令和２年度　長崎大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部　令和２年３月12日

1 (1) 次の連立不等式を解け．

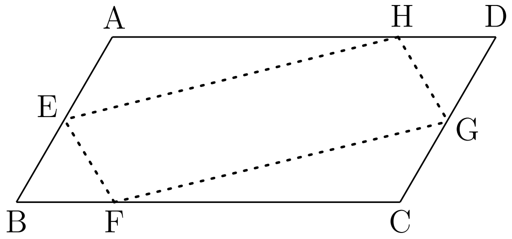
$$\begin{cases} |x-2|>1 \\ x^2-3x-4 \leqq 0 \end{cases}$$

(2) 当たりが 2 本，はずれが 4 本の合計 6 本からなるくじがある．A，B，C の 3 人がこの順番にくじを 1 本ずつ引き，さらに同じ順番でもう 1 本ずつくじを引く．ただし，1 度引いたくじはもとに戻さない．以下の問いに答えよ．

(i) 一巡目に B が当たりのくじを引く確率を求めよ．

(ii) 一巡目にだれも当たりのくじを引かず，2 巡目に B が当たりのくじを引く確率を求めよ．

(3) 図のように，∠ABC が 60°，底辺 BC の長さが 10cm，斜辺 CD の長さが 6cm の平行四辺形 ABCD に，それより小さい平行四辺形 EFGH を内接させる．ただし，AE = BF = CG = DH である．平行四辺形 EFGH の面積の最小値を求めよ．



図

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 関数 $y = \sin x + \cos x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ において，以下の問いに答えよ．

(i) y の最大値とそのときの x の値を求めよ．

(ii) y の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(iii) $y = 0$ となる x の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-1|\,dx$ の値を求めよ．

(3) 方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ が表す楕円に内接する長方形がある．第一象限にある頂点の座標を $(p,\ q)$ とし，長方形を S とする．ただし，長方形の辺は，座標軸に平行である．以下の問いに答えよ．

(i) この方程式で定められる関数 y が正の範囲にあるときの導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(ii) S を p の関数で表わせ．

(iii) S の導関数 $\dfrac{dS}{dp}$ を求めよ．

(iv) S の最大値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 第1式から

$$x-2<-1,\ 1<x-2 \quad \text{ゆえに} \quad x<1,\ 3<x \quad \cdots ①$$

第2式から　$(x+1)(x-4) \leqq 0$　ゆえに　$-1 \leqq x \leqq 4$　$\cdots$②

①，② の共通範囲により　$\boldsymbol{-1 \leqq x < 1,\ 3 < x \leqq 4}$

(2) (i) 1巡目にAが当たりくじを引く確率と等しいから　$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(ii) 取り出した順に当たり (○)，はずれ (×) を並べると，次の場合がある．

××××○○×　××××○○

よって，求める確率は　$\dfrac{2\cdot 4!\cdot 2!}{6!} = \boldsymbol{\dfrac{2}{15}}$

別解 取り出すそれぞれの確率により

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{2}{15}}$$

(3) $\mathrm{AE} = \mathrm{BF} = \mathrm{CG} = \mathrm{DH} = x$ とおくと

$$\triangle\mathrm{AEH} = \triangle\mathrm{CGF} = \frac{1}{2}x(10-x)\sin 60^\circ,$$
$$\triangle\mathrm{BEF} = \triangle\mathrm{DGH} = \frac{1}{2}x(6-x)\sin 60^\circ$$

平行四辺形ABCDの面積が $6\cdot 10\sin 60^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\text{平行四辺形EFGH} &= 6\cdot 10\sin 60^\circ \\ &\quad - 2\cdot\frac{1}{2}x(10-x)\sin 60^\circ - 2\cdot\frac{1}{2}x(6-x)\sin 60^\circ \\ &= \sqrt{3}(x^2-8x+30) \\ &= \sqrt{3}\{(x-4)^2+14\}\end{aligned}$$

よって　最小値 $\boldsymbol{14\sqrt{3}}$ [cm^2]

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

(i) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(ii) $\boldsymbol{x = \frac{5\pi}{4}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

(iii) $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-1|\,dx = -\int_{-1}^{1}(x-1)\,dx + \int_{1}^{3}(x-1)\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ (x-1)^2\ \Big]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\Big[\ (x-1)^2\ \Big]_{1}^{3} = \mathbf{4}$$

(3) (i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ より $(y > 0)$ $\quad y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

よって $\quad \boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}}$

(ii) 点 $(p,\ q)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点であるから

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - p^2\right)$$

$q > 0$ であるから $\quad q = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - p^2}$

$$S = 2p{\cdot}2q = 4pq = 4p{\cdot}\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - p^2} = \boldsymbol{\frac{4bp}{a}\sqrt{a^2 - p^2}}$$

(iii) (ii) の結果から

$$\frac{dS}{dp} = \frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2 - p^2} + p{\cdot}\frac{-p}{\sqrt{a^2 - p^2}}\right) = \boldsymbol{\frac{4b(a^2 - 2p^2)}{a\sqrt{a^2 - p^2}}}$$

(iv) (iii) の結果から

p	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(a)
$\frac{dS}{dp}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって $\quad p = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{2ab}$