令和２年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和 2 年 2 月 25 日

- 教育 A・経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 情報データ科学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 必答, $\boxed{5}$, $\boxed{9}$ の 2 題から 1 題選択
  数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) ともに零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$ であり，$3\vec{a} - 2\vec{b}$ と $15\vec{a} + 4\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ．

(2) $a = 4^{50}$，$b = 6^{40}$，$c = 15^{25}$ の常用対数の値を求めよ．また，a，b，c の大小を不等式で表せ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(3) $x = t + \dfrac{1}{t}$ とする．$t > 0$ のとき，$x \geqq 2$ であることを示せ．また，関数

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2a\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (t > 0)$$

の最小値と，そのときの x の値を求めよ．ただし，a は定数とする．

(4) $f(n) = (n-1)n(n+1)$，$g(n) = n^5 - n$ とする．このとき，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は 6 の倍数，$g(n)$ は 30 の倍数であることをそれぞれ証明せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ xy平面上に直線$\ell : y = x-1$と放物線$C : y = x^2$がある．直線ℓ上の点$\mathrm{P}(t, t-1)$から放物線Cに2本の接線m_1とm_2を引き，接点をそれぞれ$\mathrm{Q}_1(s_1,\ {s_1}^2)$と$\mathrm{Q}_2(s_2,\ {s_2}^2)$とする．ただし，$s_1 < s_2$である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 2つの接点のうち，1つを点$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$とする．$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$における接線の式をsを用いて表せ．また，この接線が点$\mathrm{P}(t,\ t-1)$を通ることから，sの2次方程式を作り，和$s_1 + s_2$および積$s_1 s_2$の値を，それぞれtを用いて表せ．

(2) 直線$\mathrm{Q_1Q_2}$の式をtを用いて表せ．

(3) 直線$\mathrm{Q_1Q_2}$はtの値にかかわらず定点Nを通る．Nの座標を求めよ．また，この点Nが線分$\mathrm{Q_1Q_2}$の中点Mと一致するときのtの値を求めよ．

(4) 直線$\mathrm{Q_1Q_2}$と放物線Cとで囲まれる図形の面積Sとするとき，Sをtを用いて表せ．また，Sを最小にする点Pの座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$で定義された関数$f(x) = 3\sin x \sin 2x + \cos 3x$がある．$f(x)$を$\cos x$の式で表し，$f(x)$の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの$x$の値を求めよ．

(2) 不等式$\dfrac{2}{3} + \log_8(2x^2 - x + 1) \leqq \log_2(x+1)$を解け．

(3) 0でなく，かつ1でもない複素数zに対して，複素数平面上に3点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$，$\mathrm{R}(1)$をとる．点Rが線分PQを$t : (1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$の比に分けるとき，zは実数ではないことを示せ．

(4) $\alpha = 1 + \sqrt{2}$，$\beta = 1 - \sqrt{2}$に対して，$P_n = \alpha^n + \beta^n$とする．このとき，P_1およびP_2の値を求めよ．また，すべての自然数nに対して，P_nは4の倍数ではない偶数であることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ 平面上に $\triangle$ABC がある．点 O を $\triangle$ABC の外心とし，外接円の半径を R とする．また，点 H は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を満たす点とする．

ただし，点 H は 3 点 A，B，C と異なる点であるとする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，AH$\perp$BC，CH$\perp$AB であることを示せ．

(2) 線分 OH の中点を P とし，$\triangle$ABC の各辺 AB，BC，CA の中点を，それぞれ L，M，N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，P は $\triangle$LMN の外心になることを示せ．

(3) 線分 AH の中点を D とするとき，P は線分 DM の中点になることを示せ．

(4) 頂点 A から直線 BC に垂線を下ろし，直線 BC との交点を E とするとき，E は $\triangle$LMN の外接円の周上にあることを示せ．

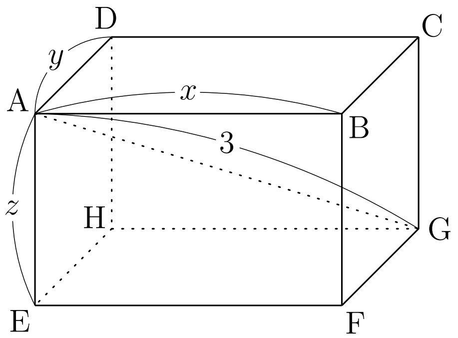
$\boxed{\textbf{5}}$ 下図のように，AB $=x$，AD $=y$，AE $=z$ である直方体 ABCD $-$ EFGH が空間内にある．直方体の対角線 AG の長さを 3，表面積 S を 16 とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x+y+z$ の値を求めよ．

