boldsymbol{p=2,\ q=-2}$

補足 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff a_1b_1+a_2b_2=0, \qquad \vec{a}/\!/\vec{b} \iff a_1b_2-a_2b_1=0$$

(2) $\boxed{1}$ (4) を参照．

(3) k は整数

$n=3k$，すなわち，$n\equiv 0 \pmod 3$ のとき　$n^2\equiv 0 \pmod 3$
$n=3k+1$，すなわち，$n\equiv 1 \pmod 3$ のとき　$n^2\equiv 1 \pmod 3$
$n=3k+2$，すなわち，$n\equiv 2 \pmod 3$ のとき　$n^2\equiv 1 \pmod 3$
したがって，n^2 を 3 で割った余りは 2 にならない．

l および m が 3 の倍数でないと仮定すると，$l^2\equiv m^2\equiv 1 \pmod 3$ より

$$l^2+m^2\equiv 1+1\equiv 2, \quad n^2\not\equiv 2 \pmod 3$$

したがって　$l^2+m^2\neq n^2$
よって，l または m は 3 の倍数である．■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$，$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$，$t = \cos x$ より

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \boldsymbol{2t^2 - 1}, \\ \cos 3x &= 2\cos 2x \cos x - \cos x \\ &= 2(2t^2-1)t - t = \boldsymbol{4t^3 - 3t} \end{aligned}$$

上の 2 式を利用すると

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2x + \cos 3x &= t + (2t^2 - 1) + (4t^3 - 3t) \\ &= 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 \\ &= (2t+1)(2t^2-1) \\ &= (2t+1)(\sqrt{2}t+1)(\sqrt{2}t-1) \end{aligned}$$

これから，不等式 $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$ は

$$(2t+1)(\sqrt{2}t+1)(\sqrt{2}t-1) > 0, \qquad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

したがって　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < t < -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < t \leqq 1$

よって　$\boldsymbol{0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{2}{3}\pi < x < \dfrac{3}{4}\pi}$

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $x = y = 0$ を代入すると

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{f(0) = 0}$$

$(*)$ より，$f(x+h) = f(x) + f(h)$ であるから

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \mathbf{2}$$

これを積分すると　$f(x) = 2x + C$　(C は積分定数)

$f(0) = 0$ であるから　$C = 0$　よって　$\boldsymbol{f(x) = 2x}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx$ において，$x = -t$ とすると　$\dfrac{dx}{dt} = -1$

x	$-1 \longrightarrow 0$
t	$1 \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx &= \int_{1}^{0} \frac{t^2 - t^4}{1 + e^{-t}}(-1)\,dt = \int_{0}^{1} \frac{e^t(t^2 - t^4)}{e^t + 1}\,dt \\ &= \int_{0}^{1} \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x}\,dx\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x}\,dx$

上の等式を利用すると

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx &= \int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx \\ &= \int_{0}^{1} \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}\,dx \\ &= \int_{0}^{1} (x^2 - x^4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{15}}\end{aligned}$$

■

5 (1) 3 (1) を参照.

(2) 4 (2) を参照.

(3) 4 (3) を参照.

(4) 3 (3) を参照.

■

$\boxed{6}$ (1) $f(x)=x^3-8$ より　$f'(x)=3x^2$

C 上の点 $\mathrm{Q}_n(a_n,\ f(a_n))$ における接線 l_n の方程式は

$$y=3{a_n}^2(x-a_n)+{a_n}^3-8 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=3{a_n}^2x-2{a_n}^3-8}$$

(2) 接線 l_n と x 軸の交点の x 座標が a_{n+1} であるから

$$0=3{a_n}^2a_{n+1}-2{a_n}^3+8 \quad \text{ゆえに} \quad 3{a_n}^2a_{n+1}=2{a_n}^3+8$$

$a_1>0$ であるから，上の第 2 式より帰納的に　$a_n>0$

よって　$$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{2{a_n}^3+8}{3{a_n}^2}}$$

