令和５年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)

令和５年２月25日

- 教育 A・経済・水産・環境科学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学・歯学・工学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 情報データ科学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 必答, $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ の 2 題から 1 題選択
  数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) x の 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$ がある．曲線 $y = f(x)$ 上における接線の傾きの最小値が -12 になるとき，定数 a の値を求めよ．また，$f(x)$ の極値，およびそのときの x の値を求めよ．

(2) △OAB の 3 辺の長さは，それぞれ OA $= 2$，AB $= 3$，BO $= 3$ である．頂点 O から辺 AB に垂線を下ろし，直線 AB との交点を H とする．また，△OAB の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表し，線分 GH の長さを求めよ．

(3) a を定数とするとき，不等式

$$\log_a 5x - \log_a(4 - x) \geqq \log_a(x + 1)$$

を解け．

(4) 整式 $f(x)$ が，すべての実数 x に対して

$$(f'(x) - 5)f'(x) = 3f(x) + x^2 - 7x - 12$$

を満たすものとする．$f(x)$ の次数を n とするとき，n は 3 以上にならないことを示し，$f(x)$ を求めよ．ただし，$f(x)$ の係数はすべて整数とする．

$\boxed{\mathbf{2}}$ xy 座標平面上に，放物線 $C : y = (x-3)^2$ と直線 $l : y = 2x + 9$ があり，C と l で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする．以下の問いに答えよ．

ただし，格子点とは，x 座標，y 座標がともに整数になる点をいう．

(1) C と l の 2 つの交点の x 座標を $p,\ q\ (p < q)$ とするとき，p と q の値をそれぞれ求めよ．また，図形 F に含まれる格子点のうち，x 座標が k ($p \leqq k \leqq q$, k は整数) である格子点の個数 a_k を k の式で表せ．さらに，図形 F に含まれる格子点の総数 N を求めよ．

(2) 図形 F に含まれる格子点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とするとき，$x + y$ の最大値と最小値，およびそのときの Q の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 図形 F に含まれる 4 つの格子点を結んでできる 1 辺の長さが 1 の正方形のうち，頂点の x 座標が k および $k+1$ (k は整数) である正方形の個数を b_k とする．$b_k \geqq 1$ となる k の値の範囲を求め，b_k を k の式で表せ．

(4) 図形 F に含まれる 4 つの格子点を結んでできる 1 辺の長さが 1 の正方形の面積の総和 T を求めよ．また，図形 F の面積を S とするとき，$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ．

3 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 次のように，項数 m の 2 つの等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある．

$$\begin{array}{ll} \{a_n\} & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ m-2,\ m-1,\ m \\ \{b_n\} & m,\ m-1,\ m-2,\ \cdots,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項を $c_n = a_nb_n$ とするとき，c_n の最大値，および $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k$ をそれぞれ m の式で表せ．

(2) △OAB の 3 辺の長さは，それぞれ OA $=2$，AB $=3$，BO $=3$ である．頂点 O から辺 AB に垂線を下ろし，直線 AB との交点を H とする．また，△OAB の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表し，線分 GH の長さを求めよ．

