令和４年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和４年２月25日

- 教育A・経済・水産・環境科学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 数I・II・A・B (80分)
- 教育B・薬学・歯学・工学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 情報データ科学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 必答, $\boxed{5}$ $\boxed{8}$ の2題から1題選択
  数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 点P$(x,\ y)$ が次の連立不等式

$$x+2y \leqq 6, \quad 3x+y \leqq 9, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

の表す領域を動くとき，$2x+y$ の最大値，およびそのときのPの座標を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．

$$\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1$$

(3) 以下で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，一般項 a_n および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2ka_k$ を，それぞれ求めよ．

(4) 母線の長さが1，高さが h の円錐(すい)がある．この円錐の体積を $V(h)$ とするとき，$V(h)$ の最大値，およびそのときの h の値を求めよ．

2 空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(1,\ 1, -1)$，C$(7,\ 3,\ 5)$ がある．直線 OA 上の動点 P に対して，線分 BP，CP の長さの平方の和 $\mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ の最小値と，線分の長さの和 $\mathrm{BP} + \mathrm{CP}$ の最小値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (t は実数) とするとき，$\mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ を t の式で表せ．

(2) $\mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの P の座標を求めよ．

(3) 2 点 B，C から直線 OA に垂線を下ろし，交点をそれぞれ H，K とするとき，H，K の座標を求めよ．また，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(4) $\mathrm{BP} + \mathrm{CP}$ の値が最小となるのは，P が線分 HK をどのような比に分けるときかを説明せよ．また，そのときの P の座標，および $\mathrm{BP} + \mathrm{CP}$ の値を求めよ．

3 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) $a > 0$ とする．$a + a^{-1} = 18$ のとき，$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ および $a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 次の方程式

$$\log_{\frac{1}{3}}(9x^2)\cdot\log_3\left(\frac{x}{81}\right) = -12$$

を解け．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．

$$\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1$$

(4) 次の方程式

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

を解け．ただし，i は虚数単位である．

4 自然数 n に対して，以下で定義される x の 2 次関数 $f_n(x)$ がある．

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x^2 \\ f_2(x) &= 3x^2 + 4x \\ &\vdots \\ f_{n+2}(x) &= 3x^2 + 4x\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt - \int_0^1 f_n(t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

$a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2 の値を，それぞれ求めよ．

(2) a_{n+2} を，a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(3) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする．b_n と a_n を，それぞれ n の式で表し，2 次関数 $f_n(x)$ を求めよ．

(4) $x = \alpha$ で，$f_{n+1}(x) - f_n(x)$ は，すべての自然数 n に対して一定の値 β をとる．このとき，α と β の値を求めよ．また，2 つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = f_{n+1}(x)$，および直線 $x = \alpha$ で囲まれる図形の面積 S_n を求めよ．

5 曲線 $C : y = e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線を l とする．ただし，$0 < t < 1$ である．以下の問いに答えよ．

(1) l の方程式を求めよ．また，l と y 軸との交点を Q とし，l と x 軸との交点を R とする．このとき，2 点 Q，R の座標を，それぞれ求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ および $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を，それぞれ求めよ．

(3) l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を D_1 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_1(t)$ とする．同様に，C と l および y 軸で囲まれた図形を D_2 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_2(t)$ とする．このとき，$V_1(t)$ と $V_2(t)$ を，それぞれ t を用いて表せ．

(4) $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ とするとき，$V(t)$ の最小値，およびそのときの t の値を求めよ．

6 原点をOとする xy 座標平面上に，楕(だ)円 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ と，C 上を動く点 $\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) C の方程式の両辺を x で微分し，P における C の接線の傾きを求めよ．また，この接線の方程式は $\dfrac{\cos\alpha}{a}x+\dfrac{\sin\alpha}{b}y=1$ であることを示せ．

