令和３年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和 3 年 2 月 25 日

- 教育 A・経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学・歯学・工学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 必答, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ の 2 題から 1 題選択
  数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 必答, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ の 2 題から 1 題選択
  数 I・II・III・A・B (120 分)
- 情報データ科学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 必答, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{11}$ の 3 題から 1 題選択
  数 I・II・III・A・B (120 分)

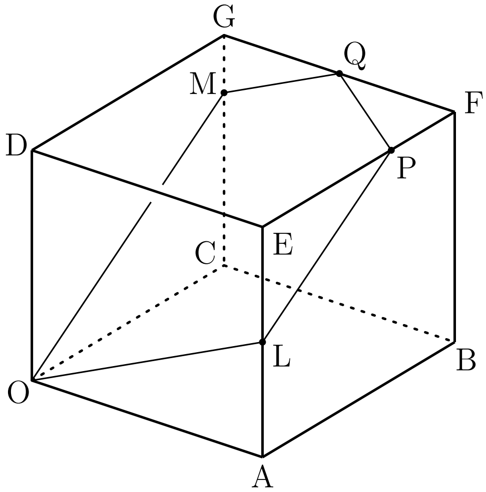
$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $y = \sin 2x - 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$ がある．
$\sin x + \cos x = t$ とおくとき，t の値の範囲を求め，y を t の式で表せ．また，関数 y の最大値と最小値，およびそのときの t と x の値をそれぞれ求めよ．

(2) 原点を O とする xy 座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 5$ と直線 $l : x + 3y - 5 = 0$ がある．円 C と直線 l との 2 つの交点 A，B (A の x 座標は，B の x 座標より小さい) における接線をそれぞれ l_1, l_2 とし，l_1 と l_2 との交点を P とする．このとき，l_1, l_2 の式および点 P の座標を求めよ．また，直線 OP と円 C の交点を Q，R とするとき，線分の長さの積 PQ·PR を求めよ．

(3) t の関数 $S(t)$ を，$S(t) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - t^2|\,dx$ とする．このとき，$S(1)$ の値を求めよ．また，$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の最大値と最小値，およびそのときの t の値を求めよ．

2 下図のように，1辺の長さが1の立方体 DEFG-OABC がある．点 L は線分 AE を 1 : 1 に，点 M は線分 CG を 3 : 1 に内分する点である．また，3点 O，L，M を通る平面 T は，辺 EF および辺 GF と 2 点 P，Q で交わる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，(1) については答えのみでよい．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$ および $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ．

(2) $\cos\angle\mathrm{LOM}$ の値，および $\triangle\mathrm{LOM}$ の面積 S_1 を求めよ．

(3) $\mathrm{EP} : \mathrm{PF} = p : (1-p)$ $(0 < p < 1)$，$\mathrm{GQ} : \mathrm{QF} = q : (1-q)$ $(0 < q < 1)$ とする．このとき，p と q の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．また，五角形 OLPQM の面積 S_2 を求めよ．

3 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 3$ で定義された関数 $y = -2(\log_3 3x)^3 + 3(\log_3 x + 1)^2 + 1$ がある．関数 y の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

(2) 以下で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 4,\quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ を満たす α，β の値を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め，極限を調べよ．

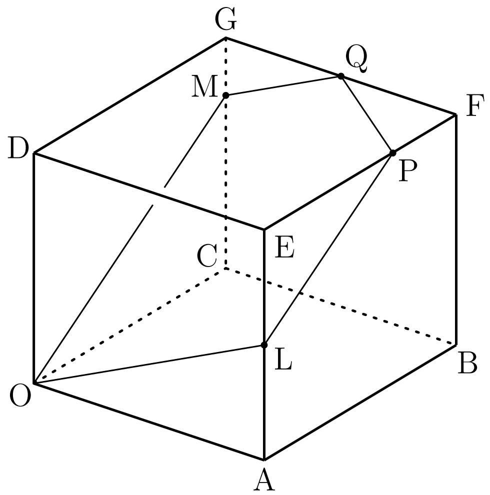
(3) 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について次の等式を満たしている．

$$f(x) = 2 + \int_0^x \sin(x-t) f(t)\, dt$$

このとき，$f''(x)$ が定数であることを示せ．

また，$f(0)$ および $f'(0)$ の値から，$f'(x)$ と $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ 下図のように，1 辺の長さが 1 の立方体 DEFG-OABC がある．点 L は線分 AE を 1 : 1 に，点 M は線分 CG を 3 : 1 に内分する点である．また，3 点 O，L，M を通る平面 T は，辺 EF および辺 GF と 2 点 P，Q で交わる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，(1)，(2) については答えのみでよい．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表し，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$ および $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ．また，$\cos\angle\mathrm{LOM}$ の値，および $\triangle\mathrm{LOM}$ の面積 S_1 を求めよ．

(2) $\mathrm{EP} : \mathrm{PF} = p : (1-p)$ $(0 < p < 1)$，$\mathrm{GQ} : \mathrm{QF} = q : (1-q)$ $(0 < q < 1)$ とする．このとき，p と q の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．また，五角形 OLPQM の面積 S_2 を求めよ．

(4) 点 D から平面 T に垂線を下ろし，その交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|$ を求め，D を頂点とする五角錐(すい)D-OLPQM の体積 V を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xy 座標平面上の原点を通る 2 直線 $m_1 : y = (\tan\theta)x$，$m_2 : y = \left(\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)x$ が，直線 $x = 1$ と交わる点をそれぞれ P，Q とする．ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ である．$\tan\theta = t$ とするとき，関数 $f(t)$ を線分 PQ の長さと定義する．以下の問いに答えよ．

(1) t の値の範囲を求め，$f(t)$ を t の式で表せ．

(2) $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ と $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$f(t)$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) $f'(t)$ を求め，$f(t)$ の増減表を作成せよ．また，$l = f(t)$ のグラフの漸近線の式を求め，tl 座標平面上に $l = f(t)$ のグラフの概形をかけ．

(4) $f(t)$ の最小値を求めよ．また，このときの 2 点 P，Q の座標，および θ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ xy 座標平面上に 4 点 A$(0, -1)$，B$(1, -1)$，C$(1,\ 1)$，D$(0,\ 1)$ を頂点とする長方形 ABCD がある．原点を通る 2 直線 $m_1 : y = (\tan\theta)x$，$m_2 : y = \left(\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)x$ が長方形の辺と交わる点をそれぞれ P，Q とする．ただし，$-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ である．$\tan\theta = t$ とするとき，関数 $f(t)$ を以下のように定義する．

$-\dfrac{\pi}{4} < \theta \leqq 0$ のとき，$f(t)$ は線分 PQ の長さとする．

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$f(t)$ は線分 PC の長さと線分 CQ の長さの和とする．

以下の問いに答えよ．

(1) $f(t)$ を t の式で表せ．

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{8}$ のとき，$f(t)$ の値を求めよ．

(3) $f(t)$ が，$t = 0$ で微分可能であるかどうか調べよ．

(4) $f(t)$ の増減表を作成せよ．$\displaystyle\lim_{t \to -1+0} f(t)$，$\displaystyle\lim_{t \to 1-0} f(t)$ を求め，$f(t)$ の最大値と最小値，およびこのときの t と θ の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\textbf{7}}$ $a > 0$ とし，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を，それぞれ以下のように定義する．

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \quad && (x \geqq 0) \\ g(x) &= ax^2 \quad && (x \geqq 0) \end{aligned}$$