(3) $x>0$ のとき，不等式

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

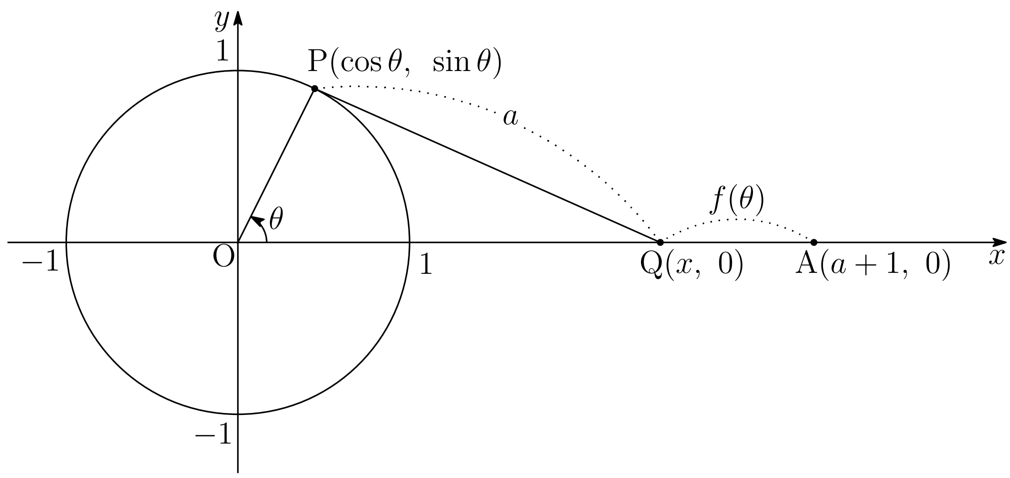
が成り立つことを証明せよ．ただし，対数は自然対数とする．

(4) a, b を定数とする．すべての実数 x で連続な関数 $f(x)$ について，等式

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

が成り立つことを証明せよ．また，定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx$ を求めよ．

4 下図のように，xy 座標平面上に，原点 O を中心とする単位円周上の動点 P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と x 軸上の動点 Q$(x,\ 0)$ $(x > 0)$ がある．2 点 P，Q 間の距離は a $(a > 1)$ で一定とし，定点 A$(a+1,\ 0)$ と動点 Q$(x,\ 0)$ の 2 点間の距離 $f(\theta)$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，(1) は答えのみでよい．



(1) $f(0)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(\pi)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 点 Q の x 座標を $a,\ \theta$ を用いて表せ．

(3) $f(\theta)$ を $a,\ \theta$ を用いて表し，$f(\theta)$ の導関数 $f'(\theta)$ を求め，$f(\theta)$ の増減を調べよ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta^2}$ を求めよ．

5 はじめに，図1のように xy 座標平面上に4点 P(0, 0)，Q(2, 0)，R(2, 2)，S(0, 2) を頂点とする一辺の長さが2の正方形 PQRS がある．この正方形を，図2のように反時計周りに移動させる．ただし，P が x 軸上を点 (0, 0) から点 (2, 0) に毎秒1の速さで正の方向に動くと同時に，S は y 軸上を点 (0, 2) から点 (0, 0) に動くものとする．この移動で，2秒後には図3のような状態になる．この移動を繰り返すことによって，正方形は8秒後には図1の状態に戻る．以下の問いに答えよ．ただし，(1) は答えのみでよい．

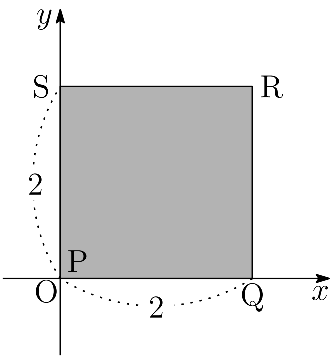


図1

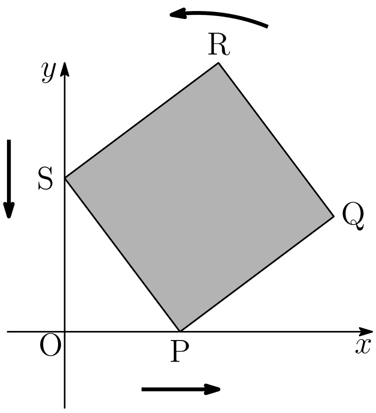


図2

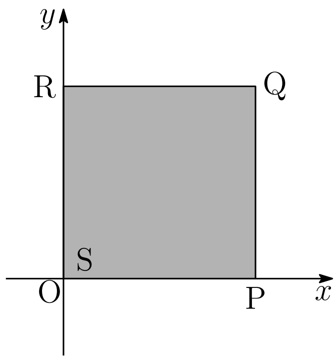


図3

(1) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における4点 P，Q，R，S の座標を，それぞれ t を用いて表せ．

(2) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における点 Q$(x,\ y)$ の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ．また，$t = \sqrt{2}$ のときの Q の速さを求めよ．

(3) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における点 Q の x 座標を $f(t)$ とする．$f(t)$ の最大値を求めよ．また，そのときの Q と R の座標を求めよ．