(2) P における C の接線と x 軸および y 軸とで囲まれる三角形の面積 S の最小値を求めよ．また，このときの P を点 Q とし，Q における C の接線を l とする．Q の座標および l の方程式を，a，b を用いて表せ．

(3) C 上の点 $\mathrm{R}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)\ \left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ における接線 m が，(2) で求めた l と垂直に交わるものとし，その交点を A とする．このとき，$\tan\beta$ の値および R の座標を，a，b を用いて表せ．

(4) (2) と (3) における Q，R，A について，線分 OQ，OR，OA の長さの平方 OQ^2，OR^2，OA^2 をそれぞれ a，b を用いて表し，線分 OQ，OR，OA の長さの大小を比較せよ．

7 自然数 n に対して，$I_n=\displaystyle\int_1^e (\log x)^n\,dx$ とする．ただし，e は自然対数の底であり，無理数である．以下の問いに答えよ．

(1) I_1，I_2 の値を，それぞれ求めよ．また，I_{n+1} を I_n を用いて表せ．

(2) a および b を有理数とする．$a+be=0$ ならば $a=0$ かつ $b=0$ であることを，背理法を用いて証明せよ．

(3) すべての n に対して，$I_n=A_n+B_ne$ (A_n，B_nは有理数) と表すことができる．このことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(4) (3) における A_n に対して，$C_n=\dfrac{A_n}{(-1)^{n+1}n!}$ とする．このとき，C_n および A_n を，それぞれ n を用いて表せ．

(5) (3) における B_n は $B_n=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i{}_n\mathrm{P}_i$ であることを数学的帰納法を用いて証明し，I_5 の値を求めよ．
ただし，${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (r は $r\leqq n$ の自然数) であり，$0!=1$ とする．

$\boxed{8}$ 動点 P は数直線上の座標 1 あるいは -1 にある．表が出る確率 p $(0 < p < 1)$，裏が出る確率 $1-p$ のコインを投げ，その結果により P に以下のような操作を行う．

操作

- 表が出たとき，P が 1 にあれば -1 に，-1 にあれば 1 に移動させる．
- 裏が出たとき，P は動かさない．

コインを n 回投げたときの P の座標を X_n とし，$X_n = 1$ となる確率を q_n とする．最初に P は 1 にあるものとして，以下の問いに答えよ．

(1) q_1，q_2，q_3 を，それぞれ p を用いて表せ．

(2) q_{n+1} を p と q_n を用いて表せ．

(3) q_n を p と n を用いて表せ．

(4) 確率変数 X_n の平均 $E(X_n)$，分散 $V(X_n)$，標準偏差 $\sigma(X_n)$ を，それぞれ p と n を用いて表せ．

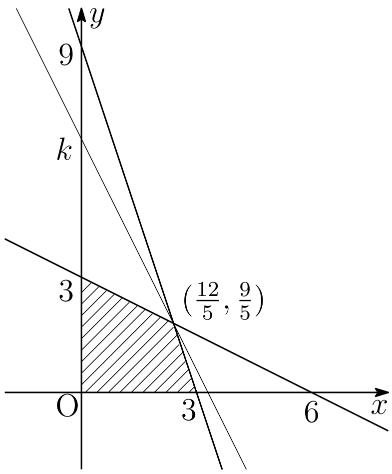
解答例

1 (1) 連立不等式

$$x+2y \leqq 6,\quad 3x+y \leqq 9,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

の表す領域は，右図の境界を含む斜線部分．
境界線 $x+2y=6$，$3x+2y=9$ の交点は

$$\left(\frac{12}{5},\ \frac{9}{5}\right)$$



$2x+y=k$ とおくと，直線 $y=-2x+k$ が
この領域を通るとき，k が最大となるのは，
上の交点を通るときである．

したがって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{12}{5},\ \frac{9}{5}}\right)$ で，k は最大値 $\boldsymbol{\frac{33}{5}}$ をとる．

(2) 不等式 $\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1$ $(0 \leqq \theta < \pi)$ より