2 つの曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ は，ともに点 P を通り，かつ点 P において共通な直線 l に接しているものとする．点 P の x 座標が p $(p > 0)$ であるとき，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) a と p の値，および直線 l の式を求めよ．

(2) $x > 0$ において定義される関数 $h(x) = \log f(x) - \log g(x)$ について，$h(x)$ の増減表を作成せよ．また，$x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) 2 つの曲線 C_1 と C_2 および y 軸とで囲まれる図形 F の面積 S を求めよ．

(4) (3) の図形 F を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

$\boxed{\textbf{8}}$ 自然数 n に対して定まる複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ があり，z_n は以下の式を満たしている．

$$z_{n+1} = \frac{z_n - 2}{2z_n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，z_1 は $|z_1| = 1$ を満たすものとする．また，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $z_{n+1} = z_n$ となる z_n を求めよ．また，$z_{n+1} = -z_n$ となる z_n を求めよ．

(2) すべての n に対して，$|z_n| = 1$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) z_{n+2} を z_n で表せ．また，点 P_1 を定めたとき，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さは，すべての n に対して一定であることを説明せよ．

(4) z_n，z_{n+1} について，$z_n = x + yi$ (x, y は実数)，$z_{n+1} = X + Yi$ (X, Y は実数) とする．$X < 0$ かつ $Y > 0$ となるような点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 自然数 n に対して定まる複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ があり，z_n は以下の式を満たしている．

$$z_{n+1} = \frac{z_n - 2}{2z_n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，z_1 は $|z_1| = 1$ を満たすものとする．また，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) すべての n に対して，$|z_n| = 1$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) z_{n+2} を z_n で表せ．また，点 P_1 を定めたとき，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さは，すべての n に対して一定であることを説明せよ．

(3) z_n，z_{n+1} について，$z_n = x + yi$ (x, y は実数)，$z_{n+1} = X + Yi$ (X, Y は実数) とする．$X < 0$ かつ $Y > 0$ となるような点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

(4) 複素数平面上の原点を O とし，$z_1 = a + bi$ ($a > 0$, $b > 0$) とする．すべての n に対して，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角三角形となるような a と b の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 図1，図2のように，原点をOとするxyz座標空間に扇形OABと直円錐(すい)がある．図1の扇形OABは，線分OAを半径とし，中心角の大きさをθ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$とする$yz$平面上の扇形である．図2の直円錐は，線分OAを母線とし，線分ACを底面の円の直径とする円錐である．図1，図2の点Aの座標をA$(0,\ 3,\ 0)$，点Cの座標をC$\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$とするとき，以下の問いに答えよ．

図1

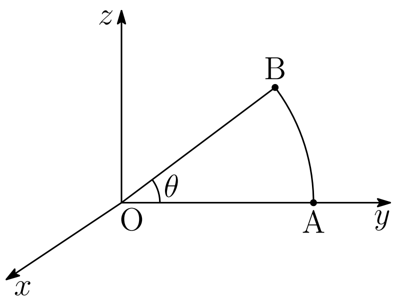
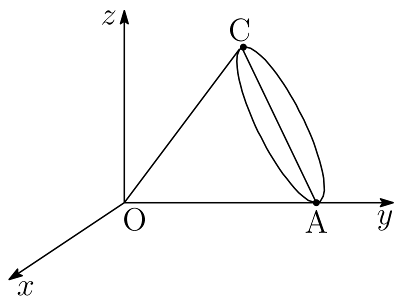


図2



(1) 図1の扇形OABをy軸の周りに1回転してできる回転体をT_1とする．平面$y = t$ $(0 \leqq t \leqq 3)$でT_1を切ったときの断面積$S_1(t)$をtの式で表せ．

(2) (1)の回転体T_1の体積V_1を求めよ．

(3) 図2の直円錐をy軸の周りに1回転してできる回転体をT_2とする．平面$y = t$ $(0 \leqq t \leqq 3)$でT_2を切ったときの断面積$S_2(t)$をtの式で表せ．

(4) (3)の回転体T_2の体積V_2を求めよ．

(5) (2)のV_1と(4)のV_2の大小を調べよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 1 回投げると，確率 p $(0 < p < 1)$ で表，確率 $1-p$ で裏が出るコインがある．このコインを投げたとき，動点 P は，表が出れば $+1$，裏が出れば -1 だけ，数直線上を移動することとする．はじめに，P は数直線の原点 O にあり，n 回コインを投げた後の P の座標を X_n とする．以下の問いに答えよ．必要に応じて，次頁の正規分布表を用いても良い．

(1) $p = \dfrac{1}{2}$ とする．X_4 と X_5 の確率分布，平均および分散を，それぞれ求めよ．

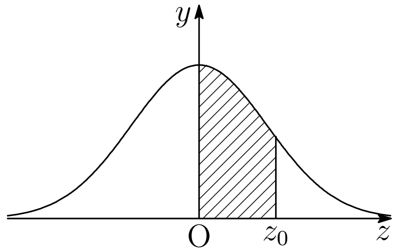
(2) $p = \dfrac{1}{2}$ とする．6 回コインを投げて，6 回目ではじめて原点 O に戻る確率を求めよ．

(3) X_1 の平均と分散を，それぞれ p を用いて表せ．また，X_n の平均と分散を，それぞれ n と p を用いて表せ．

(4) コインを 100 回投げたところ $X_{100} = 28$ であった．このとき，p に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ．

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $t = \sin x + \cos x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とおくと，$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$$

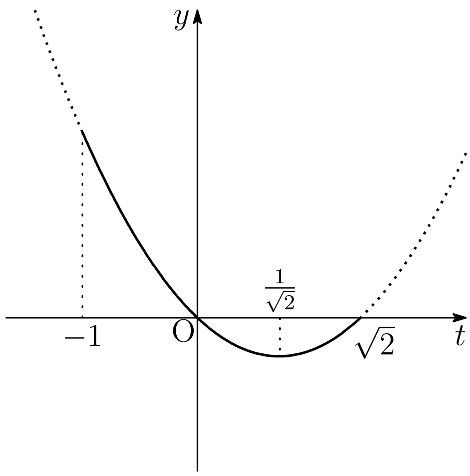
$y = \sin 2x - 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$ について

$$\begin{aligned}
\sin 2x + 1 &= 2\sin x\cos x + 1 \\
&= (\sin x + \cos x)^2 = t^2 \\
2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}t
\end{aligned}$$

したがって　$y = t^2 - \sqrt{2}t = \boldsymbol{\left(t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \dfrac{1}{2}}$

よって　$\boldsymbol{t = -1}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \pi}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{1 + \sqrt{2}}$

$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{12}\pi}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$



(2) $C: x^2+y^2=5$ と $l: x+3y=5$ の交点は，条件に注意して求めると

$$\mathrm{A}(-1,\ 2),\ \mathrm{B}(2,\ 1)$$

2 点 A, B における接線は，それぞれ

$$\boldsymbol{l_1 : -x+2y=5,\quad l_2 : 2x+y=5}$$

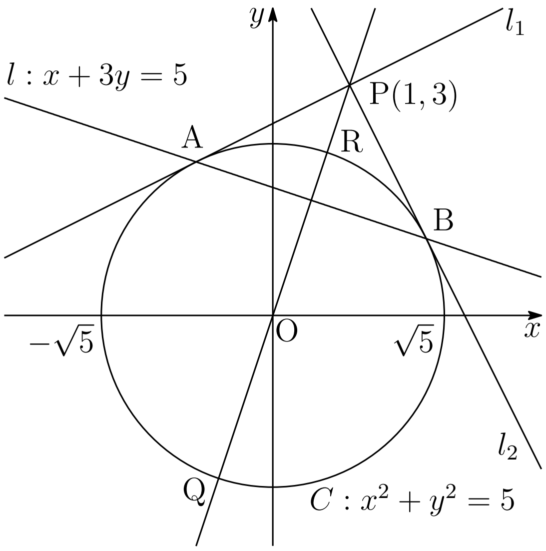
l_1 と l_2 の交点 P の座標は　$(1,\ 3)$

$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ および C の半径が $\sqrt{5}$ であるから