(2) $y+z$ と yz を x の式で表し，x を用いて y，z を解とする t の 2 次方程式を作れ．

(3) x の値の取り得る範囲を求めよ．

(4) この直方体の体積を V とするとき，V の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．



6 自然数 n に対して，

$$a_n = \int_1^e x^2(\log x)^n\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) a_1 の値を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，これを利用して，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ．

(3) $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = x(\log x - 1)^2$ の増減およびグラフの凹凸を調べ，極値と変曲点を求めよ．

(4) (3) の関数 $f(x)$ について，$x \geqq 1$ における曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた図形を F とする．このとき，F を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を a_1，a_2，a_3，a_4 を用いて表し，その値を求めよ．

7 各自然数 n に対して，平面上の 2 つの曲線

$$C_n : y = a_n \sin 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$
$$D_n : y = a_{n+1} \cos x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．ただし，$\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_n \geqq a_{n+1} > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす x によらない数列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_n，D_n の 2 つの交点のうち，x 軸上にない交点の x 座標を p_n とする．このとき，$\sin p_n$ を a_n，a_{n+1} を用いて表し，$0 < p_n \leqq \dfrac{\pi}{6}$ であることを示せ．

(2) 曲線 C_n と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とするとき，S_n を a_n を用いて表せ．また，$x \geqq p_n$ において，曲線 C_n と D_n とで囲まれる図形の面積を T_n とするとき，T_n を a_n，a_{n+1} を用いて表せ．

(3) すべての自然数 n に対して $T_n = r^2 S_n$ (r は正の定数) が成り立つとき，一般項 a_n を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ が収束するような r の値の範囲をを求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ が収束するような r の値の範囲を求めよ．また，そのときの和を求めよ．

$\boxed{8}$ 長さが a のひもを使って，周の長さが a の正三角形，正方形，正五角形，正六角形，$\cdots$ と順次，正多角形を作ることとする．頂点が n 個の正 n 角形 F_n (n は 3 以上の整数) の面積を S_n，F_n の外接円の半径を r_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) S_3 と S_4 をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) r_n および S_n をそれぞれ a，n を用いて表せ．

(3) $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ の増減を調べよ．

(4) (3) を利用して，3 以上の整数 n に対して，$S_n < S_{n+1}$ であることを示せ．また，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．さらに，この極限値が図形的にどのような意味を表しているか，簡単に説明せよ．

$\boxed{9}$ A 市の有権者のうち，ある政策に対する賛成者の母比率を p ($0 < p < 1$) とする．A 市の有権者 100 人を無作為に選んだときの，この政策に対する賛成者数を確率変数 X として，$X = k$ のときの確率を $P(X = k)$ ($k = 0, 1, 2, \cdots, 100$) とする．以下の問いに答えよ．なお，必要に応じて次頁の正規分布表を用いてもよい．

(1) $P(X = k)$ を p，k を用いて表せ．

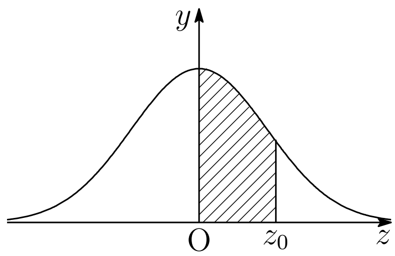
(2) 「100 人中 1 人だけが賛成者」ではない確率が,「100 人中 2 人だけが賛成者」ではない確率よりも大きくなるとき，p の値の範囲を求めよ．

(3) $X = 80$ のとき，p に対する信頼度 95%の信頼区間を求めよ．

(4) $P(X = k)$ の自然対数 $\log P(X = k)$ を最大にする p を求めよ．ただし，$k = 1, 2, \cdots, 99$ とする．

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $3\vec{a}-2\vec{b}$ と $15\vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるから

