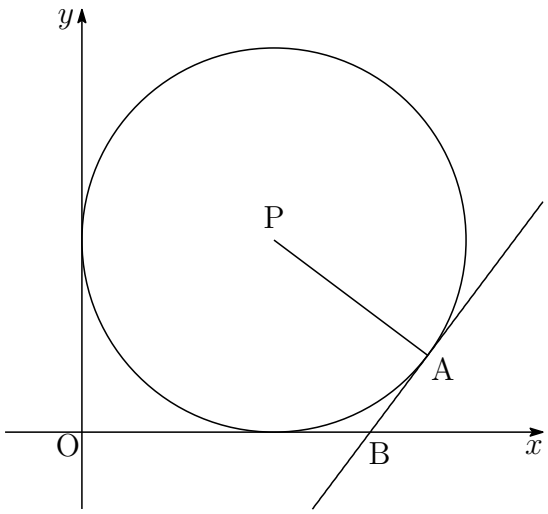
令和４年度　長崎大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部　令和４年３月12日 (２科目選択120分)
数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B(２題)，物理 (２題)，化学 (２題)

問題 1 2

1 下図のように中心Pの座標が $(r,\ r)$ で半径 r の円がある．この円上の点Aにおける接線があり，その接線と x 軸との交点を点Bとする．なお，点Aの座標は $(x_0,\ y_0)$，点Bの座標は $(x_1,\ 0)$ であり，$r < x_0 < 2r$，$0 < y_0 < r$ である．



(1) y_0 を，$x_0,\ r$ を用いて表せ．

(2) 直線PAの傾きを，$x_0,\ r$ を用いて表せ．

(3) 直線ABの傾きを，$x_0,\ x_1,\ y_0$ を用いて表せ．

(4) x_1 を $x_0,\ y_0,\ r$ を用いて表せ．

2 (1) 関数 $y = \log\left(\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)$ を x で微分せよ．ただし，$\log x$ は自然対数とする．

(2) 次の不定積分を求めよ．

$$\int (e^x + \sin^2 x)\, dx$$

(3) 円 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ を y 軸のまわりに１回転してできる曲面で囲まれた部分の体積を求めよ．

解答例

1 (1) $\mathrm{P}(r,\ r)$，$\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ について，$\mathrm{PA}^2 = r^2$ であるから

$$(x_0 - r)^2 + (y_0 - r)^2 = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad (y_0 - r)^2 = x_0(2r - x_0)$$

$r < x_0 < 2r$，$0 < y_0 < r$ により

$$y_0 - r = -\sqrt{x_0(2r - x_0)} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y_0 = r - \sqrt{x_0(2r - x_0)}}$$

(2) (1) の結果から，直線 PA の傾きは

$$\frac{y_0 - r}{x_0 - r} = \frac{-\sqrt{\boldsymbol{x_0(2r - x_0)}}}{\boldsymbol{x_0 - r}}$$

(3) $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$，$\mathrm{B}(x_1,\ 0)$ について，直線 AB の傾きは

$$\frac{\boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{x_0 - x_1}}$$

(4) 直線 PA の傾き $\dfrac{y_0 - r}{x_0 - r}$ と (3) で求めた直線の傾きから

$$\frac{y_0 - r}{x_0 - r} \cdot \frac{y_0}{x_0 - x_1} = -1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_1 = x_0 + \frac{(y_0 - r)y_0}{x_0 - r}}$$

■

2 (1) $u = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ とおくと　$y = \log u$

$u = \dfrac{2}{1 - \cos x} - 1$ であるから　$\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{2\sin x}{(1 - \cos x)^2}$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{-2\sin x}{(1 - \cos x)^2}$$
$$= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{-2\sin x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{-2\sin x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \boldsymbol{-\frac{2}{\sin x}}$$

(2) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ より

$$\boldsymbol{\int (e^x + \sin^2 x)\, dx = e^x + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C} \quad \boldsymbol{(C \text{ は積分定数})}$$

(3) $(x-4)^2+y^2=4$ より　$x=4\pm\sqrt{4-y^2}$

求める体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_{-2}^{2}\{(4+\sqrt{4-y^2})^2-(4-\sqrt{4-y^2})^2\}\,dy$$
$$=16\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy=16\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=32\pi$$

よって　　$\boldsymbol{V=32\pi^2}$ ■