$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=(\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5})=\mathbf{5}$$

別解 方べきの定理により　$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\mathrm{PA}^2(=\mathrm{PB}^2)$

$\mathrm{PA}\ (=\mathrm{PB})=\sqrt{5}$ であるから　　$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\mathbf{5}$



補足 l は点 P(1, 3) を極とする極線である [1]．したがって，極線 l の方程式から，極 P の座標が求まる．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2012.pdf $\boxed{7}$ を参照

(3) $S(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$ より

$$S(1)=\int_0^1 |x^2-1|\,dx=\int_0^1 (1-x^2)\,dx=\left[\,x-\frac{x^3}{3}\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t)&=\int_0^t (t^2-x^2)\,dx+\int_t^1 (x^2-t^2)\,dx \\ &=\left[\,t^2x-\frac{x^3}{3}\,\right]_0^t+\left[\,\frac{x^3}{3}-t^2x\,\right]_t^1 \\ &=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

したがって　$S'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

よって　最大値 $\boldsymbol{S(1)=\frac{2}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|^2=\left|\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{d}\right|^2=|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{4}|\vec{d}|^2=\dfrac{5}{4}$　ゆえに　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|=\frac{\sqrt{5}}{2}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=\left|\vec{c}+\dfrac{3}{4}\vec{d}\right|^2=|\vec{c}|^2+\dfrac{9}{16}|\vec{d}|^2=\dfrac{25}{16}$　ゆえに　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\frac{5}{4}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{c}+\dfrac{3}{4}\vec{d}\right)=\dfrac{3}{8}|\vec{d}|^2=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$

(2) (1) の結果から

$$\cos\angle\mathrm{LOM}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OL}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5}{4}}=\boldsymbol{\frac{3}{25}\sqrt{5}}$$

このとき　$\sin\angle\mathrm{LOM}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{29}}{5\sqrt{5}}$

よって　$S_1=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OL}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\sin\angle\mathrm{LOM}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{2\sqrt{29}}{5\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{29}}{8}}$

別解 $S_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{25}{16}-\left(\dfrac{3}{8}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{29}}{8}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{LP}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{LP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおけるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+p\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}+p\left(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right)\\&=\vec{a}+p\vec{c}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}p\right)\vec{d}\end{aligned}$$

このとき　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}p=1$　よって　$\boldsymbol{p=\dfrac{2}{3}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}+\vec{d}}$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ とおけるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+q\overrightarrow{\mathrm{OL}}\\&=\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}+q\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\\&=q\vec{a}+\vec{c}+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}q\right)\vec{d}\end{aligned}$$

このとき　$\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}q=1$　よって　$\boldsymbol{q=\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}}$

別解 $\triangle\mathrm{CMO}\backsim\triangle\mathrm{ELP}$，相似比は　$1:p=\mathrm{CM}:\mathrm{EL}=\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$p=\dfrac{2}{3}$

$\triangle\mathrm{ALO}\backsim\triangle\mathrm{GMQ}$，相似比は　$1:q=\mathrm{AL}:\mathrm{GM}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{4}$　ゆえに　$q=\dfrac{1}{2}$

(4) (1)，(3) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{LP}}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}\left(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}\\\overrightarrow{\mathrm{MQ}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{d}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となる点 N をとると，2 点 P，Q は，それぞれ平行四辺形 OLNM の辺 LN，MN にあり

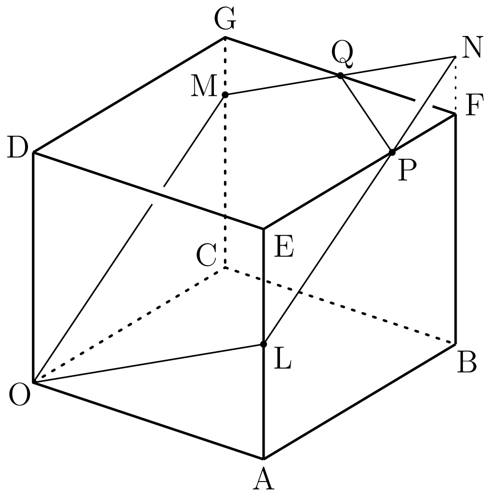
$$\mathrm{LP} : \mathrm{PN} = \mathrm{EP} : \mathrm{PF} = 2 : 1, \quad \mathrm{MQ} : \mathrm{QN} = \mathrm{GQ} : \mathrm{QF} = 1 : 1$$

したがって，△NPQ の面積は，(2) の結果を用いて

$$\triangle\mathrm{NPQ} = \frac{1}{2+1}\cdot\frac{1}{1+1}S_1 = \frac{1}{6}S_1$$

よって，求める五角形 OLPQM の面積 S_2 は

$$S_2 = 2S_1 - \frac{1}{6}S_1 = \frac{11}{6}S_1 = \frac{11}{6}\cdot\frac{\sqrt{29}}{8} = \boldsymbol{\frac{11}{48}\sqrt{29}}$$



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$\begin{aligned} y &= -2(\log_3 3x)^3 + 3(\log_3 x + 1)^2 + 1 \\ &= -2(\log_3 3x)^3 + 3(\log_3 3x)^2 + 1 \end{aligned}$$

$t = \log_3 3x$ とおくと，$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 3$ より　$0 \leqq t \leqq 2$

$$y = -2t^3 + 3t^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad y' = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	1	↗	2	↘	-3

よって　$t = 1$　すなわち　$\boldsymbol{x = 1}$ のとき　最大値 **2**

$t = 2$　すなわち　$\boldsymbol{x = 3}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-3}$

(2) $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ より　$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$　$\cdots$①

$(*)$　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ より

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0 \quad \cdots ②$$

① と ② の係数を比較して　$\alpha+\beta=5,\quad \alpha\beta=6$

$\alpha,\ \beta$ を解とする 2 次方程式は　$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$　これを解いて　$x=2,\ 3$

$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)}$ を $(*)$ にそれぞれ代入すると

$$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) \end{cases}$$

$a_1=1,\ a_2=4$ により

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$$
$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々の差をとると　$\boldsymbol{a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}3^{n-1}\left\{2-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=\infty$,　$\boldsymbol{\{a_n\}}$ は発散する

補足 $\alpha\neq\beta$ のとき，上の結果から，定数 $A,\ B$ を用いて

$$\boldsymbol{a_n=A\alpha^n+B\beta^n}$$

$\alpha=\beta$ のとき，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ より

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}$$
$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_2}{\alpha^2}-\frac{a_1}{\alpha}$$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{\alpha}$，公差 $\dfrac{a_2}{\alpha^2}-\dfrac{a_1}{\alpha}$ の等差数列である．

したがって，$\dfrac{a_n}{\alpha^n}$ は n の 1 次式で，定数 C，D を用いて

$$\frac{a_n}{\alpha^n}=Cn+D \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_n=(Cn+D)\alpha^n}$$