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) \geqq \frac{1}{2},\quad \frac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{6} < 2\pi+\frac{\pi}{6}$$

したがって　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{5\pi}{6}$　よって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}}$

(3) $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-1$ より　$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

$\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=1$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n-1=1\cdot 2^{n-1}\quad ゆえに\quad a_n=2^{n-1}+1$$

これから　$2ka_k=2k(2^{k-1}+1)=k2^k+2k$　$\cdots$①

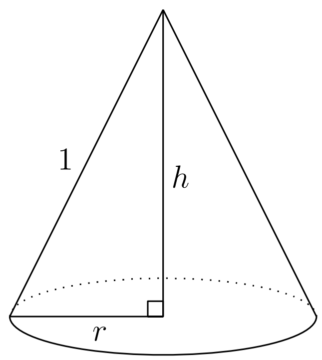
ここで，$(k+1)2^{k+1}-k2^k=k2^k+2^{k+1}$ より

$$k2^k=\{(k+1)2^{k+1}-k2^k\}-2^{k+1}\quad\cdots②$$

①，② より，$2ka_k=\{(k+1)2^{k+1}-k2^k\}-2^{k+1}+2k$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}2ka_k &= \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)2^{k+1}-k2^k\}-\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}+\sum_{k=1}^{n}2k\\ &= (n+1)2^{n+1}-2-\frac{4(2^n-1)}{2-1}+n(n+1)\\ &= \boldsymbol{(n-1)2^{n+1}+n^2+n+2}\end{aligned}$$

(4) 円錐の底面の半径を r とすると



$$r^2 = 1 - h^2 \quad (0 < h < 1)$$

したがって

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}(1-h^2)h \\ &= \frac{\pi}{3}(h-h^3) \end{aligned}$$

$V(h)$ を微分すると　$V'(h) = \dfrac{\pi}{3}(1-3h^2)$

これから $V(h)$ の増減表は

h	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって　$\boldsymbol{h = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ のとき，最大値 $V\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} = t(1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ 1, -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (7,\ 3,\ 5)$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (t-1,\ 2t-1,\ 3t+1), \\ \overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (t-7,\ 2t-3,\ 3t-5) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 \\ &= (t-1)^2 + (2t-1)^2 + (3t+1)^2 \\ &\qquad + (t-7)^2 + (2t-3)^2 + (3t-5)^2 \\ &= \boldsymbol{28t^2 - 56t + 86} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 = 28(t-1)^2 + 58$

よって　$t = 1$，すなわち，$\mathbf{P(1,\ 2,\ 3)}$ のとき，最小値 **58** をとる．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから [1]

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=14,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=28$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2(1,\ 2,\ 3)$

よって　$\mathbf{H(0,\ 0,\ 0)}$，$\mathbf{K(2,\ 4,\ 6)}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{KC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}=(5,-1,-1)$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ のなす角 θ は

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HB}}||\overrightarrow{\mathrm{KC}}|}=\frac{1\cdot5+1\cdot(-1)+(-1)(-1)}{\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{5}{9}}$$

(4) $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の値が最小となるとき，$\triangle\mathrm{BPH}\backsim\triangle\mathrm{CPK}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|:|\overrightarrow{\mathrm{KC}}|=\sqrt{3}:3\sqrt{3}=1:3\quad ゆえに\quad \mathrm{HP}:\mathrm{PK}=1:3$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{1+3}\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{1}{4}\cdot2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \mathbf{1},\ \boldsymbol{\frac{3}{2}}\right)$

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^2&=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OP}^2=\mathrm{OB}^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{OA}\right)^2\\&=3+\frac{1}{4}\cdot14=\frac{26}{4}\quad ゆえに\quad \mathrm{BP}=\frac{\sqrt{26}}{2}\end{aligned}$$

$\mathrm{CP}=3\mathrm{BP}$ であるから　$\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=4\mathrm{BP}=4\cdot\dfrac{\sqrt{26}}{2}=\mathbf{2\sqrt{26}}$ ■

