令和５年度　長崎大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部　令和５年３月12日 (２科目選択 120分)
数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・Ａ・Ｂ(２題)，物理 (２題)，化学 (２題)

問題 1 2

1 (1) 四面体 ABCD を底面とし，すべての辺の長さが 2 である四角すい OABCD において，$\angle\mathrm{AOC} = \theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とし，辺 OA の中点を M とする．以下の問いに答えよ．

(i) 線分 AC の長さを求めよ．

(ii) θ の値を求めよ．

(iii) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ の値を求めよ．

(2) n を自然数とし，$z = -2 + 2\sqrt{3}i$ (i は虚数単位) とする．z を極形式で表せ．ただし，偏角の大きさの範囲は 0 以上 2π 未満とする．また，z^n が実数となる最小の n の値，およびそのときの z^n の値を求めよ．

2 原点を O とする xy 平面において，点 A$(0,\ 1)$，点 B$(2,\ 1)$，点 C$(2,\ 0)$，点 P$(x,\ 0)$，点 Q$(2,\ y)$ とする．$1 < x < 2$，$0 < y < 1$ であり，$\angle\mathrm{APQ}$ は直角である．

(1) y を x の 2 次関数として求めよ．

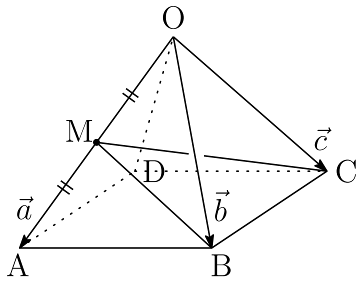
(2) 四角形 APQB の面積 S を x の 3 次関数として求めよ．

(3) 面積 S が最大となるときの x の値を求めよ．

(4) 面積 S の最大値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) (i) $\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$



(ii) $\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = 2,\ \mathrm{AC} = 2\sqrt{2}$ より，$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OC}^2 = \mathrm{AC}^2$ であるから

$$\theta = \angle\mathrm{AOC} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(iii) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 2\cdot 2\cos\frac{\pi}{3} = 2$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \\
&= \left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \\
&= \vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\
&= 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 2^2 = \mathbf{2}
\end{aligned}$$

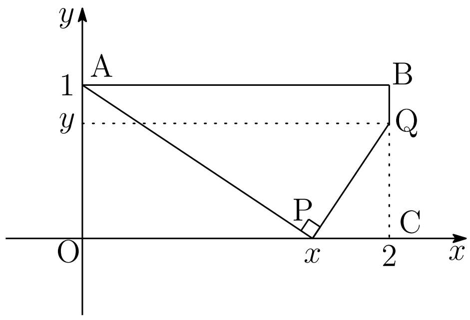
(2) $z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{4}\left(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi} + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}\right)$

$z^n = 4^n\left(\cos\frac{2n}{3}\pi + i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)$ より，これが実数となる最小の n は　$n = 3$

このとき　$z^n = z^3 = 4^3 = \mathbf{64}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (-x,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (2-x,\ y)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ であるから

$$-x(2-x)+y=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = -x^2 + 2x \ (1 < x < 2)}$$



(2) 四角形 OABC $= 2$，$\triangle\mathrm{OAP} = \dfrac{1}{2}x$，$\triangle\mathrm{CPQ} = \dfrac{1}{2}(2-x)y$ より

$$\begin{aligned} S &= \text{四角形 OABC} - \triangle\mathrm{OAP} - \triangle\mathrm{CPQ} \\ &= 2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(2-x)y \\ &= 2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(2-x)(-x^2+2x) \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x + 2 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} &= -\frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(3x^2 - 8x + 5) \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)\left(x - \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

したがって，S の増減表は

x	(1)	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	(2)
$\frac{dS}{dx}$		$+$	0	$-$	
S	(1)	$\nearrow$	$\frac{29}{27}$	$\searrow$	(1)

よって，求める x の値は　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{3}}$

(4) (3) の結果から，求める S の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{29}{27}}$ ■