(3) $f(x) = 2 + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t) f(t)\,dt$ より

$$f(x) = 2 + (\sin x)\int_0^x f(t)\cos t\,dt - (\cos x)\int_0^x f(t)\sin t\,dt \qquad (*)$$

$(*)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x)\int_0^x f(t)\cos t\,dt + f(x)\sin x\cos x \\ &\qquad + (\sin x)\int_0^x f(t)\sin t\,dt - f(x)\sin x\cos x \\ &= (\cos x)\int_0^x f(t)\cos t\,dt + (\sin x)\int_0^x f(t)\sin t\,dt \qquad (**) \end{aligned}$$

さらに微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(\sin x)\int_0^x f(t)\cos t\,dt + f(x)\cos^2 x \\ &\qquad + (\cos x)\int_0^x f(t)\sin t\,dt + f(x)\sin^2 x \\ &= f(x) - (\sin x)\int_0^x f(t)\cos t\,dt + (\cos x)\int_0^x f(t)\sin t\,dt \end{aligned}$$

$(*)$ を上式に代入して整理すると　　$f''(x) = 2$

$(*)$，$(**)$ に $x=0$ を代入すると　$f(0)=2$，$f'(0)=0$

したがって　$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$　よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2}$

$\boxed{4}$ (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|^2 = \left|\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{d}|^2 = \frac{5}{4}$　ゆえに　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OL}}| = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 = \left|\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d}\right|^2 = |\vec{c}|^2 + \frac{9}{16}|\vec{d}|^2 = \frac{25}{16}$　ゆえに　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \frac{5}{4}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d}\right) = \frac{3}{8}|\vec{d}|^2 = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$

$$\cos\angle\mathrm{LOM} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OL}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5}{4}} = \boldsymbol{\frac{3}{25}\sqrt{5}}$$

このとき　$\sin\angle\mathrm{LOM} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{29}}{5\sqrt{5}}$

よって　$S_1 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OL}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\sin\angle\mathrm{LOM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{5\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{29}}{8}}$

別解 $S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{25}{16} - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{29}}{8}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{LP}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{LP}} = p\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおけるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OL}} + \overrightarrow{\mathrm{LP}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} + p\overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d} + p\left(\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d}\right) \\ &= \vec{a} + p\vec{c} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}p\right)\vec{d}\end{aligned}$$

このとき　$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}p = 1$　よって　$\boldsymbol{p = \frac{2}{3}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c} + \vec{d}}$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ とおけるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + q\overrightarrow{\mathrm{OL}} \\ &= \vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d} + q\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) \\ &= q\vec{a} + \vec{c} + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}q\right)\vec{d}\end{aligned}$$

このとき　$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}q = 1$　よって　$\boldsymbol{q = \frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}}$

別解 $\triangle \mathrm{CMO} \backsim \triangle \mathrm{ELP}$，相似比は $\quad 1 : p = \mathrm{CM} : \mathrm{EL} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{2}$ ゆえに $\quad p = \dfrac{2}{3}$

$\triangle \mathrm{ALO} \backsim \triangle \mathrm{GMQ}$，相似比は $\quad 1 : q = \mathrm{AL} : \mathrm{GM} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{4}$ ゆえに $\quad q = \dfrac{1}{2}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{LP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{2}{3}\left(\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{d}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となる点 N をとると，2 点 P，Q は，それぞれ平行四辺形 OLNM の辺 LN，MN 上にあり

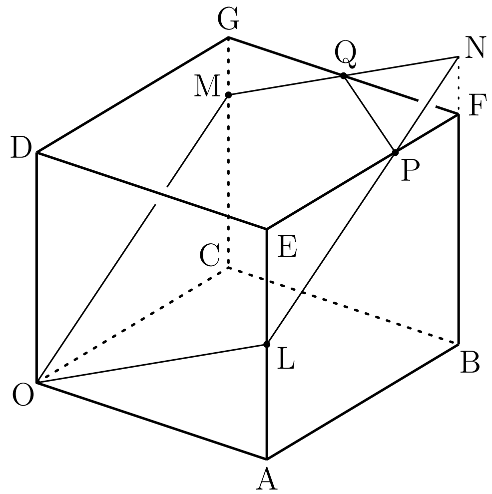
$$\mathrm{LP} : \mathrm{PN} = \mathrm{EP} : \mathrm{PF} = 2 : 1, \quad \mathrm{MQ} : \mathrm{QN} = \mathrm{GQ} : \mathrm{QF} = 1 : 1$$

したがって，△NPQ の面積は，(2) の結果を用いて

$$\triangle \mathrm{NPQ} = \frac{1}{2+1} \cdot \frac{1}{1+1} S_1 = \frac{1}{6} S_1$$

よって，求める五角形 OLPQM の面積 S_2 は

$$S_2 = 2S_1 - \frac{1}{6}S_1 = \frac{11}{6}S_1 = \frac{11}{6} \cdot \frac{\sqrt{29}}{8} = \boldsymbol{\frac{11}{48}\sqrt{29}}$$



(4) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\vec{d} = \frac{1}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d}\right)\cdot\vec{d} = \frac{3}{4}$

H は T 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OL}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} \qquad (*)$$

と表されるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OL}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DH}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DH}} = 0$ であるから，上の諸式と (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OL}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}) \\
&= s|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} \\
&= \frac{5}{4}s + \frac{3}{8}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots ① \\
\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OL}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}) \\
&= s\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} + t|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} \\
&= \frac{3}{8}s + \frac{25}{16}t - \frac{3}{4} = 0 \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

①，② を解いて　$s = \frac{8}{29}$, $t = \frac{12}{29}$　これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{8}{29}\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \frac{12}{29}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{8}{29}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) + \frac{12}{29}\left(\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{8}{29}\vec{a} + \frac{12}{29}\vec{c} + \frac{13}{29}\vec{d}}
\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{8}{29}\vec{a} + \frac{12}{29}\vec{c} + \frac{13}{29}\vec{d} - \vec{d}$

$$= \frac{4}{29}(2\vec{a} + 3\vec{c} - 4\vec{d})$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{DH}}| = \frac{4}{29}\sqrt{4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{c}|^2 + 16|\vec{d}|^2} = \boldsymbol{\frac{4}{29}\sqrt{29}}$

よって　$V = \frac{1}{3}S_2|\overrightarrow{\mathrm{DH}}| = \frac{1}{3}\cdot\frac{11}{48}\sqrt{29}\cdot\frac{4}{29}\sqrt{29} = \boldsymbol{\frac{11}{36}}$

別解 O を原点とする座標空間を考え，その座標を O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，C(0, 1, 0)，D(0, 0, 1) とすると

$$\mathrm{L}\left(1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\quad \mathrm{M}\left(0,\ 1,\ \frac{3}{4}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(-2, -3,\ 4)$$

とする．五角形 OLPQM を xy 平面に正射影した図形の面積を S_2' とすると

$$S_2'=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{12}$$

$\vec{n}$ と xy 平面の法ベクトル $\vec{l}=(0,\ 0,\ 1)$ となす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{l}}{|\vec{n}||\vec{l}|}=\frac{4}{\sqrt{29}}$$

このとき，$S_2'=S_2|\cos\theta|$ であるから　$S_2=\dfrac{11}{12}\cdot\dfrac{\sqrt{29}}{4}=\dfrac{11}{48}\sqrt{29}$

