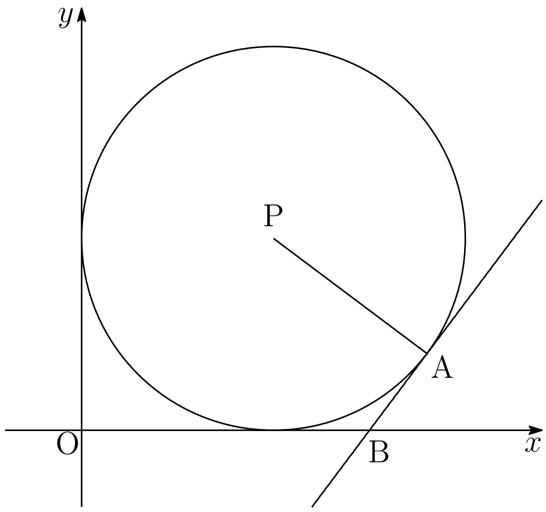
令和４年度　長崎大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部　令和４年３月12日

1 下図のように中心 P の座標が $(r,\ r)$ で半径 r の円がある．この円上の点 A における接線があり，その接線と x 軸との交点を点 B とする．なお，点 A の座標は $(x_0,\ y_0)$，点 B の座標は $(x_1,\ 0)$ であり，$r < x_0 < 2r$，$0 < y_0 < r$ である．



(1) y_0 を，$x_0,\ r$ を用いて表せ．

(2) 直線 PA の傾きを，$x_0,\ r$ を用いて表せ．

(3) 直線 AB の傾きを，$x_0,\ x_1,\ y_0$ を用いて表せ．

(4) x_1 を $x_0,\ y_0,\ r$ を用いて表せ．

2 (1) 関数 $y = \log\left(\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)$ を x で微分せよ．ただし，$\log x$ は自然対数とする．

(2) 次の不定積分を求めよ．

$$\int (e^x + \sin^2 x)\,dx$$

(3) 円 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ を y 軸のまわりに１回転してできる曲面で囲まれた部分の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) P$(r,\ r)$，A$(x_0,\ y_0)$ について，PA$^2=r^2$ であるから

$$(x_0-r)^2+(y_0-r)^2=r^2 \quad \text{ゆえに} \quad (y_0-r)^2=x_0(2r-x_0)$$

$r<x_0<2r$，$0<y_0<r$ により

$$y_0-r=-\sqrt{x_0(2r-x_0)} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y_0=r-\sqrt{x_0(2r-x_0)}}$$

(2) (1) の結果から，直線 PA の傾きは

$$\frac{y_0-r}{x_0-r}=\boldsymbol{\frac{-\sqrt{x_0(2r-x_0)}}{x_0-r}}$$

(3) A$(x_0,\ y_0)$，B$(x_1,\ 0)$ について，直線 AB の傾きは

$$\boldsymbol{\frac{y_0}{x_0-x_1}}$$

(4) 直線 PA の傾き $\dfrac{y_0-r}{x_0-r}$ と (3) で求めた直線の傾きから

$$\frac{y_0-r}{x_0-r}\cdot\frac{y_0}{x_0-x_1}=-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_1=x_0+\frac{(y_0-r)y_0}{x_0-r}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $u=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ とおくと　$y=\log u$

$u=\dfrac{2}{1-\cos x}-1$ であるから　$\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}\\&=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}=\frac{-2\sin x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\boldsymbol{-\frac{2}{\sin x}}\end{aligned}$$

(2) $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ より

$$\boldsymbol{\int(e^x+\sin^2 x)\,dx=e^x+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(3) $(x-4)^2+y^2=4$ より　$x=4\pm\sqrt{4-y^2}$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_{-2}^{2}\{(4+\sqrt{4-y^2})^2-(4-\sqrt{4-y^2})^2\}\,dy\\&=16\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy=16\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot2^2=32\pi\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=32\pi^2}$