

令和3年度 長崎大学2次試験後期日程(数学問題)
工学部 令和3年3月12日

1

問1 次の実数 x, y の連立方程式について以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} 4^y + 3^x - 2^{4y} = 7 & \dots \textcircled{1} \\ 3^x + 3 \cdot 4^y = 15 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

- (1) $3^x = X, 4^y = Y$ とおき, 連立方程式 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を X, Y の連立方程式に変形せよ.
- (2) (1) で求めた連立方程式を用いて, X, Y を求めよ.
- (3) (2) で求めた X, Y より, 連立方程式 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の解 x, y を求めよ.

問2 三角形 OAB の辺 OA を 2:1 の比に内分する点を M とし, 辺 OB を 4:1 に内分する点を N とおく. 2 つの線分 AN と BM の交点を P とおく. また, 線分 OP の延長線上で, 辺 AB との交点を F とおく. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 点 A, B の点 O を基準にする位置ベクトルを \vec{a}, \vec{b} とするとき, \vec{OP} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ.
- (2) $|\vec{OP}| : |\vec{PF}|$ を求めよ.
- (3) \vec{OF} と \vec{AB} の内積 \vec{a}, \vec{b} を用いて表すと,

$$\vec{OF} \cdot \vec{AB} = \boxed{\text{ア}} |\vec{a}|^2 + \boxed{\text{イ}} \vec{a} \cdot \vec{b} + \boxed{\text{ウ}} |\vec{b}|^2$$

となる. $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる数値を求めよ.

2

問1 関数 $y = \sin^3 x$ を x で微分せよ.

問2 関数 $y = x \log x$ ($x > 0$) について以下の問いに答えよ. ただし, $\log x$ は自然対数とする.

- (1) 関数 y を x で微分せよ.
- (2) 関数 y の最小値を求めよ.

問3 曲線 $y = x^2 + 3x - 2$ と曲線 $y = 3x^2 - 2$ について以下の問いに答えよ.

- (1) 2つの曲線の交点の座標を求めよ.
- (2) 2つの曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ.

問4 定積分 $\int_0^4 \sqrt{(4-x)(4+x)} dx$ の値を求めよ.

解答例

1

問1 (1) $3^x = X$, $4^y = Y$ より, $2^{4y} = (4^y)^2 = Y^2$ であるから

$$\begin{cases} Y + X - Y^2 = 7 \\ X + 3Y = 15 \end{cases}$$

(2) (1) の連立方程式から, X を消去して整理すると

$$Y^2 + 2Y - 8 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (Y + 4)(Y - 2) = 0$$

$Y > 0$ に注意して解くと $Y = 2$

これを (1) の第2式に代入すると $X = 9$

(3) (2) の結果から $3^x = 9$, $4^y = 2$

$$3^x = 3^2, \quad 2^{2y} = 2^1 \quad \text{よって} \quad x = 2, \quad y = \frac{1}{2}$$

問2 (1) $\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと (x, y は実数)

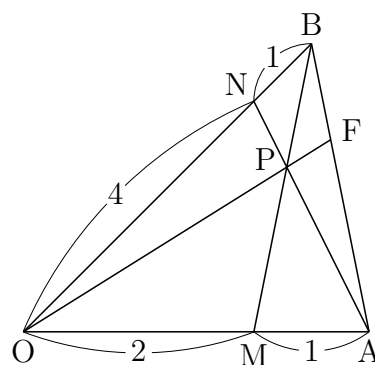
$$\vec{OA} = \frac{3}{2}\vec{OM}, \quad \vec{OB} = \frac{5}{4}\vec{ON} \quad \text{より}$$

$$\vec{OP} = \frac{3}{2}x\vec{OM} + y\vec{OB} = x\vec{OA} + \frac{5}{4}y\vec{ON}$$

点 P は線分 MB, NA 上の点であるから

$$\frac{3}{2}x + y = x + \frac{5}{4}y = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{2}{7}, \quad y = \frac{4}{7} \quad \text{よって} \quad \vec{OP} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$$



(2) (1) の結果から $\vec{OP} = \frac{6}{7} \cdot \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} = \frac{6}{7}\vec{OF}$

$$\text{よって} \quad |\vec{OP}| : |\vec{PF}| = 6 : 1$$

(3) $\vec{OF} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})$, $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ より

$$\vec{OF} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3}|\vec{b}|^2$$

(答) ア $-\frac{1}{3}$ イ $-\frac{1}{3}$ ウ $\frac{2}{3}$

2

問1 $y = \sin^3 x$ より $y' = 3 \sin^2 x \cos x$

問2 (1) $y = x \log x$ より $y' = \log x + 1$

(2) (1)の結果から, y の増減表は

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$...
y'		-	0	+
y		\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow

よって, $x = \frac{1}{e}$ のとき 最小値 $-\frac{1}{e}$

問3 (1) $y = x^2 + 3x - 2 \cdots \textcircled{1}$, $y = 3x^2 - 2 \cdots \textcircled{2}$ から y を消去すると

$$x^2 + 3x - 2 = 3x^2 - 2 \quad \text{ゆえに} \quad x(2x - 3) = 0$$

したがって $x = 0, \frac{3}{2}$ $\textcircled{2}$ より 交点 $(0, -2), \left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{3}{2}} \{(x^2 + 3x - 2) - (3x^2 - 2)\} dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{3}{2}} x \left(x - \frac{3}{2}\right) dx \\ &= \frac{2}{6} \left(\frac{3}{2} - 0\right)^3 = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

問4 $y = \sqrt{(4-x)(4+x)}$ とおくと $x^2 + y^2 = 16$

したがって, 定積分 $\int_0^4 \sqrt{(4-x)(4+x)} dx$ の値は, 右の図の斜線部分の面積である.

$$\text{よって} \quad \int_0^4 \sqrt{(4-x)(4+x)} dx = \frac{1}{4} \pi \cdot 4^2 = 4\pi$$