(4) 正方形の対角線の交点を D$(x,\ y)$ とする．正方形が移動をはじめてから8秒間における点 D は，どのような図形上にあるか説明せよ．

(5) 正方形が移動をはじめてから8秒間における点 P の軌跡を C とする．C で囲まれる図形の面積 T を求めよ．

$\boxed{6}$ 複素数平面上に原点Oを中心とする単位円 C があり，2点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$ は，円 C の周上にある．$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$，$z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) z_1 と z_2 の積 z_1z_2 および $z_1 + z_2$ を，それぞれ極形式で表せ．

(2) $w = \dfrac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$ で表される点を $\mathrm{P}(w)$ とするとき，w を極形式で表せ．また，原点O，点 $\mathrm{P}(w)$，点 $\mathrm{D}(z_1 + z_2)$ の3点は，同一直線上にあることを示せ．

(3) 直線APは，円 C の接線であることを示せ．

(4) 直線ABに関して点Pと対称な点を $\mathrm{Q}(v)$ とする．点Qが円 C の周上にあるとき，β を α の式で表せ．

7 ある日の朝，ある養鶏場で無作為に 9 個の卵を抽出して，それぞれの卵の重さを測ったところ，表 1 の結果が得られた．

表 1　養鶏場で抽出した 9 個の卵の重さ (単位はグラム (g))

58	61	56	59	52	62	65	59	68

この養鶏場の卵の重さは，母平均が m，母分散が σ^2 の正規分布に従うものとするとき，以下の問いに答えよ．必要に応じて次ページの正規分布表を用いてもよい．

(1) 表 1 の標本の平均を求めよ．

(2) 表 1 の標本の分散と標準偏差を求めよ．

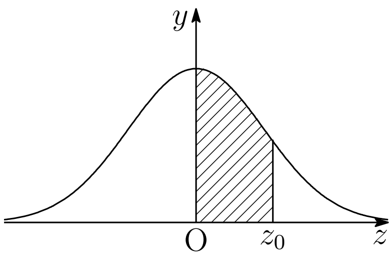
(3) 母分散 $\sigma^2 = 25$ であるとき，表 1 の標本から，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を，小数点第 3 位を四捨五入して求めよ．

(4) この養鶏場のすべての卵の重さからそれぞれ 10g を引いて，50g で割った数値は，母平均 m_1，母分散 ${\sigma_1}^2$ の正規分布に従う．このとき，m_1 と ${\sigma_1}^2$ を，それぞれ m と σ の式で表せ．また，$\sigma^2 = 25$ であるとき，表 1 の標本から，m_1 に対する信頼度 95% の信頼区間を，小数点第 3 位を四捨五入して求めよ．

(5) 次の日の朝に，n 個の卵を無作為に抽出して，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を求めることとする．信頼区間の幅が 5 以下となるための標本の大きさ n の最小値を求めよ．ただし，母分散 $\sigma^2 = 25$ であるとする．

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

解答例

1 (1) $f(x)=x^3-3x^2+ax+1$ より

$$f'(x)=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$$

$f'(x)$ は最小値 $f'(1)=a-3$ をとるから

$$a-3=-12 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=-9}$$

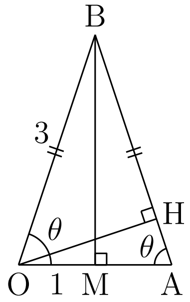
このとき　$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\searrow$

よって　**$x=-1$ で極大値 6，$x=3$ で極小値 -26**

(2) $\mathrm{BO}=\mathrm{BA}$ より，$\angle\mathrm{BOA}=\angle\mathrm{BAO}=\theta$ とおく．
OA の中点を M とすると，$\mathrm{OM}=1$



$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{AH}=\mathrm{OA}\cos\theta=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{HB}=\mathrm{AB}-\mathrm{AH}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=\dfrac{2}{3}:\dfrac{7}{3}=2:7$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+7}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

G は △OAB の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)-\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{3}=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\dfrac{1}{9}|4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ より

$$|4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=16|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-8\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=16\cdot2^2-8\cdot2+3^2=57$$

よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\dfrac{\sqrt{57}}{9}}$

(3) 真数は正であるから

$$5x>0,\ 4-x>0,\ x+1>0 \quad \text{すなわち} \quad 0<x<4 \quad \cdots ①$$

与えられた不等式から　$\log_a 5x \geqq \log_a(4-x)(x+1)$

(i) $a>1$ のとき　$5x \geqq (4-x)(x+1)$
整理すると　$(x+1)^2 \geqq 5$　ゆえに　$|x+1| \geqq \sqrt{5}$
① に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{\sqrt{5}-1 \leqq x < 4}$