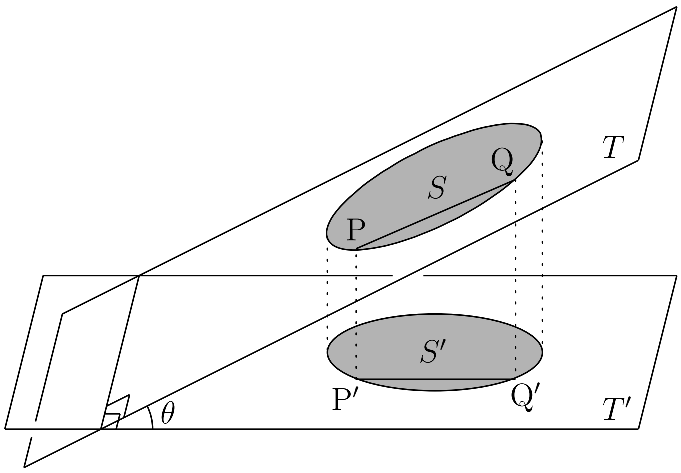
解説 平面 T 上の領域を平面 T' に正射影した領域について，それぞれの領域の面積を S，S' とし，T と T' の法ベクトルがなす角を θ とすると

$$S'=S|\cos\theta|$$

が成立する．T と T' の両方に垂直な面 (直截(せつ)面) とこれらの領域の共通部分 PQ と P′Q′ について

$$\mathrm{P'Q'}=\mathrm{PQ}|\cos\theta|$$

T 上の領域を T' に正射影すると，その領域は $|\cos\theta|$ だけ縮小される．



ベクトル積

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積 (外積)** という．
2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のベクトル積は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であり，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

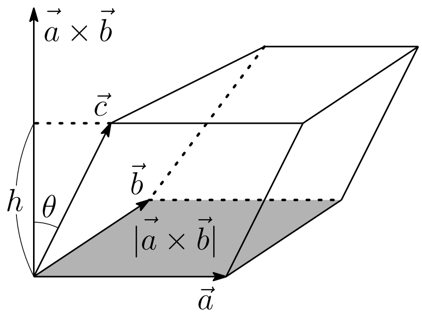
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

両辺の絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

本題において　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\times\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\ 1\right)$，　$(\overrightarrow{\mathrm{OL}}\times\overrightarrow{\mathrm{OM}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=1$

四面体 OLMD の体積は　$\frac{1}{6}\cdot1=\frac{1}{6}$　$S_1:S_2=1:\frac{11}{6}$ より　$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{11}{6}=\frac{11}{36}$

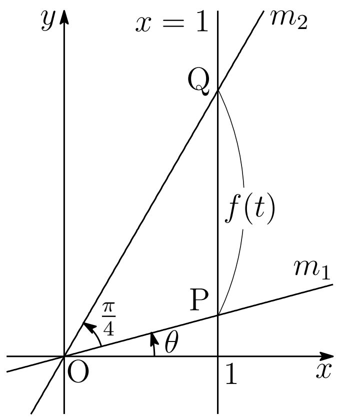
$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $t = \tan\theta$ より　$\boldsymbol{t < 1}$

直線 $m_1 : y = (\tan\theta)x$ と直線 $x = 1$ の交点の座標は

$$\mathrm{P}\,(1,\ \tan\theta)$$

直線 $m_1 : y = \left(\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)x$ と直線 $x = 1$ の交点の座標は

$$\mathrm{Q}\left(1,\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$



線分 PQ の長さ $f(t)$ は，$\tan\theta = t$ より

$$f(t) = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\theta = \frac{\tan\theta + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\theta\tan\frac{\pi}{4}} - \tan\theta$$

$$= \frac{t+1}{1-t} - t = \boldsymbol{\frac{1+t^2}{1-t}}$$

(2) (1) の結果により

$\theta = -\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$t = -1$ のとき　$f(-1) = \dfrac{1 + (-1)^2}{1 - (-1)} = \mathbf{1}$

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \boldsymbol{\dfrac{2(3+\sqrt{3})}{3}}$

(3) $f(t) = \dfrac{1+t^2}{1-t} = \dfrac{2 - (1-t^2)}{1-t} = \dfrac{2}{1-t} - (1+t)$ より

$$f'(t) = \frac{2}{(1-t)^2} - 1 = \frac{2 - (1-t)^2}{(1-t)^2} = \boldsymbol{\frac{(\sqrt{2}+1-t)(\sqrt{2}-1+t)}{(1-t)^2}}$$

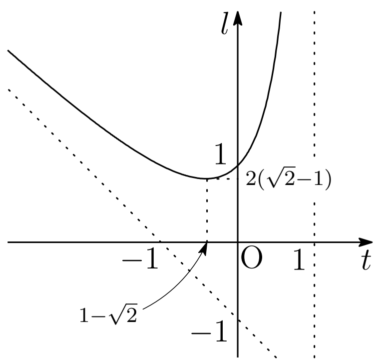
したがって，$f(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\searrow$	$2(\sqrt{2}-1)$	$\nearrow$	

$$\lim_{t\to-\infty}\{f(t) - (-t-1)\} = 0$$
$$\lim_{t\to 1-0} f(t) = \infty$$

漸近線は　$\boldsymbol{l = -t-1,\ t = 1}$

よって，$l = f(t)$ のグラフは，右の図のようになる．



別解 $f(t)=\dfrac{2}{1-t}-(1+t)=(1-t)+\dfrac{2}{1-t}-2$

$t<1$ より，$1-t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$f(t) \geqq 2\sqrt{(1-t)\cdot\frac{2}{1-t}}-2=2(\sqrt{2}-1)$$

上式において，等号が成立するとき，$1-t>0$ に注意して

$$1-t=\frac{2}{1-t} \quad \text{ゆえに} \quad 1-t=\sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad t=1-\sqrt{2}$$

(4) (3) の結果から，$t=1-\sqrt{2}$ のとき，$f(t)$ は最小値 $\mathbf{2(\sqrt{2}-1)}$ をとる．

このとき　$\tan\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=1-\sqrt{2}$ より　$\boldsymbol{\theta=-\dfrac{\pi}{8}}$

したがって　$\mathrm{P}\left(1,\ \tan\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)\right)$，　$\mathrm{Q}\left(1,\ \tan\dfrac{\pi}{8}\right)$

よって　　$\mathbf{P(1,\ 1-\sqrt{2})}$，　$\mathbf{Q(1,\ \sqrt{2}-1)}$

補足 $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$，$\tan\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=1-\sqrt{2}$ の値を知らなくても本題の次の計算から θ を求めることもできる．

$$\tan\theta=t=1-\sqrt{2},$$

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t+1}{1-t}=\frac{(1-\sqrt{2})+1}{1-(1-\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$$

上の第 1 式から $\tan(-\theta)=\sqrt{2}-1$ であるから，これと第 2 式から

$$\tan(-\theta)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$-\dfrac{\pi}{4}<-\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$-\theta=\theta+\frac{\pi}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \theta=-\frac{\pi}{8}, \quad \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

したがって，$\mathrm{P}(1,\ \tan\theta)$，$\mathrm{Q}\left(1,\ \tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ の座標は

$$\mathrm{P}(1,\ 1-\sqrt{2}),\quad \mathrm{Q}(1,\ \sqrt{2}-1)$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $t=\tan\theta$ より