(3) 　(∗)　$a_n>2$

［1］$a_1>2$ より，$n=1$ のとき，(∗) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(∗) が成立すると仮定すると，(2) の結果から

$$\begin{aligned}a_{k+1}-2&=\frac{2{a_k}^3+8}{3{a_k}^2}-2=\frac{2({a_k}^3-3{a_k}^2+4)}{3{a_k}^2}\\&=\frac{2(a_k-2)^2(a_k+1)}{3{a_k}^2}>0\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (∗) が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(∗) が成立する．

(4) (2)，(3) の結果から

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2{a_n}^3+8}{3{a_n}^2}=\frac{a_n^3-8}{3{a_n}^2}>0$$

したがって　$a_n>a_{n+1}$

(5) (3) の計算および $a_n>2$ であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}-2&=\frac{2}{3}\cdot\frac{(a_n+1)(a_n-2)}{a_n^2}(a_n-2)\\&=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{a_n}-\frac{2}{{a_n}^2}\right)(a_n-2)<\frac{2}{3}(a_n-2)\end{aligned}$$

したがって　$0<a_n-2<(a_1-2)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_1-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=2}$$

■

$\boxed{7}$ (1) 求める体積 V_1 は

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_0^1\{x^2-(x^2)^2\}\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

よって $\boldsymbol{V_1=\dfrac{2}{15}\pi}$

(2) 直線 m は点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，傾き -1 であるから

$$y=-(x-t)+t^2 \quad \text{すなわち} \quad m: y=-x+t+t^2$$

これと $l: y=x$ の共有点 Q の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{t+t^2}{2},\ \dfrac{t+t^2}{2}\right)}$

(3) $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+t^2}{2},\ \dfrac{t+t^2}{2}\right)$ より

$$\mathrm{PQ}^2=\left(t-\frac{t+t^2}{2}\right)^2+\left(t^2-\frac{t+t^2}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}(t-t^2)^2}$$

(4) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+t^2}{2},\ \dfrac{t+t^2}{2}\right)$ より $(0\leqq t\leqq 1)$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{t+t^2}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\boldsymbol{s=\frac{t+t^2}{\sqrt{2}},\quad \frac{ds}{dt}=\frac{1+2t}{\sqrt{2}}}$$

(5) s と t について

t	$0 \longrightarrow 1$
s	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$

体積 V_2 は，(3)，(4) の結果を利用して [1]

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{\pi}&=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2\,ds=\int_0^1\mathrm{PQ}^2\frac{ds}{dt}\cdot dt\\&=\int_0^1\frac{(t-t^2)^2}{2}\cdot\frac{1+2t}{\sqrt{2}}\,dt\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^3(1-t)^2\,dt\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3!2!}{6!}(1-0)^6=\frac{1}{30\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{60}\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{V_2=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi}$，$\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi\bigg/\dfrac{2}{15}\pi=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{8}}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

別解 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，l 上の点 $\mathrm{R}(t,\ t)$ をとる $(0 \leqq t \leqq 1)$．

線分 PR の中点を M とすると $\quad \mathrm{M}\left(t,\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$

M から直線 $l: x-y=0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|t-\frac{t^2+t}{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{t-t^2}{2\sqrt{2}}$$

$\Delta S = \mathrm{PR}\Delta t = (t-t^2)\Delta t$ を l の周りに 1 回転させた体積 ΔV_2 は，パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem) により [2]

$$\Delta V_2 = 2\pi d\Delta S = 2\pi\cdot\frac{t-t^2}{2\sqrt{2}}\cdot(t-t^2)\Delta t = \frac{\pi t^2(1-t)^2}{\sqrt{2}}\Delta t$$

よって $\quad V_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2!2!}{5!}(1-0)^5 = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi}$ ■