(ii) $0<a<1$ のとき　$5x \leqq (4-x)(x+1)$
整理すると　$(x+1)^2 \leqq 5$　ゆえに　$|x+1| \leqq \sqrt{5}$
① に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{0 < x \leqq \sqrt{5}-1}$

(4) $(*)$　$(f'(x)-5)f'(x) = 3f(x)+x^2-7x-12$
$f(x)$ の次数を n とすると，$(*)$ の両辺をの次数から

$$2(n-1) = \max(n,\ 2) \quad \text{これを解いて} \quad n=2$$

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと　$f'(x)=2ax+b$
上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$(2ax+b-5)(2ax+b) = 3(ax^2+bx+c)+x^2-7x-12$$

整理すると

$$4a^2x^2+(4ab-10a)x+b^2-5b = (3a+1)x^2+(3b-7)x+3c-12$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$\begin{cases} 4a^2 = 3a+1 & \cdots ① \\ 4ab-10a = 3b-7 & \cdots ② \\ b^2-5b = 3c-12 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より　$(a-1)(4a+1)=0$

a が整数であることに注意して　$a=1$

$a=1$ を ② に代入して　$4b-10=3b-7$　ゆえに　$b=3$

$b=3$ を ③ に代入して　$-6=3c-12$　ゆえに　$c=2$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3x+2}$ ■

2 (1) $C: y=(x-3)^2$, $l: y=2x+9$ の共有点の x 座標は

$$(x-3)^2=2x+9 \quad ゆえに \quad x(x-8)=0$$

これを解いて　$x=0,\ 8$　よって　$\boldsymbol{p=0,\ q=8}$

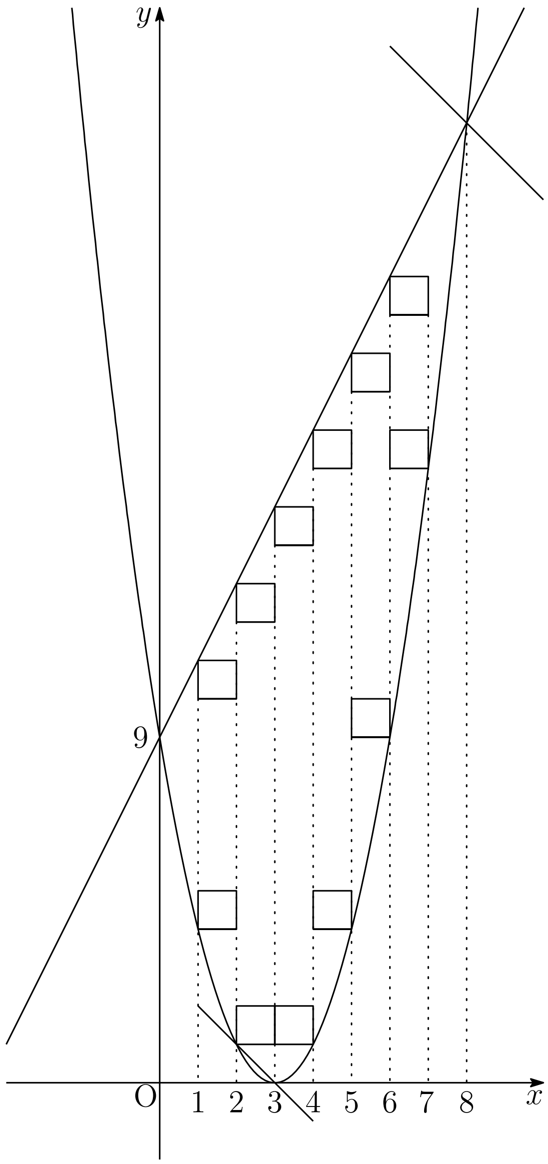
また　$a_k=2k+9-(x-3)^2+1=\boldsymbol{-k^2+8k+1}$

よって，図形 F に含まれる格子点の総数 N は

$$N=\sum_{k=0}^{8}(-k^2+8k+1)=-\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17+8\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9+9=\mathbf{93}$$