3 (1) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=18+2=20$

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$ であるから　$\boldsymbol{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{5}}$

$(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3-3(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})=a+a^{-1}=18$ より，$x=a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}$ とおくと

$$x^3-3x=18\quad ゆえに\quad (x-3)(x^2+3x+6)=0$$

$x>0$ であるから　$x=3$　よって　$\boldsymbol{a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=3}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2017.pdf (p.5 の補足を参照)

(2) $\quad (*) \quad \log_{\frac{1}{3}}(9x^2)\cdot\log_3\left(\dfrac{x}{81}\right) = -12$

真数は正であるから

$$9x^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{x}{81} > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 0 \quad \cdots①$$

$(*)$ を変形すると $\quad -(2\log_3 x + 2)(\log_3 x - 4) = -12$

$$(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x - 10 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_3 x + 2)(\log_3 x - 5) = 0$$

したがって $\quad \log_3 x = -2,\ 5 \quad$ ①に注意して $\quad \boldsymbol{x = \dfrac{1}{9},\ 243}$

(3) 不等式 $\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ より

$$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

したがって $\quad \dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{5\pi}{6}, \quad 2\pi + \dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq 2\pi + \dfrac{5\pi}{6}$

よって $\quad \boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3},\ \ \pi \leqq \theta \leqq \dfrac{4\pi}{3}}$

(4) $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i = 16\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$|z| = 2,\ 4\arg z = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad$ ゆえに $\quad \arg z = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k}{2}\pi$

$0 \leqq \arg z < 2\pi$ であるから $\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

したがって $\quad |z| = 2,\ \arg z = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{11\pi}{6}$

よって $\quad \boldsymbol{z = 1 + \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3} + i,\ -1 - \sqrt{3}i,\ \sqrt{3} - i}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 漸化式から

$$a_1 = \int_0^1 f_1(t)\,dt = \int_0^1 3t^2\,dt = \Big[\ t^3\ \Big]_0^1 = \mathbf{1}$$
$$a_2 = \int_0^1 f_2(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2+4t)\,dt = \Big[\ t^3+2t^2\ \Big]_0^1 = \mathbf{3}$$

(2) $(*)$ $f_{n+2}(x) = 3x^2 + 4a_{n+1}x - a_n$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_0^1 f_{n+2}(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2+4a_{n+1}t-a_n)\,dt \\ &= \Big[\ t^3 + 2a_{n+1}t^2 - a_nt\ \Big]_0^1 \\ &= \boldsymbol{1 + 2a_{n+1} - a_n} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 1$　ゆえに　$b_{n+1} = b_n + 1$

$\{b_n\}$ は初項$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$，公差 1 の等差数列であるから

$$b_n = 2 + 1(n-1) = \boldsymbol{n+1}$$

$a_{n+1} - a_n = n + 1$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

ゆえに　$a_n - 1 = \dfrac{1}{2}(n-1)(n+2)$　整理すると　$a_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

これは，$n = 1$ のときも成立するから　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)}$

$n \geqq 3$ のとき，これを $(*)$ に代入すると

$$f_n(x) = 3x^2 + 2(n-1)nx - \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

上式は，$n = 1, 2$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{f_n(x) = 3x^2 + 2(n-1)nx - \frac{1}{2}(n-2)(n-1)}$$

(4) (3) の結果から

$$(**)\quad f_{n+1}(x)-f_n(x)=2\{n(n+1)-(n-1)n\}x$$
$$-\frac{1}{2}\{(n-1)n-(n-2)(n-1)\}$$
$$=4nx-(n-1)$$
$$=n(4x-1)+1$$

$x=\dfrac{1}{4}$ のとき，すべての自然数 n に対して，上式は 1 であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{4},\quad \beta=1}$$