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(15\vec{a}+4\vec{b})=0 \quad ゆえに \quad 45|\vec{a}|^2-18\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{b}|=3|\vec{a}|$ であるから

$$45|\vec{a}|^2-18\vec{a}\cdot\vec{b}-8(3|\vec{a}|)^2=0 \quad 整理すると \quad 3|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$3|\vec{a}|^2=|\vec{a}||\vec{b}|$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ は

$$|\vec{a}||\vec{b}|+2\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad ゆえに \quad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{1}{2} \quad よって \quad \boldsymbol{\theta=\frac{2\pi}{3}}$$

(2) $a=4^{50}$，$b=6^{40}$，$c=15^{25}$ より

$$\begin{aligned}
\log_{10}a&=\log_{10}4^{50}=50\log_{10}4=100\log_{10}2\\
&=100\times0.3010=\mathbf{30.10},\\
\log_{10}b&=\log_{10}6^{40}=40\log_{10}6=40(\log_{10}2+\log_{10}3)\\
&=40\times(0.3010+0.4771)=\mathbf{31.124}\\
\log_{10}c&=\log_{10}15^{25}=25\log_{10}15=25(\log_{10}10+\log_{10}3-\log_{10}2)\\
&=25\times(1+0.4771-0.3010)=\mathbf{29.4025}
\end{aligned}$$

したがって　$\log_{10}c<\log_{10}a<\log_{10}b$

底 10 は 1 より大きいから　$\boldsymbol{c<a<b}$

(3) $t>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x=t+\frac{1}{t}\geqq2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}\geqq2$$

$t^2+\dfrac{1}{t^2}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2$ より

$$y=x^2-2-2ax=(x-a)^2-a^2-2$$

(i) $a\leqq2$ のとき，$\boldsymbol{x=2}$ で最小値 $\boldsymbol{2-4a}$

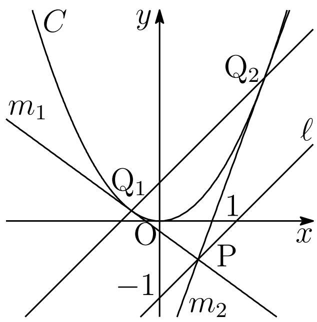
(ii) $2<a$ のとき，$\boldsymbol{x=a}$ で最小値 $\boldsymbol{-a^2-2}$

(4) $f(n)=(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積であるから，$f(n)$ は $3!=6$ の倍数である．

$$\begin{aligned}g(n)&=n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2+1)(n^2-1)\\&=n\{(n^2-4)+5\}(n+1)(n-1)\\&=n(n^2-4)(n+1)(n-1)+5(n-1)n(n+1)\\&=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5f(n)\end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は連続する 5 整数の積で $5!=120$ の倍数である．また，$5f(n)$ は $5{\cdot}6=30$ の倍数である．したがって，$g(n)$ は 30 の倍数である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C: y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$



C 上の点 $\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ における接線の方程式は

$y-s^2=2s(x-s)$　すなわち　$\boldsymbol{y=2sx-s^2}$

この接線が点 $\mathrm{P}(t,\ t-1)$ を通るから

$t-1=2st-s^2$　ゆえに　$s^2-2ts+t-1=0$

上の第 2 式の s に関する 2 次方程式の解が $s_1,\ s_2$ であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{s_1+s_2=2t,\quad s_1s_2=t-1}$$

(2) C 上の 2 点 $\mathrm{Q}_1(s_1,\ {s_1}^2)$，$\mathrm{Q}_2(s_2,\ {s_2}^2)$ を通る直線の方程式は

$$y-s_1=\frac{{s_2}^2-{s_1}^2}{s_2-s_1}(x-s_1)\quad ゆえに\quad y=(s_1+s_2)x-s_1s_2\quad\cdots①$$

これに (1) の結果を代入すると　　$\boldsymbol{y=2tx-t+1}$

(3) (2) の結果を t について整理すると　$(2x-1)t+1-y=0$

t に関する恒等式 (t の値に関係なく成立する) であるから

$$2x-1=0,\ \ 1-y=0\quad よって\quad \mathbf{N}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ 1}\right)$$