(2) $x,\ y$ は整数であるから

$(x,\ y)=(8,\ 25)$ で最大値 33，$(x,\ y)=(2,\ 1)$，$(3,\ 0)$ で最小値 3



(3) 前ページの図から，頂点の x 座標が k および $k+1$ (k は整数) である正方形が存在するとき，k の値は

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$k = 1, 2$ のとき　$b_k = (2k+9) - (k-3)^2 = \boldsymbol{-k^2 + 8k}$

$k = 3, 4, 5, 6$ のとき　$b_k = (2k+9) - (k-2)^2 = \boldsymbol{-k^2 + 6k + 5}$

(4) (3) の結果から，面積の総和と正方形の個数が等しいことに注意して

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{2}(-k^2+8k) + \sum_{k=3}^{6}(-k^2+6k+5) \\ &= \sum_{k=1}^{6}(-k^2+6k+5) + \sum_{k=1}^{2}(2k-5) \\ &= -\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 + 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7 + 5\cdot 6 + \{-3+(-1)\} = \mathbf{61} \end{aligned}$$

また，図形 F の面積 S は

$$S = \int_0^8 \{2x+9-(x-3)^2\}\,dx = \int_0^8 x(8-x)\,dx = \frac{1}{6}\cdot 8^3 = \frac{256}{3}$$

よって　$\dfrac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{S}} = \mathbf{\dfrac{183}{256}}$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_n = n,\ b_n = m+1-n$ より

$$\begin{aligned} c_n = a_n b_n = n(m+1-n) &= (m+1)n - n^2 \\ &= -\left(n - \frac{m+1}{2}\right)^2 + \frac{(m+1)^2}{4} \end{aligned}$$

c_n の最大値は

m が奇数のとき，$n = \dfrac{m+1}{2}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{(m+1)^2}{4}}$

m が偶数のとき，$n = \dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2}+1$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{m^2+2m}{4}}$

c_n の一般項より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} \{(m+1)k - k^2\} &= (m+1)\cdot\frac{1}{2}m(m+1) - \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)} \end{aligned}$$

(2) $\boxed{\mathbf{1}}$ (2) を参照．

(3) $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \log(1+x)$ とすると

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x}$$

$f(0) = 0$，$x > 0$ で $f'(x) > 0$ であるから

$$x > 0 \text{ のとき}\quad f(x) > 0 \quad \text{すなわち}\quad \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

別解 $t > 0$ のとき　$1 - t + t^2 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t^3}{1+t} > 0$

したがって，$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t}\right) dt &= \left[\, t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \log(1+t) \,\right]_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1+x) > 0 \end{aligned}$$

よって，$x > 0$ のとき　$\log(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

(4) $t = a + b - x$ とすると $\dfrac{dt}{dx} = -1$，

x	$a \longrightarrow b$
t	$b \longrightarrow a$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(a+b-x)\,dx &= \int_b^a f(t)\,(-1)dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

$(*)$ において，$a = 1$，$b = 2$ とし

$$I = \int_1^2 f(3-x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx$$

とおくと，$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (3-x)^2}$ のとき

$$\begin{aligned}2I &= \int_1^2 f(x)\,dx + \int_1^2 f(3-x)\,dx \\ &= \int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{(3-x)^2}{(3-x)^2+x^2}\,dx \\ &= \int_1^2 dx = 1\end{aligned}$$

よって　　$I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ ■

4 (1) $f(0) = \mathrm{OA} - \mathrm{OQ} = a + 1 - (a + 1) = \mathbf{0}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{OA} - \mathrm{OQ} = \boldsymbol{a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}}$

$f(\pi) = \mathrm{OA} - \mathrm{OQ} = a + 1 - (a - 1) = \mathbf{2}$

(2) $\mathrm{PQ}^2 = a^2$ より　$(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = a^2$

$x > \cos\theta$，$a > 1 \geqq \sin\theta$ に注意して

$$\boldsymbol{x = \cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a + 1 - x \\ &= \boldsymbol{a + 1 - \cos\theta - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = \sin\theta + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} = \boldsymbol{\frac{\left(\sqrt{a^2 - \sin^2\theta} + \cos\theta\right)\sin\theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}}$$