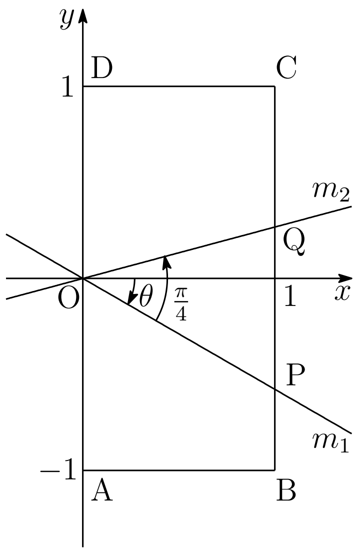
(i) $-\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqq 0$ のとき $(-1<t\leqq 0)$

$$f(t)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\theta$$
$$=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}-\tan\theta=\frac{t+1}{1-t\cdot 1}-t=\boldsymbol{\frac{1+t^2}{1-t}}$$

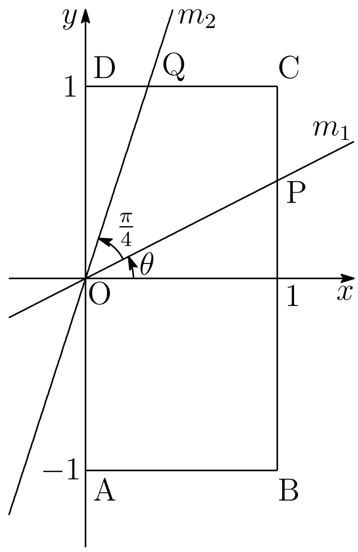
(ii) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき $(0<t<1)$，$\angle\mathrm{QOD}=\dfrac{\pi}{4}-\theta$ により

$$f(t)=\mathrm{CP}+\mathrm{QC}=\mathrm{CP}+\mathrm{CD}-\mathrm{QD}$$
$$=(1-\tan\theta)+1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$
$$=2-\tan\theta-\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$
$$=2-t-\frac{1-t}{1+t}=\boldsymbol{\frac{1+2t-t^2}{1+t}}$$

(i) $-\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqq 0$ のとき



(ii) $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき



(2) $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき，$t=\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ を (ii) の結果に代入すると

$$f(\sqrt{2}-1)=\frac{1+2(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)^2}{1+(\sqrt{2}-1)}=\boldsymbol{4-2\sqrt{2}}$$

補足 $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ は，$t=\tan\frac{\pi}{8}$，$-t=\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ より求まる．

$$t=\tan\frac{\pi}{8}=\tan\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan(-\frac{\pi}{8})+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan(-\frac{\pi}{8})\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-t+1}{1+t}$$

$t>0$ に注意してこれを解くと　$t=\sqrt{2}-1$　ゆえに　$t=\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

(3) (1) の結果から　　$f(0)=1$

［1］$t<0$ のとき，(i) から

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{t}\left(\frac{1+t^2}{1-t}-1\right)=\frac{1+t}{1-t}$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{t\to-0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to-0}\frac{1+t}{1-t}=1$

［2］$t>0$ のとき，(ii) から

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{t}\left(\frac{1+2t-t^2}{1+t}-1\right)=\frac{1-t}{1+t}$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{1-t}{1+t}=1$

［1］,［2］より　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=1$

よって，$f(t)$ は，$t=0$ で微分可能である．

(4) $-1<t\leqq0$ のとき，$f(t)=-t-1+\dfrac{2}{1-t}$ より

$$f'(t)=-1+\frac{2}{(1-t)^2}=\frac{(\sqrt{2}+1-t)(\sqrt{2}-1+t)}{(1-t)^2}$$

$0<t<1$ のとき，$f(t)=-t+3-\dfrac{2}{1+t}$ より

$$f'(t)=-1+\frac{2}{(1+t)^2}=\frac{(\sqrt{2}+1+t)(\sqrt{2}-1-t)}{(1+t)^2}$$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}-2$	$\nearrow$	$4-2\sqrt{2}$	$\searrow$	

$$\lim_{t\to-1+0}f(t)=\lim_{t\to-1+0}\left(-t-1+\frac{2}{1-t}\right)=\mathbf{1}$$

$$\lim_{t\to1-0}f(t)=\lim_{t\to1-0}\left(-t+3-\frac{2}{1+t}\right)=\mathbf{1}$$

よって　$\boldsymbol{t=\sqrt{2}-1}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{8}}$ のとき　最大値 $\mathbf{4-2\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{t=1-\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=-\dfrac{\pi}{8}}$ のとき　最小値 $\mathbf{2\sqrt{2}-2}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $f(x)=e^x\ (x \geqq 0)$，$g(x)=ax^2\ (x \geqq 0)$ より

$$f'(x)=e^x,\quad g'(x)=2ax$$

2 つの曲線 $C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=g(x)$ が $x=p$ で接するとき

$$\begin{cases} f(p)=g(p) \\ f'(p)=g'(p) \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*)\begin{cases} e^p=ap^2 \\ e^p=2ap \end{cases}$$

$(*)$ の 2 式から e^p を消去すると　$ap^2=2ap$　ゆえに　$ap(p-2)=0$

$a>0,\ p>0$ であるから　$\boldsymbol{p=2}$　これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$e^2=4a \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{e^2}{4}}$$

C_1 上の点 $\mathrm{P}(2,\ e^2)$ における接線 l の傾きは e^2 であるから，l の方程式は

$$y-e^2=e^2(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=e^2(x-1)}$$

(2) (1) の結果から　$g(x)=\dfrac{e^2x^2}{4}$

$$\begin{aligned} h(x) &= \log f(x)-\log g(x)=\log e^x-\log\frac{e^2x^2}{4} \\ &= x-2\log x-2+\log 4 \end{aligned}$$

したがって　$h'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

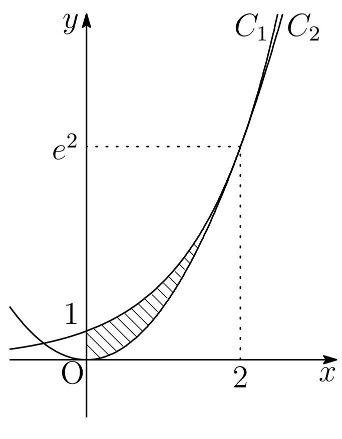
$x>0$ のとき，$h(x) \geqq 0$ であるから

$$\log f(x)-\log g(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) \geqq g(x)$$

また，$f(0)=1$，$g(0)=0$ であるから　$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq g(x)$

(3) 求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{f(x)-g(x)\}\,dx \\ &= \int_0^2 \left(e^x-\frac{e^2x^2}{4}\right)dx \\ &= \left[\ e^x-\frac{e^2x^3}{12}\ \right]_0^2=\boldsymbol{\frac{e^2}{3}-1} \end{aligned}$$



(4) 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^2 x\{f(x)-g(x)\}\,dx \\ &= 2\pi\int_0^2 \left(xe^x - \frac{e^2x^3}{4}\right)dx \\ &= 2\pi\Big[\,(x-1)e^x - \frac{e^2x^4}{16}\,\Big]_0^2 = \boldsymbol{2\pi} \end{aligned}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

補足 2014 年の長崎大の 8 番で類題が出題されている[2].