$\mathrm{Q}_1(s_1,\ s_1{}^2)$，$\mathrm{Q}_2(s_2,\ s_2{}^2)$ の中点 M は $\left(\dfrac{s_1+s_2}{2},\ \dfrac{s_1{}^2+s_2{}^2}{2}\right)$

ここで
$$\begin{aligned} s_1{}^2+s_2{}^2 &= (s_1+s_2)^2-2s_1s_2 \\ &= (2t)^2-2(t-1)=4t^2-2t+2 \end{aligned}$$

これと (1) の結果から，線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の中点 M の座標は $(t,\ 2t^2-t+1)$

M と N が一致するとき $t=\dfrac{1}{2},\quad 2t^2-t+1=1$

上の第 1 式が第 2 式を満たすことに注意して $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$

(4) 面積 S は，① および C の方程式から，

$$\begin{aligned} S &= \int_{s_1}^{s_2}\{(s_1+s_2)x-s_1s_2-x^2\}\,dx \\ &= -\int_{s_1}^{s_2}(x-s_1)(x-s_2)\,dx=\frac{1}{6}(s_2-s_1)^3 \end{aligned}$$

ここで
$$\begin{aligned} (s_2-s_1)^2 &= (s_1+s_2)^2-4s_1s_2 \\ &= (2t)^2-4(t-1)=4(t^2-t+1) \end{aligned}$$

$s_1<s_2$ より，$s_2-s_1=2(t^2-t+1)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$S=\frac{1}{6}\{2(t^2-t+1)^{\frac{1}{2}}\}^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}(t^2-t+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より，S は $t=\dfrac{1}{2}$ で最小となる．

よって，求める点 P の座標は $\mathbf{P}\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)}$

補足 $S=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{PQ_1Q_2}$ を利用してもよい[1]．

直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 : y=2tx-t+1$ 上に点 $\mathrm{R}(t,\ 2t^2-t+1)$ をとると

$$\begin{aligned} \mathrm{PR} &= (2t^2-t+1)-(t-1)=2(t^2-t+1) \\ \triangle\mathrm{PQ_1Q_2} &= \frac{1}{2}(s_2-s_1)\cdot\mathrm{PR} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t^2-t+1}\cdot 2(t^2-t+1) \\ &= 2(t^2-t+1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=3\sin x\sin 2x+\cos 3x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin x\sin 2x+\cos 3x \\ &= 3\sin x\cdot 2\sin x\cos x+(4\cos^3 x-3\sin x) \\ &= 6(1-\cos^2 x)\cos x+4\cos^3 x-3\cos x \\ &= \boldsymbol{-2\cos^3 x+3\cos x} \end{aligned}$$

$t=\cos x$ とおき，$g(t)=-2t^3+3t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ とすると

$$g'(t)=-6t^2+3=-6\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

よって　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\pi}{4}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{3\pi}{4}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{2}{3}+\log_8(2x^2-x+1) \leqq \log_2(x+1)$ の真数について

$$2x^2-x+1>0,\quad x+1>0 \quad \text{すなわち} \quad x>-1$$

与えられた不等式から

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}+\frac{\log_2(2x^2-x+1)}{\log_2 8} &\leqq \log_2(x+1) \\ 2+\log_2(2x^2-x+1) &\leqq 3\log_2(x+1) \\ \log_2 4(2x^2-x+1) &\leqq \log_2(x+1)^3 \end{aligned}$$

底 2 は 1 より大きいから

$$4(2x^2-x+1) \leqq (x+1)^3 \quad \text{整理すると} \quad x^3-5x^2+7x-3 \geqq 0$$

したがって　$(x-1)^2(x-3) \geqq 0$　よって　$\boldsymbol{x=1,\ 3 \leqq x}$

(3) 3 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$，$\mathrm{R}(1)$ について，線分 PQ を $t:1-t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ の比に内分する点が R であるから

$$\frac{1-t}{z}+\frac{t}{1-z}=1 \quad \text{ゆえに} \quad (1-t)(1-z)+tz=z(1-z)$$

第 2 式を z について整理すると　$z^2+2(t-1)z+1-t=0$

これを解くと　　$z=1-t\pm\sqrt{t(t-1)}$

$t=0$ のとき $z=1$，$t=1$ のとき $z=0$ となり，z の条件に反する．

$0<t<1$ であるから，$t(t-1)<0$ より，z は実数ではない．

(4) $\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=1-\sqrt{2}$ より　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-1$