$a > 1$ であるから　$\sqrt{a^2 - \sin^2\theta} + \cos\theta > \sqrt{1 - \sin^2\theta} + \cos\theta$
$= |\cos\theta| + \cos\theta \geqq 0$

$f'(\theta)$ の符号は，$\sin\theta$ の符号と一致する．

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

(4) $f(\theta) = a - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta} + 1 - \cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{a^2 - (a^2 - \sin^2\theta)}{a + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} + \frac{1 - \cos^2\theta}{1 + \cos\theta} \\ &= \left(\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} + \frac{1}{1 + \cos\theta}\right)\sin^2\theta \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} + \frac{1}{1 + \cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2}\right)\cdot 1^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2a} + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

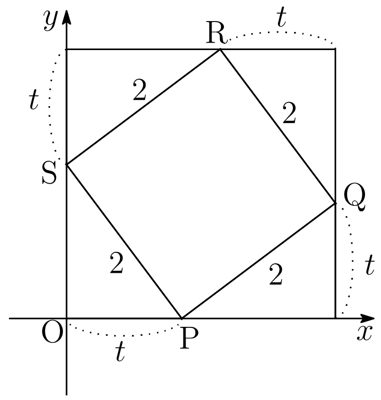
5 (1) $0 \leqq t \leqq 2$ のとき

$\mathbf{P}(\boldsymbol{t},\ \mathbf{0})$

$\mathbf{Q}(\boldsymbol{t} + \sqrt{\mathbf{4} - \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}},\ \boldsymbol{t})$

$\mathbf{R}(\sqrt{\mathbf{4} - \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}, \boldsymbol{t} + \sqrt{\mathbf{4} - \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}})$

$\mathbf{S}(\mathbf{0},\ \sqrt{\mathbf{4} - \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}})$



(2) $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると　$x = t + \sqrt{4-t^2},\quad y = t\quad (0 \leqq t \leqq 2)$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{t}{\sqrt{4-t^2}},\quad \frac{dy}{dt} = 1$$

よって　$\boldsymbol{\vec{v}} = \left(\boldsymbol{\frac{dx}{dt}},\ \boldsymbol{\frac{dy}{dt}}\right) = \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{t}}{\sqrt{\mathbf{4} - \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}},\ \mathbf{1}\right)$

したがって　$t = \sqrt{2}$ のとき，$\vec{v} = (0,\ 1)$ より　$|\boldsymbol{\vec{v}}| = \mathbf{1}$

(3) $\mathrm{Q}(t + \sqrt{4-t^2},\ t)$ より $(0 \leqq t \leqq 2)$

$$f(t) = t + \sqrt{4-t^2},\quad f'(t) = 1 - \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

よって，$f(t)$ の最大値は　$f(\sqrt{2}) = \mathbf{2\sqrt{2}}$

このとき，$t = \sqrt{2}$ より　$\mathbf{Q}(\mathbf{2\sqrt{2}},\ \sqrt{\mathbf{2}})$，　$\mathbf{R}(\sqrt{\mathbf{2}},\ \mathbf{2\sqrt{2}})$

(4) 線分 PR と QS の中点はともに $\left(\dfrac{t+\sqrt{4-t^2}}{2},\ \dfrac{t+\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$

これが D であり，(3) の結果から $\mathrm{D}\left(\dfrac{f(t)}{2},\ \dfrac{f(t)}{2}\right)$ より

$$\textbf{直線}\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\quad (\mathbf{1} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \sqrt{\mathbf{2}})$$

上を動く．

(5) $0 \leqq t \leqq 2$ における点 Q の軌跡 C_1 と x 軸，y 軸，直線 $y=2$ で囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 x\,dy = \int_0^2 (t+\sqrt{4-t^2})\,dt \\ &= \int_0^2 t\,dt + \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt \\ &= \left[\ \frac{t^2}{2}\ \right]_0^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 = 2+\pi \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 2$ における点 R の軌跡 C_2 と x 軸，y 軸，直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積も S である．求める面積 T は，C_1，C_2，x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積であるから

$$T = 2S - 2^2 = 2(\pi+2) - 4 = \boldsymbol{2\pi}$$

■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$ より

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)} \\ z_1 + z_2 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta) \\ &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より $\quad 0 < \dfrac{\beta-\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\quad \cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} > 0$