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $(*)\quad z_{n+1} = \dfrac{z_n-2}{2z_n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について

$z_{n+1}=z_n$ のとき　$z_n = \dfrac{z_n-2}{2z_n-1}$　ゆえに　$z_n{}^2 - z_n + 1 = 0$

これを解いて　$\boldsymbol{z_n = \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

$z_{n+1}=-z_n$ のとき　$-z_n = \dfrac{z_n-2}{2z_n-1}$　ゆえに　$z_n{}^2 = 1$

これを解いて　$\boldsymbol{z_n = \pm 1}$

(2) $|z_n|=1$ と仮定すると，$(*)$ より

$$|z_{n+1}|^2 = \frac{|z_n-2|^2}{|2z_n-1|^2} = \frac{|z_n|^2 - 2(z_n+\overline{z_n})+4}{4|z_n|^2 - 2(z_n+\overline{z_n})+1} = \frac{5-2(z_n+\overline{z_n})}{5-2(z_n+\overline{z_n})} = 1$$

したがって　$|z_{n+1}|=1$

$|z_1|=1$ であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n について

$$|z_n| = 1$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2014.pdf $\boxed{8}$ を参照

(3) $(*)$ より
$$z_{n+2}=\frac{z_{n+1}-2}{2z_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{z_n-2}{2z_n-1}-2}{2\cdot\dfrac{z_n-2}{2z_n-1}-1}$$
$$=\frac{z_n-2-2(2z_n-1)}{2(z_n-2)-(2z_n-1)}=\frac{-3z_n}{-3}=\boldsymbol{z_n}$$

したがって　$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}=|z_{n+2}-z_{n+1}|=|z_n-z_{n+1}|=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$

よって，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さはすべての n に対して一定である．

(4) $(*)$ および (2) の結果により
$$z_{n+1}=\frac{(z_n-2)(2\overline{z_n}-1)}{(2z_n-1)(2\overline{z_n}-1)}$$
$$=\frac{2|z_n|^2-z_n-4\overline{z_n}+2}{|2z_n-1|^2}=\frac{-z_n-4\overline{z_n}+4}{|2z_n-1|^2}$$

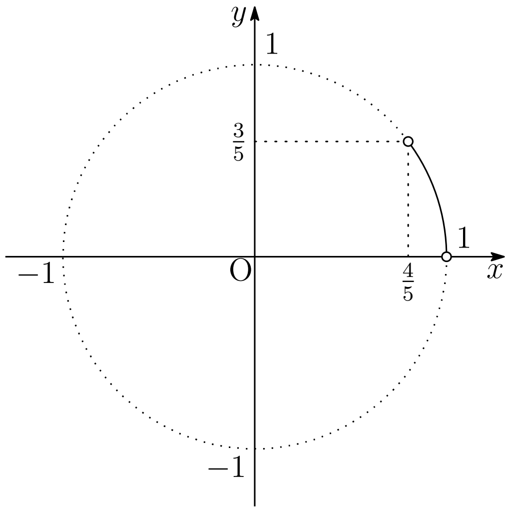
$z_n=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) であるから
$$-z_n-4\overline{z_n}+4=-(x+yi)-4(x-yi)+4$$
$$=(4-5x)+3yi \qquad (**)$$

$z_{n+1}=X+Yi$ ($X,\ Y$ は実数) について，$X<0$ かつ $Y>0$ より
$$4-5x<0 \quad \text{かつ} \quad 3y>0$$

$|z_n|^2=1$ であるから　$x^2+y^2=1$

したがって　$\begin{cases} x>\dfrac{4}{5} \\ y>0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

よって，点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ の存在する範囲は，右の図の実線部分である．ただし，端点は含まない．



9 (1) $\boxed{8}$ (2) を参照

(2) $\boxed{8}$ (3) を参照

(3) $\boxed{8}$ (4) を参照

(4) $z_{n+1}=\dfrac{-z_n-4\overline{z_n}+4}{|2z_n-1|^2}$ および $|z_n|=1$ より

$$\begin{aligned}\frac{z_{n+1}}{z_n}&=\frac{-z_n-4\overline{z_n}+4}{z_n|2z_n-1|^2}=\frac{\overline{z_n}(-z_n-4\overline{z_n}+4)}{|z_n|^2|2z_n-1|^2}\\&=\frac{-4(\overline{z_n})^2+4\overline{z_n}-1}{|2z_n-1|^2}\end{aligned}$$

$|z_n|=|z_{n+1}|$ であるから，$\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角三角形であるとき，$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ が直角，すなわち，$\dfrac{z_{n+1}}{z_n}$ が純虚数である．すべての n について $z_{n+2}=z_n$ であるから，$\dfrac{z_2}{z_1}$ が純虚数であればよい．$z_1=a+bi$ より

$$\begin{aligned}-4(\overline{z_1})^2+4\overline{z_1}-1&=-4(a-bi)^2+4(a-bi)-1\\&=-4(a^2-b^2-2abi)+4(a-bi)-1\\&=(-4a^2+4b^2+4a-1)+4(2a-1)bi\end{aligned}$$

上式が純虚数であることと，$|z_1|^2=1$ より $(a>0,\ b>0)$

$$\begin{cases}-4a^2+4b^2+4a-1=0 & \cdots ①\\ a^2+b^2=1 & \cdots ②\end{cases}$$

①，② から b^2 を消去して整理すると　$8a^2-4a-3=0$

$a>0$ に注意して解くと　$\boldsymbol{a=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}}$

これを ② に代入して整理すると　$b^2=\dfrac{8-2\sqrt{7}}{16}$

$b>0$ であるから　$\boldsymbol{b=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}}$

別解 $(**)$ から y と Y の符号が一致し，$\dfrac{|z_2|}{|z_1|}=1$，$\dfrac{z_2}{z_1}$ が純虚数であるから

$x>0,\ y>0$ に注意して　$\dfrac{z_2}{z_1}=i$　ゆえに　$\dfrac{z_1-2}{2z_1-1}=iz_1$

整理すると　${z_1}^2-\dfrac{1-i}{2}z_1-i=0$　ゆえに　$\left(z_1-\dfrac{1-i}{4}\right)^2=\dfrac{7}{16}(1+i)^2$

したがって　$z_1=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{4}+\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{4}i$　(複号同順)

$\mathrm{Re}(z_1)>0$，$\mathrm{Im}(z_1)>0$ であるから　$z_1=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}+\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}i$

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 回転体 T_1 を平面 $y=t$ で切った断面積 $S_1(t)$ について次の場合分けを行う．

(i) $0 \leqq t \leqq 3\cos\theta$ のとき，$S_1(t)$ は半径 $t\tan\theta$ の円の面積であるから

$$S_1(t) = \pi(t\tan\theta)^2 = \pi t^2\tan^2\theta$$

(ii) $3\cos\theta \leqq t \leqq 3$ のとき，$S_1(t)$ は半径 $\sqrt{9^2-t^2}$ の円の面積であるから

$$S_1(t) = \pi(\sqrt{9-t^2})^2 = \pi(9-t^2)$$

(i)，(ii) から $\quad \boldsymbol{S_1(t) = \begin{cases} \pi t^2\tan^2\theta & (0 \leqq t \leqq 3\cos\theta) \\ \pi(9-t^2) & (3\cos\theta \leqq t \leqq 3) \end{cases}}$

図 1

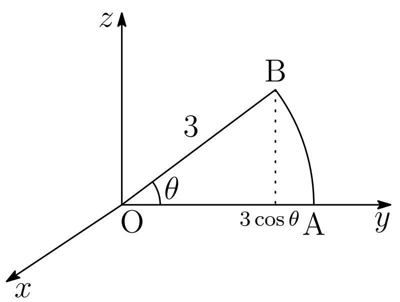
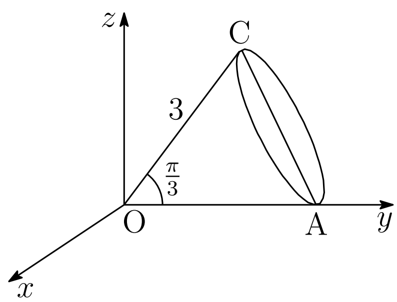