九工大 2022 年後期

原点を O とする座標平面上の曲線 $y=x^3\ (x \geqq 0)$ を C とし，直線 $y=ax\ (a>0)$ を l とする．

(4) 直線 l と曲線 C で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

解答 C 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$，l 上に点 $\mathrm{Q}(t,\ at)$ をとる $(0 \leqq t \leqq \sqrt{a})$．

線分 PQ の中点を M とすると $\quad \mathrm{M}\left(t,\ \dfrac{t^3+at}{2}\right)$

M から直線 $l: ax-y=0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|at-\frac{t^2+at}{2}|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \frac{at-t^3}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$\Delta S = \mathrm{PQ}\Delta t = (at-t^3)\Delta t$ を l の周りに 1 回転させた体積 ΔV は

$$\Delta V = 2\pi d\Delta S = 2\pi\cdot\frac{at-t^3}{\sqrt{a^2+1}}\cdot(at-t^3)\Delta t = \frac{\pi(at-t^3)^2}{\sqrt{a^2+1}}\Delta t$$

よって $\quad V = \dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}}(at-t^3)^2\,dt = \dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\int_0^{\sqrt{a}}(t^6-2at^4+a^2t^2)\,dt$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\left[\frac{t^7}{7}-\frac{2a}{5}t^5+\frac{a^2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{a}} = \boldsymbol{\frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

東北大理系 2018 年

xy 平面内の図形

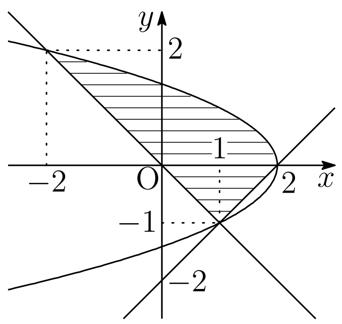
$$S : \begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える．図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする．

(1) S を xy 平面に図示せよ．

(2) V を求めよ．

解答 (1) xy 平面内の図形



$$S : \begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．

(2) x 軸の下側の領域 D_1 の面積を S_1 とし，D_1 の重心 $\left(1, -\dfrac{1}{3}\right)$ と直線 $x+y=0$ との距離を d_1 とすると

$$S_1 = 1, \quad d_1 = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

D_1 を直線 $x+y=0$ のまわりに 1 回転した回転体を体積を V_1 とすると，(半径 $\sqrt{2}$，高さ $\sqrt{2}$ の円錐の体積)

$$V_1 = 2\pi d_1 S_1 = 2\pi\cdot\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

放物線 $x=-y^2+2$ 上に点 $\mathrm{P}(-t^2+2,\ t)$，直線 $x+y=0$ 上に点 $\mathrm{Q}(-t,\ t)$ をとり $(0 \leqq t \leqq 2)$，線分 PQ の中点を M とすると

$$\mathrm{M}\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + 1,\ t\right)$$

M と直線 $x+y=0$ の距離を d とすると

$$d = \frac{\left|-\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-t^2+t+2}{2\sqrt{2}}$$

$\Delta S = \mathrm{PQ}\Delta t = (-t^2+t+2)\Delta t$ を l のまわりに 1 回転させた体積 ΔV_2 は

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= 2\pi d\Delta S = 2\pi\cdot\frac{-t^2+t+2}{2\sqrt{2}}\cdot(-t^2+t+2)\Delta t\\ &= \frac{\pi(-t^2+t+2)^2}{\sqrt{2}}\Delta t = \frac{\pi(2-t)^2(t+1)^2}{\sqrt{2}}\Delta t\end{aligned}$$

x 軸の上側の部分を直線 $x+y=0$ のまわりに 1 回転させた体積 V_2 は

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}V_2}{\pi} &= \int_0^2 (2-t)^2(t+1)^2\,dt = \int_0^2 (2-t)^2(t^2+2t+1)\,dt\\ &= \int_0^2 t^2(2-t)^2\,dt + 2\int_0^2 t(2-t)^2\,dt + \int_0^2 (t-2)^2\,dt\\ &= \frac{2!2!}{5!}(2-0)^5 + 2\cdot\frac{1!2!}{4!}(2-0)^4 + \left[\ \frac{(t-2)^3}{3}\ \right]_0^2\\ &= \frac{2^5}{30} + \frac{2^4}{6} + \frac{2^3}{3} = 2^3\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{5}\end{aligned}$$