よって $\qquad \boldsymbol{z_1 + z_2 = 2\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} w = \frac{2z_1z_2}{z_1+z_2} &= \frac{2\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}}{2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \end{aligned}$$

したがって $\qquad z_1 + z_2 = \left(2\cos^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)w$

$2\cos^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ は実数より，3 点 O，P(w)，D(z_1+z_2) は同一直線上にある．

(3) $\qquad \dfrac{w-z_1}{z_1} = \dfrac{2z_2}{z_1+z_2} - 1 = \dfrac{z_2-z_1}{z_1+z_2}$

$|z_1| = |z_2|$ より，O(0)，A(z_1)，B(z_2)，D(z_1+z_2) は菱形の頂点である．

$$\mathrm{OD}\perp\mathrm{AB} \quad ゆえに \quad \frac{z_2-z_1}{z_1+z_2}\text{は純虚数}$$

したがって，直線 AP は円 C 上の点 A における接線である．

補足 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ z_2=\cos\beta+i\sin\beta$ より

$$\begin{aligned}
z_2-z_1&=(\cos\beta+i\sin\beta)-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\\
&=(\cos\beta-\cos\alpha)+i(\sin\beta-\sin\alpha)\\
&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\\
&=2i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\frac{w-z_1}{z_1}=\frac{z_2-z_1}{z_1+z_2}=2i\tan\frac{\beta-\alpha}{2}$$

(4) 2 点 A，B の中点を $\mathrm{M}\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ とすると，(1) の結果から

$$z_1+z_2=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

(2) の結果から，$\mathrm{P}(w)$ は

$$w=\frac{1}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

直線 PM は直線 AB に垂直であるから，C 上の点 $\mathrm{Q}(v)$ は

$$v=-\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

M は 2 点 P，Q の中点より　$\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}}+(-1)\right\}$

$$\begin{aligned}
2\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2}+\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-1&=0\\
\left(2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-1\right)\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+1\right)&=0
\end{aligned}$$

$0<\dfrac{\beta-\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{\beta-\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{3}$　よって　$\boldsymbol{\beta=\alpha+\dfrac{2}{3}\pi}$ ■

$\boxed{7}$ (1) 標本平均を $\overline{x}$ とすると

$$\overline{x}=\frac{1}{9}(58+61+56+59+52+62+65+59+68)=\mathbf{60}$$

別解 $\overline{x}=60+\frac{1}{9}\{(-2)+1+(-4)+(-1)+(-8)+2+5+(-1)+8\}=60$

(2) 標本分散を S^2，標本標準偏差を S とすると

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{9}\{(-2)^2+1^2+(-4)^2+(-1)^2+(-8)^2+2^2+5^2+(-1)^2+8^2\}\\&=\mathbf{20}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S=2\sqrt{5}}$

(3) 標本の大きさ $n=9$，標本平均 $\overline{x}=60$，母分散 $\sigma^2=25$ より，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\,60-1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{9}},\ 60+1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{9}}\,\right]\quad\text{すなわち}\quad[\,\mathbf{56.73,\ 63.27}\,]$$

(4) $$\boldsymbol{m_1=\frac{m-10}{50},\quad {\sigma_1}^2=\frac{\sigma^2}{50^2}}$$

すべての卵の重さからそれぞれ 10g を引いて，50g で割った数値の標本平均を $\overline{X}$ とすると

$$\overline{X}=\frac{60-10}{50}=1,\quad \sigma_1=\frac{5}{50}=0.1$$

m_1 に対する信頼度 95% の母平均 m の信頼区間は

$$\left[\,1-1.96\cdot\frac{0.1}{3},\ 1+1.96\cdot\frac{0.1}{3}\,\right]\quad\text{すなわち}\quad[\,\mathbf{0.93,\ 1.07}\,]$$

(5) 抽出した n 個の卵の重さの平均を m' とする．信頼度 95% の母平均 m の信頼区間は

$$m'-1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}\leqq m<m'+1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}$$

この信頼区間の幅が 5 以下であるとき

$$2\cdot1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}\leqq 5\quad\text{ゆえに}\quad\sqrt{n}\geqq 3.92$$

$n\geqq 15.3664$ であるから，n の最小値は　**16**　■