図 2



(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^3 S_1(t)\,dt = \pi\int_0^{3\cos\theta} t^2\tan^2\theta\,dt + \pi\int_{3\cos\theta}^3 (9-t^2)\,dt \\ &= \pi\left[\frac{t^3\tan^2\theta}{3}\right]_0^{3\cos\theta} + \pi\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_{3\cos\theta}^3 \\ &= 9\pi\sin^2\theta\cos\theta + \pi(18 - 27\cos\theta + 9\cos^3\theta) \\ &= \boldsymbol{18\pi(1-\cos\theta)} \end{aligned}$$

別解 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を O を極とする極方程式を用いて求めると [3]

$$V_1 = \frac{2\pi}{3}\int_0^\theta 3^3\sin\varphi\,d\varphi = 18\pi\Big[-\cos\varphi\Big]_0^\theta = \boldsymbol{18\pi(1-\cos\theta)}$$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_bun_2016.pdf (p.12 を参照)

(3) 回転体 T_2 を平面 $y=t$ で切った断面積 $S_2(t)$ について次の場合分けを行う．

(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$S_2(t)$ は半径 $\sqrt{3}t$ の円の面積であるから

$$S_2(t) = \pi(\sqrt{3}t)^2 = 3\pi t^2$$

(ii) $\dfrac{3}{2} \leqq t \leqq 3$ のとき，円錐の底面を xy 平面に正射影した図形は楕円

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{\left(y-\frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

yz 平面上の直線 AC は $\dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{3\sqrt{3}} = 1$

$y=t$ を上の 2 式にそれぞれ代入して整理すると

$$x^2 = -4t^2 + 18t - 18, \quad z = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}t$$

このとき，$S_2(t)$ の面積は

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \pi(x^2 + z^2) \\ &= \pi\{(-4t^2 + 18t - 18) + (3\sqrt{3} - \sqrt{3}t)^2\} = \pi(9 - t^2) \end{aligned}$$

(i)，(ii) から $\quad \boldsymbol{S_2(t) = \begin{cases} 3\pi t^2 & \left(0 \leqq t \leqq \frac{3}{2}\right) \\ \pi(9 - t^2) & \left(\frac{3}{2} \leqq t \leqq 3\right) \end{cases}}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^3 S_2(t)\,dt = \pi\int_0^{\frac{3}{2}} 3t^2\,dt + \pi\int_{\frac{3}{2}}^{2} (9 - t^2)\,dt \\ &= \pi\Big[\,t^3\,\Big]_0^{\frac{3}{2}} + \pi\Big[\,9t - \frac{t^3}{3}\,\Big]_{\frac{3}{2}}^{3} = \boldsymbol{9\pi} \end{aligned}$$

別解 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ を O を極とする極方程式を用いて求めると

$$V_2 = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3^3 \sin\varphi\,d\varphi = 18\pi\Big[-\cos\varphi\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{9\pi}$$

(5) (2)，(4) の結果から $\quad V_2 - V_1 = 18\pi\left(\cos\theta - \cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって $\quad \boldsymbol{0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{V_2 > V_1}$，$\quad \boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{V_1 = V_2}$，

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{V_1 > V_2}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) X_4 の確率分布は

X_4	-4	-2	0	2	4	計
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

X_4 の平均は　$E(X_4) = -4\cdot\dfrac{1}{16} + (-2)\cdot\dfrac{4}{16} + 0\cdot\dfrac{6}{16} + 2\cdot\dfrac{4}{16} + 4\cdot\dfrac{1}{16} = \mathbf{0}$

$E({X_4}^2) = (-4)^2\cdot\dfrac{1}{16} + (-2)^2\cdot\dfrac{4}{16} + 0^2\cdot\dfrac{6}{16} + 2^2\cdot\dfrac{4}{16} + 4^2\cdot\dfrac{1}{16} = 4$

X_4 の分散は　$V(X_4) = E({X_4}^2) - E(X_4)^2 = 4 - 0^2 = \mathbf{4}$

X_5 の確率分布は

X_5	-5	-3	-1	1	3	5	計
確率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

X_5 の平均は

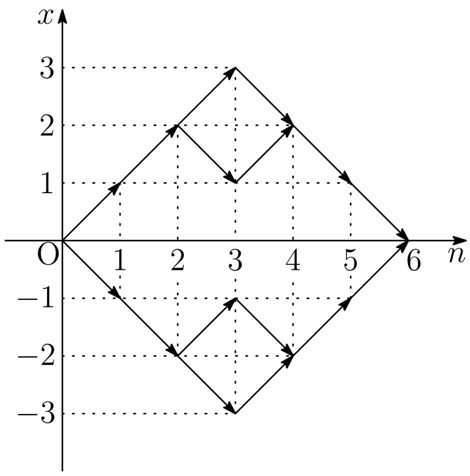
$$E(X_5) = -5\cdot\frac{1}{32} + (-3)\cdot\frac{5}{32} + (-1)\cdot\frac{10}{32} + 1\cdot\frac{10}{32} + 3\cdot\frac{5}{32} + 5\cdot\frac{1}{32} = \mathbf{0}$$

$E({X_5}^2) = (-5)^2\cdot\dfrac{1}{32} + (-3)^2\cdot\dfrac{5}{32} + (-1)^2\cdot\dfrac{10}{32} + 1^2\cdot\dfrac{10}{32} + 3^2\cdot\dfrac{5}{32} + 5^2\cdot\dfrac{1}{32} = 5$

X_5 の分散は　$V(X_5) = E({X_5}^2) - E(X_5)^2 = 5 - 0^2 = \mathbf{5}$

(2) 6回目で初めて原点に戻るとき，その推移をグラフに示すと，4通りある．よって，求める確率は

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \mathbf{\frac{1}{16}}$$



(3) X_1 の平均は　$E(X_1) = -1\cdot(1-p) + 1\cdot p = \boldsymbol{2p-1}$

$E({X_1}^2) = (-1)^2\cdot(1-p) + 1^2\cdot p = 1$

X_1 の分散は　$V(X_1) = E({X_1}^2) - E(X_1)^2 = 1 - (2p-1)^2 = \boldsymbol{4p(1-p)}$

$E(X_n) = E(X_{n-1} + X_1)$, $V(X_n) = V(X_{n-1} + X_1)$ で，X_{n-1} と X_1 は独立であるから

$$E(X_n) = nE(X_1) = \boldsymbol{n(2p-1)}$$
$$V(X_n) = nV(X_1) = \boldsymbol{4np(1-p)}$$

(4) 100 回のうち表が x 回出たとすると，裏が $100 - x$ 回であるから

$$x\cdot 1 + (100 - x)\cdot(-1) = 28 \quad \text{これを解いて} \quad x = 64$$

標本の大きさ $n = 100$，標本比率 $R = \dfrac{64}{100}$ とすると，p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\ R - 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\ R + 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\ \right]$$

ゆえに　$\left[\ 0.64 - 1.96\cdot\dfrac{48}{1000},\ 0.64 + 1.96\cdot\dfrac{48}{1000}\ \right]$

よって　$[\ \mathbf{0.54592,\ 0.73408}\ ]$