したがって　　$V_2 = \dfrac{16\sqrt{2}}{5}\pi$

よって，求める回転体の体積は

$$V_1 + V_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi}$$

東工大 2020 年

n を正の奇数とする．曲線 $y=\sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x+y=0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(2) 回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

解答 $y=\sin x$ の微小区間 $[t,\ t+\Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S = (\sin t)\Delta t, \quad \mathrm{G}\left(t,\ \frac{1}{2}\sin t\right)$$

G と直線 $x+y=0$ の距離 d は　$d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin t\right)$

$$\begin{aligned}V_n\text{の体積} &= 2\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t\,dt\\ &= \sqrt{2}\pi\left[-t\cos t + \sin t + \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t\ \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \boldsymbol{\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\frac{3}{4}\right)}\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ (1)

$$\begin{aligned}
\mathrm{AQ}_n &= \mathrm{AP}_n \tan\theta \\
&= \boldsymbol{a_n \tan\theta}, \\
\mathrm{BR}_n &= (1 - \mathrm{AQ}_n)\tan\theta \\
&= (1 - a_n \tan\theta)\tan\theta \\
&= \boldsymbol{\tan\theta - a_n \tan^2\theta}, \\
\mathrm{CS}_n &= (1 - \mathrm{BR}_n)\tan\theta \\
&= (1 - \tan\theta + a_n \tan^2\theta)\tan\theta \\
&= \boldsymbol{\tan\theta - \tan^2\theta + a_n \tan^3\theta}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}_{n+1} &= 1 - \mathrm{OP}_{n+1} \\
&= 1 - \mathrm{OS}_n \tan\theta \\
&= 1 - (1 - \mathrm{CS}_n)\tan\theta
\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 - (1 - \tan\theta + \tan^2\theta - a_n \tan^3\theta)\tan\theta \\
&= \boldsymbol{1 - \tan\theta + \tan^2\theta - \tan^3\theta + a_n \tan^4\theta} \qquad \text{(A)}
\end{aligned}$$

(3) (2) で得られた漸化式の特性方程式の解を α とすると

$$\alpha = 1 - \tan\theta + \tan^2\theta - \tan^3\theta + \alpha\tan^4\theta \qquad \text{(B)}$$

したがって　$(1 - \tan^4\theta)\alpha = (1 + \tan^2\theta)(1 - \tan\theta)$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 < \tan^4\theta < 1$ であるから

$$\alpha = \frac{(1 + \tan^2\theta)(1 - \tan\theta)}{1 - \tan^4\theta} = \frac{1}{1 + \tan\alpha}$$

(A)，(B) より　$a_{n+1} - \alpha = \tan^4\theta(a_n - \alpha)$

数列 $\{a_n - \alpha\}$ は，初項 $a_1 - \alpha$，公比 $\tan^4\theta$ の等比数列であるから

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)(\tan^4\theta)^{n-1}$$

よって

$$\begin{aligned}
a_n &= (a_1 - \alpha)(\tan^4\theta)^{n-1} + \alpha \\
&= \boldsymbol{\left(a_1 - \frac{1}{1 + \tan\theta}\right)(\tan^4\theta)^{n-1} + \frac{1}{1 + \tan\theta}}
\end{aligned}$$

(4) (i) $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ のとき，$a_1 = a_2$ より

$$a_1 = 1 - \tan\theta + \tan^2\theta - \tan^3\theta + a_1\tan^4\theta \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = \frac{1}{1+\tan\alpha}$$