$P_n=\alpha^n+\beta^n$ より

$$P_1=\mathbf{2},\quad P_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot(-1)=\mathbf{6}$$

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ であるから

$$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$$

$P_n\equiv P_{n+1}\equiv 2 \pmod 4$ であると仮定すると (n は自然数)

$$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n\equiv 2\cdot 2+2\equiv 2 \pmod 4$$

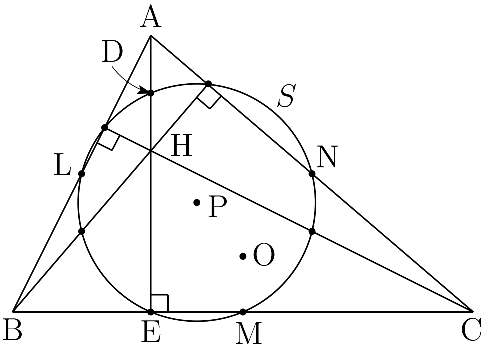
$P_1\equiv P_2\equiv 2 \pmod 4$ であるから，すべての自然数 n について

$$P_n\equiv 2 \pmod 4$$

よって，P_n は 4 の倍数ではない偶数である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{c}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{c}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$$

上式および $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=R^2-R^2=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=R^2-R^2=0$$

よって　$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{CH}\perp\mathrm{AB}$

補足 同様の計算により，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となる．これと (1) の結果より，H が △ABC の垂心であることがわかる．また，△ABC の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

△ABC の重心 G は外心 O と垂心 H を 1 : 2 に内分する点である．3 点 O，G，H は同一直線 (オイラー線) 上にある．

(2) L，M，N は AB，BC，CA の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$$

点 P は OH の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$\overrightarrow{\mathrm{PL}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{c}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{b}}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PL}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|=\dfrac{1}{2}R$ である．

よって，点 P は △LMN の外心である．

(3) 点 D は線分 AH の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

線分 DM の中点は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

よって，P は線分 DM の中点である．

(4) △LMN の外接円を S とすると，(3) の結果から，DM は S の直径である．∠DEM は直角であるから，E は外接円 S 上の点である．

補足 E と同様に，頂点 B から直線 CA に垂直に引いた直線と CA との交点，頂点 C から直線 AB に垂直に引いた直線と AB との交点も S 上にある．また，D と同様に，線分 BH の中点，線分 CH の中点も S 上にある．これら 9 点が S 上にあるから，九点円 (オイラー円) と呼ばれている．S の中心 P もオイラー線上にある．△ABC の外心 O，重心 G，垂心 H を含めて次の比に内分される．

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GP} : \mathrm{PH} = 2 : 1 : 3$$

S の半径は，△ABC の外接円の $\frac{1}{2}$ である．

5 (1) 長方形の対角線の長さが 3 であるから　$x^2+y^2+z^2=9$　$\cdots$①

表面積が 16 であるから　$2(xy+yz+zx)=16$

上の 2 式の辺々を加えると

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=9+16$$

したがって　$(x+y+z)^2=25$　よって　$\boldsymbol{x+y+z=5}$

(2) (1) の結果から　$\boldsymbol{y+z=5-x}$

上式の両辺を平方すると　$y^2+z^2+2yz=25-10x+x^2$

① より　$y^2+z^2=9-x^2$　これを上式に代入すると

$$9-x^2+2yz=25-10x+x^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{yz=x^2-5x+8}$$

したがって，$y,\ z$ を解とする 2 次方程式は

$$\boldsymbol{t^2-(5-x)t+x^2-5x+8=0} \quad \cdots(*)$$

(3) $x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから

$$y+z=5-x>0 \quad \text{ゆえに} \quad 0<x<5 \quad \cdots②$$
$$yz=x^2-5x+8=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

方程式 $(*)$ が実数解をもつから，係数について

$$D=(5-x)^2-4\cdot1\cdot(x^2-5x+8)\geqq 0$$

整理すると　$3x^2-10x+7\leqq 0$　ゆえに　$(x-1)(3x-7)\leqq 0$

② に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{1\leqq x\leqq \frac{7}{3}}$