$g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$ とおくと，$(**)$ より，$g_n(x)$ は 1 次関数であり，$g_n(x)=0$ の解を γ とすると

$$\gamma=\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}=\alpha-\frac{1}{4n}\quad ゆえに\quad \alpha-\gamma=\frac{1}{4n}$$

$g_n(\alpha)=1$ より　$S_n=\dfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)g_n(\alpha)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4n}\cdot 1=\boldsymbol{\dfrac{1}{8n}}$

補足 $g_n(\alpha)\geqq 0$，$g_n(\gamma)\geqq 0$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}|\alpha-\gamma|\{g_n(\alpha)+g_n(\gamma)\}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $C : y = e^x$ を微分すると　$y' = e^x$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線 l は

$$y - e^t = e^t(x - t)$$

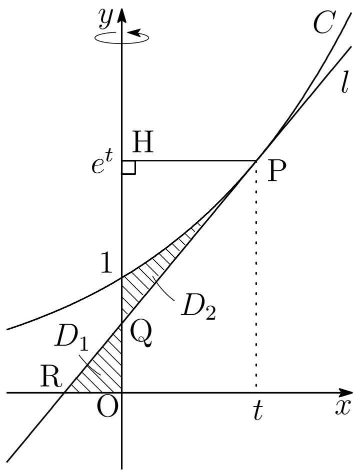
すなわち　$y = e^t(x - t + 1)$

$x = 0$ のとき，$y = e^t(1 - t)$ であるから

$$\mathbf{Q}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{e^t(1-t)})$$

$y = 0$ のとき，$x = t - 1$ であるから

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{t-1},\ \mathbf{0})$$



(2) 部分積分法により

$$\int \log x\,dx = \int (x)' \log x\,dx = x\log x - \int dx$$
$$= \boldsymbol{x(\log x - 1) + C_1} \quad (\boldsymbol{C_1}\textbf{は積分定数}),$$

$$\int (\log x)^2\,dx = \int (x)'(\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1) + C_2$$
$$= \boldsymbol{x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\} + C_2} \quad (\boldsymbol{C_2}\textbf{は積分定数})$$

別解 $t = \log x$ とおくと，$x = e^t$，$\dfrac{dx}{dt} = e^t$ であるから

$$\int \log x\,dx = \int e^t t\,dt = e^t\{t - (t)'\} + C_1$$
$$= e^t(t-1) + C_1$$
$$= x(\log x - 1) + C_1,$$

$$\int (\log x)^2\,dx = \int e^t t^2\,dt = e^t\{t^2 - (t^2)' + (t^2)''\} + C_2$$
$$= e^t(t^2 - 2t + 2) + C_2$$
$$= x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\} + C_2$$

ここでは，次の積分公式を利用している[2].

$$\int e^{px} f(x)\,dx = \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C$$

$$\int e^x f(x)\,dx = e^x\{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\} + C$$

---

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7 を参照)

(3) $V_1(t)$，$V_2(t)$ の体積は，前ページの図から $(C : x = \log y)$

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= \frac{1}{3}\pi \mathrm{OR}^2 \cdot \mathrm{OQ} \\
&= \frac{\pi}{3}(1-t)^2 \cdot e^t(1-t) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}e^t(1-t)^3}, \\
V_2(t) &= \frac{1}{3}\pi \mathrm{PH}^2 \cdot \mathrm{QH} - \pi\int_1^{e^t} (\log y)^2\,dy \\
&= \frac{\pi}{3}t^2 \cdot \{e^t - e^t(1-t)\} - \pi\Big[\, y\{(\log y)^2 - 2\log y + 2\}\,\Big]_1^{e^t} \\
&= \frac{\pi}{3}e^t t^3 - \pi\{e^t(t^2-2t+2) - 2\} \\
&= \boldsymbol{\pi\left\{e^t\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\right) + 2\right\}}
\end{aligned}$$