(ii) $\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}_2$ のとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 < \tan^4\theta < 1$

(3) の結果から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1+\tan\theta}$

(i)，(ii) の結果から

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}_n : \mathrm{P}_n\mathrm{A} &= (1-a_n) : a_n \\ &= 1 - \frac{1}{1+\tan\theta} : \frac{1}{1+\tan\theta} \\ &= \tan\theta : 1 = \sin\theta : \cos\theta \end{aligned}$$

よって，P_n は線分 OA を $\sin\theta : \cos\theta$ に内分する点に近づく. ■

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $(*)\quad z^4+pz^2+qz+27=0$

$z_1=a+bi,\ z_2=c+di$ とする ($a,\ b,\ c,\ d$ は実数).

$$\begin{aligned}\overline{z_1}+\overline{z_2}&=(a-bi)+(c-di)\\&=(a+c)-(b+d)i,\\\overline{z_1+z_2}&=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+b)+(c+d)i}\\&=(a+b)-(c+d)i\end{aligned}$$

よって $\quad\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\ \overline{z_2}&=(a-bi)(c-di)\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i,\\\overline{z_1z_2}&=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\end{aligned}$$

よって $\quad\overline{z_1}\ \overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$

(2) $z=\alpha$ は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\alpha^4+p\alpha^2+q\alpha+27=0$$

両辺の共役複素数をとると $\quad\overline{\alpha^4+p\alpha^2+q\alpha+27=0}$

$$\overline{\alpha^4}+p\overline{\alpha^2}+q\overline{\alpha}+\overline{27}=\overline{0}\quad\text{ゆえに}\quad(\overline{\alpha})^4+p(\overline{\alpha})^2+q\overline{\alpha}+27=0$$

よって，$z=\overline{\alpha}$ は方程式 $(*)$ の解である．

(3) $\alpha+\alpha^2=0$ とすると $\quad\alpha(1+\alpha)=0\quad$ ゆえに $\quad\alpha=0,-1$

これは，α が $\mathrm{Re}(\alpha)>0,\ \mathrm{Im}(\alpha)>0$ であることに反するから

$$\alpha+\alpha^2\neq0 \qquad \text{(A)}$$

$\alpha,\ \alpha^2$ が実係数の方程式 $(*)$ の解であるから，$\overline{\alpha},\ \overline{\alpha^2}$ は $(*)$ の解である．
$\alpha,\ \alpha^2,\ \overline{\alpha},\ \overline{\alpha^2}$ が方程式 $(*)$ の解であるから，解と係数の関係 (3 次の係数) により

$$\alpha+\alpha^2+\overline{\alpha}+\overline{\alpha^2}=0\quad\text{ゆえに}\quad\alpha+\alpha^2+\overline{\alpha+\alpha^2}=0 \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) から，$\alpha+\alpha^2$ は純虚数である．

(4) 解と係数の関係により

$$\alpha\overline{\alpha}\alpha^2\overline{\alpha^2} = 27 \quad ゆえに \quad |\alpha|^6 = 27 \quad よって \quad \boldsymbol{|\alpha| = \sqrt{3}}$$

$x = \mathrm{Re}(\alpha),\ y = \mathrm{Im}(\alpha)$ とおくと　$\alpha = x + yi$

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha^2 &= (x + yi) + (x + yi)^2 \\ &= x + x^2 - y^2 + (2x + 1)yi \end{aligned}$$

$|\alpha|^2 = 3$ および (3) の結果から

$$(*) \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x + x^2 - y^2 = 0 \\ (2x + 1)y \neq 0 \end{cases}$$

$x > 0,\ y > 0$ は $(*)$ の第 3 式を満たす.

