令和３年度　長崎大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部　令和３年３月12日

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$

$\boxed{1}$

問 1 次の実数 x，y の連立方程式について以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} 4^y + 3^x - 2^{4y} = 7 & \cdots ① \\ 3^x + 3\cdot 4^y = 15 & \cdots ② \end{cases}$$

(1) $3^x = X$，$4^y = Y$ とおき，連立方程式 ①，② を X，Y の連立方程式に変形せよ．

(2) (1) で求めた連立方程式を用いて，X，Y を求めよ．

(3) (2) で求めた X，Y より，連立方程式 ①，② の解 x，y を求めよ．

問 2 三角形 OAB の辺 OA を 2 : 1 の比に内分する点を M とし，辺 OB を 4 : 1 に内分する点を N とおく．2 つの線分 AN と BM の交点を P とおく．また，線分 OP の延長線上で，辺 AB との交点を F とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 点 A，B の点 O を基準にする位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| : |\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$ を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の内積 $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boxed{\quad ア \quad}|\vec{a}|^2 + \boxed{\quad イ \quad}\vec{a}\cdot\vec{b} + \boxed{\quad ウ \quad}|\vec{b}|^2$$

となる．$\boxed{\quad ア \quad}$〜$\boxed{\quad ウ \quad}$に当てはまる数値を求めよ．

2

問 1 関数 $y = \sin^3 x$ を x で微分せよ．

問 2 関数 $y = x \log x \ (x > 0)$ について以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数とする．

(1) 関数 y を x で微分せよ．

(2) 関数 y の最小値を求めよ．

問 3 曲線 $y = x^2 + 3x - 2$ と曲線 $y = 3x^2 - 2$ について以下の問いに答えよ．

(1) 2 つの曲線の交点の座標を求めよ．

(2) 2 つの曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ．

問 4 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{(4-x)(4+x)}\,dx$ の値を求めよ．

解答例

1

問 1 (1) $3^x = X$，$4^y = Y$ より，$2^{4y} = (4^y)^2 = Y^2$ であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y + X - Y^2 = 7} \\ \boldsymbol{X + 3Y = 15} \end{cases}$$

(2) (1) の連立方程式から，X を消去して整理すると

$$Y^2 + 2Y - 8 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (Y+4)(Y-2) = 0$$

$Y > 0$ に注意して解くと　$\boldsymbol{Y = 2}$

これを (1) の第 2 式に代入すると　$\boldsymbol{X = 9}$

(3) (2) の結果から　$3^x = 9$，$4^y = 2$

$$3^x = 3^2,\quad 2^{2y} = 2^1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = 2,\ y = \frac{1}{2}}$$

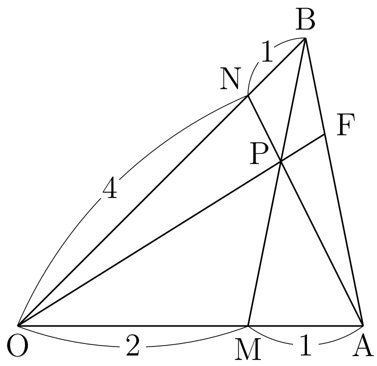
問 2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと (x，y は実数)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{2}x\overrightarrow{\mathrm{OM}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{4}y\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

点 P は線分 MB，NA 上の点であるから

$$\frac{3}{2}x + y = x + \frac{5}{4}y = 1$$



これを解いて　$x = \dfrac{2}{7}$，$y = \dfrac{4}{7}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}}$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} = \dfrac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| : |\overrightarrow{\mathrm{PF}}| = 6 : 1}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{2}{3}|\vec{b}|^2$$

(答) ア $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$　イ $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$　ウ $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$

問 1 $y = \sin^3 x$ より　$\boldsymbol{y' = 3\sin^2 x\cos x}$

問 2　(1) $y = x\log x$ より　$\boldsymbol{y' = \log x + 1}$

(2) (1) の結果から，y の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

よって，$x = \dfrac{1}{e}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$

問 3　(1) $y = x^2 + 3x - 2 \cdots$ ①，$y = 3x^2 - 2 \cdots$ ② から y を消去すると

$$x^2 + 3x - 2 = 3x^2 - 2 \quad \text{ゆえに} \quad x(2x-3) = 0$$

したがって　$x = 0,\ \dfrac{3}{2}$　② より　交点 $\boldsymbol{(0, -2),\ \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{19}{4}\right)}$

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{3}{2}} \{(x^2+3x-2) - (3x^2-2)\}\,dx \\ &= -2\int_0^{\frac{3}{2}} x\left(x - \frac{3}{2}\right)dx \\ &= \frac{2}{6}\left(\frac{3}{2} - 0\right)^3 = \boldsymbol{\frac{9}{8}} \end{aligned}$$

問 4 $y = \sqrt{(4-x)(4+x)}$ とおくと　$x^2 + y^2 = 16$

したがって，定積分 $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{(4-x)(4+x)}\,dx$ の値は，右の図の斜線部分の面積である．

よって　$\displaystyle\int_0^4 \sqrt{(4-x)(4+x)}\,dx = \frac{1}{4}\pi\cdot 4^2 = \boldsymbol{4\pi}$