別解 バウムクーヘン型の求積法を用いると[3]，D_2 を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V_2(t)$ は，$C : y = e^x$，$l : y = e^t x + (1-t)e^t$ より

$$\begin{aligned}
\frac{V_2(t)}{2\pi} &= \int_0^t x\{e^x - e^t x - (1-t)e^t\}\,dx \\
&= \Big[\, e^x(x-1) - \frac{1}{3}e^t x^3 - \frac{1}{2}(1-t)e^t x^2 \,\Big]_0^t \\
&= e^t\left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t - 1\right) + 1
\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_1(t) + V_2(t) = \frac{\pi}{3}e^t(1-t)^3 + \pi\left\{e^t\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\right) + 2\right\} \\
&= \pi\left\{e^t\left(t - \frac{5}{3}\right) + 2\right\}, \\
V'(t) &= e^t\left(t - \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ における $V(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$V(t)$ は $\boldsymbol{t = \frac{2}{3}}$ のとき，最小値 $V\left(\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\pi(2 - e^{\frac{2}{3}})}$ をとる． ■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf $\boxed{2}$

$\boxed{6}$ (1) $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x で微分すると $(y \neq 0)$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 1 \quad ゆえに \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

C 上の点 $\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ における接線の傾きは，$b\sin\alpha \neq 0$ に注意して

$$y' = -\frac{b^2{\cdot}a\cos\alpha}{a^2{\cdot}b\sin\alpha} = \boldsymbol{-\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}}$$

したがって，C 上の点 P における接線 l の方程式は

$$y - b\sin\alpha = -\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}(x - a\cos\alpha)$$

両辺に $\dfrac{\sin\alpha}{b}$ を掛けると　$\dfrac{\sin\alpha}{b}(y - b\sin\alpha) = -\dfrac{\cos\alpha}{a}(x - a\cos\alpha)$

整理すると　$\dfrac{\cos\alpha}{a}x + \dfrac{\sin\alpha}{b}y = 1$

(2) (1) で示した接線の x 切片，y 切片がそれぞれ，$\dfrac{a}{\cos\alpha}$, $\dfrac{b}{\sin\alpha}$ であるから

$$S = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{a}{\cos\alpha}{\cdot}\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{ab}{\sin 2\alpha} \geqq ab \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ で S は最小値 $\boldsymbol{ab}$ をとる．$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{2}}}\right)$，$\boldsymbol{l : \dfrac{x}{\sqrt{2}a} + \dfrac{y}{\sqrt{2}b} = 1}$

(3) C 上の点 $\mathrm{R}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ における接線 m は

$$\frac{\cos\beta}{a}x + \frac{\sin\beta}{b}y = 1$$

2 直線 l，m の法線ベクトルは，それぞれ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}a}, \dfrac{1}{\sqrt{2}b}\right)$，$\left(\dfrac{\cos\beta}{a}, \dfrac{\sin\beta}{b}\right)$ であり，これらは垂直であるから

$$\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}a^2} + \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}b^2} = 1 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{\tan\beta = -\frac{b^2}{a^2}}$$

このとき　$\dfrac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \tan^2\beta = \dfrac{a^4 + b^4}{a^4}$，$\dfrac{1}{\sin^2\beta} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2\beta} = \dfrac{a^4 + b^4}{b^4}$

$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より，$\cos\beta = -\dfrac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}}$，$\sin\beta = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^4 + b^4}}$ であるから

$$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{-\frac{a^3}{\sqrt{a^4 + b^4}},\ \frac{b^3}{\sqrt{a^4 + b^4}}}\right)$$

(4) (2) の結果から，l の方程式は

$$l : bx + ay = \sqrt{2}ab$$

また，(3) の結果から，m の方程式は

$$m : -ax + by = \sqrt{a^4 + b^4}$$

これらの 2 式から，l と m の交点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ について

$$\begin{aligned}(bx + ay)^2 + (-ax + by)^2 &= (\sqrt{2}ab)^2 + (\sqrt{a^4 + b^4})^2 \\ (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) &= (a^2 + b^2)^4 \\ x^2 + y^2 &= a^2 + b^2 \\ \mathrm{OA}^2 &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