(4) $yz=x^2-5x+8$ より，$V=xyz=x^3-5x^2+8x$

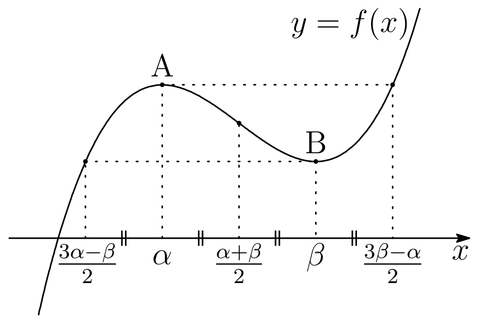
$f(x)=x^3-5x^2+8x$ とおくと $\left(1\leqq x\leqq\dfrac{7}{3}\right)$

$$f'(x)=3x^2-10x+8=(x-2)(3x-4)$$

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{7}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$\frac{112}{27}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{112}{27}$

よって　$\boldsymbol{x=\frac{4}{3},\ \frac{7}{3}}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{112}{27}}$，$\boldsymbol{x=1,\ 2}$ で最小値 $\boldsymbol{4}$ をとる．

補足 $a>0$，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ について，$y=f(x)$ が点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$ で極大，点 $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ で極小であるとき，変曲点 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ f(\frac{\alpha+\beta}{2})\right)$ は A，B の中点である．また，$f(\frac{3\alpha-\beta}{3})=f(\beta)$，$f(\alpha)=f(\frac{3\beta-\alpha}{2})$ が成立する．



本題のグラフの変曲点の座標について　$\dfrac{\frac{4}{3}+2}{2}=\dfrac{5}{3}$，$\dfrac{f(\frac{4}{3})+f(2)}{2}=f(\frac{5}{3})$

x 座標 $1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{7}{3}$ は等差数列をなし，$f(1)=f(2)$，$f(\frac{4}{3})=f(\frac{7}{3})$．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\quad (*) \quad a_n = \int_1^e x^2(\log x)^n\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$n = 1$のとき

$$a_1 = \int_1^e x^2 \log x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \boldsymbol{\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}}$$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_1^e x^2(\log x)^{n+1}\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)'(\log x)^{n+1}\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}(\log x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\log x)^n\,dx = \boldsymbol{\frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}a_n} \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から，順次

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}a_1 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}\right) = \boldsymbol{\frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}}, \\ a_3 &= \frac{e^3}{3} - a_2 = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}\right) = \boldsymbol{\frac{4e^3}{27} + \frac{2}{27}}, \\ a_4 &= \frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}a_3 = \frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{4e^3}{27} + \frac{2}{27}\right) = \boldsymbol{\frac{11e^3}{81} - \frac{8}{81}} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = x(\log x - 1)^2$ より

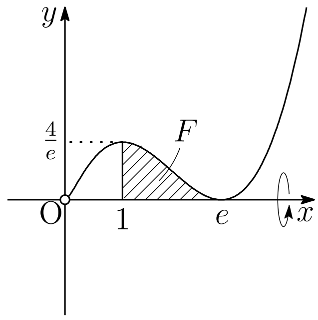
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log x - 1)^2 + x\cdot 2(\log x - 1)\cdot\frac{1}{x} \\ &= (\log x)^2 - 1 = (\log x + 1)(\log x - 1), \\ f''(x) &= \frac{2\log x}{x} \end{aligned}$$

したがって，グラフの増減および凹凸は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗

よって　極大値 $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \boldsymbol{\dfrac{4}{e}}$，極小値 $f(e) = \mathbf{0}$，変曲点 $\mathbf{(1,\ 1)}$

(4) (3) の増減表から，F の表す領域は下の図の斜線部分である．



(3) の増減表から，V の体積は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_1^e f(x)^2\,dx = \int_1^e x^2(\log x - 1)^4\,dx \\ &= \int_1^e x^2\{(\log x)^4 - 4(\log x)^3 + 6(\log x)^2 - 4\log x + 1\}\,dx \\ &= a_4 - 4a_3 + 6a_2 - 4a_1 + \int_1^e x^2\,dx \\ &= \frac{11e^3}{81} - \frac{8}{81} - 4\left(\frac{4e^3}{27} + \frac{2}{27}\right) \\ &\qquad + 6\left(\frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}\right) - 4\left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}\right) + \left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_1^e \\ &= \frac{8e^3}{81} - \frac{131}{81}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \pi\left(\frac{8e^3}{81} - \frac{131}{81}\right)}$