$(*)$ の第 1 式と第 2 式から y^2 を消去すると

$$2x^2 + x - 3 = 0 \quad ゆえに \quad (2x + 3)(x - 1) = 0$$

$x > 0$ であるから　$x = 1$　これを $(*)$ の第 1 式に代入して　$y^2 = 2$

$y > 0$ であるから　$y = \sqrt{2}$　よって　$\boldsymbol{\alpha = 1 + \sqrt{2}i}$

(5) (4) の結果から　$\overline{\alpha} = 1 - \sqrt{2}i$

$$\alpha^2 = (1 + \sqrt{2}i\,)^2 = -1 + 2\sqrt{2}i, \quad \overline{\alpha^2} = -1 - 2\sqrt{2}i$$

これから　$\alpha + \overline{\alpha} = 2, \quad \alpha^2 + \overline{\alpha^2} = -2$

方程式 $(*)$ の解が $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \alpha^2,\ \overline{\alpha^2}$ であるから

$$\begin{aligned} (z - \alpha)(z - \overline{\alpha})(z - \alpha^2)(z - \overline{\alpha^2}) &= 0 \\ \{z^2 - (\alpha + \overline{\alpha})z + |\alpha|^2\}\{z^2 - (\alpha^2 + \overline{\alpha^2})z + |\alpha|^4\} &= 0 \\ (z^2 - 2z + 3)(z^2 + 2z + 9) &= 0 \\ z^4 + 8z^3 - 12z + 27 &= 0 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{p = 8,\ q = -12}$ ■

10 (1) 標本平均 m_1 は

$$m_1 = \frac{1}{9}(9.0+9.0+8.0+8.0+9.0+9.0+10.0+9.0+10.0) = \mathbf{9.0}$$

分散 ${S_1}^2$ は

$$ {S_1}^2 = \frac{1}{9}\{0^2+0^2+(-1)^2+(-1)^2+0^2+0^2+1^2+0^2+1^2\} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

別解 $m_1 = 9.0 + \dfrac{1}{9}\{0+0+(-1.0)+(-1.0)+0+0+1.0+0+1.0\} = \mathbf{9.0}$

(2) 母分散 $\sigma^2 = 1$，標本の大きさ 9，標本平均 9 より，母平均 m に対する 95% の信頼区間は，

$$9.0 - 1.96\cdot\frac{1}{\sqrt{9}} \leqq m \leqq 9.0 + 1.96\cdot\frac{1}{\sqrt{9}}$$

$8.346 \leqq m \leqq 9.653$ より　$\boldsymbol{8.35 \leqq m \leqq 9.65}$

(3) $m_2 = \dfrac{9.0+9.0+8.0+8.0+9.0+9.0+10.0+9.0+10.0+x}{10} = \dfrac{x+81}{10}$

分散 ${S_2}^2$ は

$$\begin{aligned} {S_2}^2 &= \frac{9.0^2+9.0^2+8.0^2+8.0^2+9.0^2+9.0^2+10.0^2+9.0^2+10.0^2+x^2}{10} \\ &\quad - \left(\frac{x+81}{10}\right)^2 \\ &= \frac{9x^2-162x+769}{100} = \frac{9(x-9)^2+40}{100} \end{aligned}$$

$8 \leqq x \leqq 10$ より

$$\mathbf{8.9 \leqq \boldsymbol{m_2} \leqq 9.1,}\quad \mathbf{\frac{2}{5}} \leqq \boldsymbol{{S_2}^2} \leqq \mathbf{\frac{49}{100}} \quad (0.4 \leqq {S_2}^2 \leqq 0.49 \text{ も可})$$

(4) 母集団は　母平均 $m = 8$，母分散 $\sigma^2 = 1$

大きさ 4 の標本平均 $\overline{X}$ は，正規分布 $N\left(8,\ \dfrac{1^2}{4}\right)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geqq 9) &= P\left(\frac{\overline{X}-8}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \geqq \frac{9-8}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = P(Z \geqq 2) \\ &= 0.5 - u(2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

よって，求める確率は　**0.02**　■