また，(2)，(3) の結果から

$$\mathrm{OQ}^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad \mathrm{OR}^2 = \frac{a^6 + b^6}{a^4 + b^4}$$

以上の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OR}^2 &= a^2 + b^2 - \frac{a^6 + b^6}{a^4 + b^4} = \frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{a^6 + b^6} > 0, \\ \mathrm{OR}^2 - \mathrm{OQ}^2 &= \frac{a^6 + b^6}{a^4 + b^4} - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2}{2(a^4 + b^4)} > 0\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{OA}^2 > \mathrm{OR}^2 > \mathrm{OQ}^2$　よって　$\mathbf{OA > OR > OQ}$ ■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_1^e (\log x)^n\,dx$ より (n は自然数)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^e \log x\,dx = \Big[\,x(\log x - 1)\,\Big]_1^e = \mathbf{1},\\
I_2 &= \int_1^e (\log x)^2\,dx = \Big[\,x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\}\,\Big]_1^e = \boldsymbol{e-2},\\
I_{n+1} &= \int_1^e (x)'(\log x)^{n+1}\,dx\\
&= \Big[\,x(\log x)^{n+1}\,\Big]_1^e - (n+1)\int_1^e (\log x)^n\,dx\\
&= \boldsymbol{e-(n+1)I_n}
\end{aligned}
$$

(2) $a+be=0$ について ($a,\ b$ は有理数)，$b \neq 0$ とすると

$$e = -\frac{a}{b}$$

上式の左辺は無理数，右辺は有理数であるから，不合理.

$b=0$ であるから，これを $a+be=0$ に代入すると　$a=0$

よって，$a+be=0$ ならば ($a,\ b$ は有理数)，$a=0$ かつ $b=0$

(3) $(*)$　$I_n = A_n + B_n e$ ($A_n,\ B_n$は有理数)

［1］ $n=1$ のとき，$I_1 = 1 + 0{\cdot}e$ より，$(*)$ は成立する.

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成立する，すなわち，

$$I_k = A_k + B_k e\ (A_k,\ B_k\text{は有理数})$$

であると仮定すると，(1) で示した漸化式により

$$
\begin{aligned}
I_{k+1} &= e-(k+1)I_k = e-(k+1)(A_k+B_k e)\\
&= -(k+1)A_k + \{1-(k+1)B_k\}e
\end{aligned}
$$

これから

$$A_{k+1} = -(k+1)A_k,\quad B_{k+1} = 1-(k+1)B_k \qquad (**)$$

とおくと，$A_{k+1},\ B_{k+1}$ は有理数であるから，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

［1］，［2］により，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する.

(4) $(**)$ の第 1 式の両辺を $(-1)^{k+1}(k+1)!$ で割ると

$$\frac{A_{k+1}}{(-1)^k(k+1)!}=\frac{A_k}{(-1)^k k!}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{A_n}{(-1)^n n!}=\frac{A_1}{(-1)^1 1!}$$

$A_1=1$ であるから　$A_n=\boldsymbol{(-1)^{n+1}n!}$　また　$C_n=\dfrac{A_n}{(-1)^{n+1}n!}=\mathbf{1}$

(5) $(\#)$　$B_n=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i{}_n\mathrm{P}_i$

［1］$n=1$ のとき，$I_1=1+0{\cdot}e$ より，$B_1=0$

$(\#)$ より　$B_1=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{1}(-1)^i{}_1\mathrm{P}_i=1+(-1)=0$