解説 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)\\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

例えば，$f(x)$ を n 次関数とし，$g'(x) = e^{ax+b}$ とすると (積分定数は 0 とする)

$$g^{(-k)}(x) = \frac{e^{ax+b}}{a^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$f(x)$ の $n+1$ 次導関数は 0 であるから

$$\int f(x)e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{f^{(k)}(x)}{a^k} + C$$

たとえば，$f(t) = t^4$，$g'(t) = e^{3t+3}$ とすると

$$\begin{aligned}\int t^4 e^{3t+3}\,dt &= \frac{e^{3t+3}}{3}\left(t^4 - \frac{4t^3}{3} + \frac{12t^2}{3^2} - \frac{24t}{3^3} + \frac{24}{3^4}\right) + C\\ &= \frac{e^{3t+3}}{3}\left(t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{8}{27}\right) + C\end{aligned}$$

定積分 $I = \displaystyle\int_1^e x^2(\log x - 1)^4\,dx$ について，$x = e^{t+1}$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = e^{t+1},\qquad \begin{array}{c|c} x & 1 \longrightarrow e \\ \hline t & -1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^{0}(e^{t+1})^2(\log e^{t+1} - 1)^4 e^{t+1}\,dt = \int_{-1}^{0} t^4 e^{3t+3}\,dt\\ &= \left[\frac{e^{3t+3}}{3}\left(t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{8}{27}\right)\right]_{-1}^{0} = \frac{8e^3}{81} - \frac{131}{81}\end{aligned}$$

このように対数型の積分は指数型の積分に変換した方が計算しやすい[2]．

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf $\boxed{3}$

前ページで示した結果から，定積分についても同様に，次式が成立する．

$$\int_x^a f(t)g'(t)\,dt = \Big[\ f(t)g(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(-k)}(t)\ \Big]_x^a + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)g^{(-n+1)}(t)\,dt$$

$g^{(-k)}(t) = \dfrac{1}{k!}(t-x)^k$ とおくと $(k=-1,0,1,\cdots)$，$g(t)=1$，$g'(t)=0$ より

$$0 = \Big[\ f(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)\frac{(t-x)^k}{k!}\ \Big]_x^a + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

したがって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ここで

$$J = (-1)^n\int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = (-1)^n\Big[\ \frac{(t-x)^n}{n!}\ \Big]_x^a = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

とおき，積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$$K = (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

は MJ と mJ の間にあるから

$$K = f^{(n)}(c)J$$

を満たす c が積分区間に少なくとも 1 つ存在する (積分学の平均値の定理)．

よって，次の等式が成立する (テイラー展開)．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

例えば，n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + A(x-a)^n$$

3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数を a とし，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ を満たすとすると $(\alpha<\beta)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3a(x-\alpha)(x-\beta) = 3a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ f''(x) &= 3a\{2x-(\alpha+\beta)\} \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

ゆえに　$f'(\alpha)=0,\quad f''(\alpha)=3a(\alpha-\beta),\quad f''(\alpha)=6a$

$f(x)$ の $x=\alpha$ を極とするテイラー展開を行うと

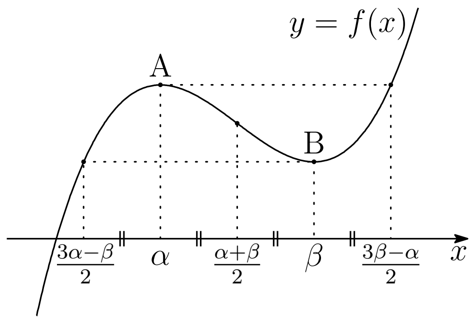
$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x-\alpha)^3 \\ &= f(\alpha)+\frac{1}{2!}\cdot 3a(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+\frac{1}{3!}\cdot 6a(x-\alpha)^3 \end{aligned}$$