よって，$n=1$ のとき，$(\#)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(\#)$ が成立する，すなわち

$$B_k=1+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i{}_k\mathrm{P}_i$$

が成り立つと仮定すると，$(**)$ の第 2 式から

$$\begin{aligned}B_{k+1}&=1-(k+1)B_k\\&=1-(k+1)\left\{1+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i{}_k\mathrm{P}_i\right\}\\&=1+(-1)^1{}_{k+1}\mathrm{P}_1+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}{}_{k+1}\mathrm{P}_{i+1}\\&=1+(-1)^1{}_{k+1}\mathrm{P}_1+\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^i{}_{k+1}\mathrm{P}_i=1+\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i{}_{k+1}\mathrm{P}_i\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(\#)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(\#)$ は成立する．

(4) および上の結果を用いて

$$\begin{aligned}I_5&=A_5+B_5e=(-1)^6 5!+\left\{1+\sum_{i=1}^{5}(-1)^i{}_5\mathrm{P}_i\right\}e\\&=120+(1-5+20-60+120-120)e\\&=\mathbf{120-44}\boldsymbol{e}\end{aligned}$$

補足 $I_1=1,\ I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ より

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}I_{n+1}-\frac{(-1)^n}{n!}I_n=\frac{(-1)^{n+1}e}{(n+1)!}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}I_{k+1}-\frac{(-1)^k}{k!}I_k\right\}&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}e}{(k+1)!}\\ \frac{(-1)^n}{n!}I_n+1&=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}$ であるから

$$\begin{aligned}I_n&=(-1)^{n+1}n!+(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}\\ &=(-1)^{n+1}n!+e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}\\ &=(-1)^{n+1}n!+e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}=(-1)^{n+1}n!+e\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立する．よって

$$A_n=(-1)^{n+1}n!,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k$$

また，$t=\log x$ とおくと，$x=e^t$，$\dfrac{dx}{dt}=e^t$ であるから (p.12 参照)

$$\begin{aligned}I_n&=\int_1^e(\log x)^n\,dx=\int_0^1 e^t t^n\,dt=\Big[\ e^t\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(t^n)^{(k)}\ \Big]_0^1\\ &=\Big[\ e^t\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k t^{n-k}+e^t(-1)^n n!\ \Big]_0^1\\ &=e\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k+(-1)^{n+1}n!\end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) q_1 は，1 回目に裏が出る確率であるから　　$\boldsymbol{q_1 = 1 - p}$

操作により，次の確率漸化式が成立する．

$$q_{n+1} = (1-p)q_n + p(1-q_n) \quad \text{すなわち} \quad q_{n+1} = (1-2p)q_n + p \qquad (*)$$

これを変形すると

$$q_{n+1} - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(q_n - \frac{1}{2}\right)$$

数列 $\left\{q_n - \dfrac{2}{2}\right\}$ は初項 $q_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(1-2p)$，公比 $1-2p$ の等比数列より

$$q_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-2p)\cdot(1-2p)^{n-1} \quad \text{よって} \quad q_n = \frac{1}{2}\{1 + (1-2p)^n\} \quad (**)$$

$n = 2,\ 3$ を $(**)$ に代入すると

$$\boldsymbol{q_2 = 1 - 2p + 2p^2, \quad q_3 = 1 - 3p + 6p^2 - 4p^3}$$

(2) $(*)$ より　$\boldsymbol{q_{n+1} = (1-2p)q_n + p}$

(3) $(**)$ より　$\boldsymbol{q_n = \dfrac{1}{2}\{1 + (1-2p)^n\}}$

(4)

X_n	1	-1	合計
$P(X_n)$	q_n	$1-q_n$	1

$$E(X_n) = 1q_n + (-1)(1-q_n) = 2q_n - 1 = \boldsymbol{(1-2p)^n}$$
$$E({X_n}^2) = 1^2 q_n + (-1)^2(1-q_n) = 1$$

したがって

$$V(X_n) = E({X_n}^2) - E(X_n)^2 = \boldsymbol{1 - (1-2p)^{2n}}$$
$$\sigma(X_n) = \sqrt{V(X_n)} = \boldsymbol{\sqrt{1 - (1-2p)^{2n}}}$$

■