したがって　$$\begin{aligned} f(x)-f(\alpha) &= \frac{3a}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3 \\ &= a(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

同様にして　$f(x)-f(\beta)=a(x-\beta)^2\left(x-\dfrac{3\alpha-\beta}{2}\right)$

また，$f''\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ であるから，この点は変曲点である．

したがって，$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．

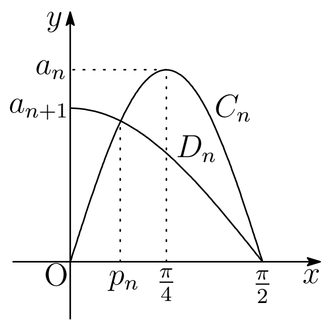


とくに，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$，α，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，β，$\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は，等差数列をなす．

注意　関数 $f(x)$ について，$f'(\alpha)=0$ であっても，$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化しないとき $f(\alpha)$ は極値ではないように，$f''(c)=0$ であって，$x=c$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化しないと点 $(c,\ f(c))$ は変曲点ではない．3 次関数 $f(x)$ については，$f''(x)$ は 1 次関数であるから，変曲点が常に 1 つ存在する．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $C_n : y = a_n \sin 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$D_n : y = a_{n+1} \cos x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$



C_n，D_n の 2 式から y を消去すると

$$a_n \sin 2x = a_{n+1} \cos x$$
$$(2a_n \sin x - a_{n+1}) \cos x = 0$$

したがって　$\sin x = \dfrac{a_{n+1}}{2a_n}$，$x = \dfrac{\pi}{2}$

x 軸上にない C_n，D_n の交点の x 座標 p_n は，$x \neq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{\sin p_n = \frac{a_{n+1}}{2a_n}}$$

$a_n \geqq a_{n+1} > 0$ より，$0 < \dfrac{a_{n+1}}{2a_n} \leqq \dfrac{1}{2}$ であるから　$\boldsymbol{0 < p_n \leqq \dfrac{\pi}{6}}$

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$a_n \sin 2x \geqq 0$ であるから

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_n \sin 2x \, dx = \left[-\frac{a_n}{2} \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{a_n}$$

$p_n \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$a_n \sin 2x \geqq a_{n+1} \cos x$ であるから

$$\begin{aligned}
T_n &= \int_{p_n}^{\frac{\pi}{2}} (a_n \sin 2x - a_{n+1} \cos x) \, dx \\
&= \left[-\frac{1}{2} a_n \cos 2x - a_{n+1} \sin x\right]_{p_n}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} a_n (1 + \cos 2p_n) - a_{n+1}(1 - \sin p_n) \\
&= a_n (1 - \sin^2 p_n) - a_{n+1}(1 - \sin p_n) \\
&= a_n \left(1 - \frac{{a_{n+1}}^2}{4{a_n}^2}\right) - a_{n+1}\left(1 - \frac{a_{n+1}}{2a_n}\right) \\
&= \boldsymbol{a_n - a_{n+1} + \frac{{a_{n+1}}^2}{4a_n}}
\end{aligned}$$

(3) $T_n = r^2 S_n$ (r は正の定数) が成り立つとき，(1),(2) の結果から

$$a_n - a_{n+1} + \frac{{a_{n+1}}^2}{4a_n} = r^2 a_n \quad \text{ゆえに} \quad 4{a_n}^2 - 4a_n a_{n+1} + {a_{n+1}}^2 = 4r^2 {a_n}^2$$

したがって　　$(2a_n - a_{n+1})^2 = (2ra_n)^2$

$a_n \geqq a_{n+1} > 0,\ r > 0$ であるから

$$2a_n - a_{n+1} = 2ra_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = 2(1-r)a_n$$

$a_1 = 1$ であるから　$\boldsymbol{a_n = \{2(1-r)\}^{n-1}}$

数列 $\{a_n\}$ が収束するとき，$a_n > 0$ であることに注意して

$$0 < 2(1-r) \leqq 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq r < 1}$$

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ が収束するとき，$a_n > 0$ に注意して

$$0 < 2(1-r) < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} < r < 1}$$

求める無限級数の和は　$\displaystyle\frac{a_1}{1-2(1-r)} = \boldsymbol{\frac{1}{2r-1}}$

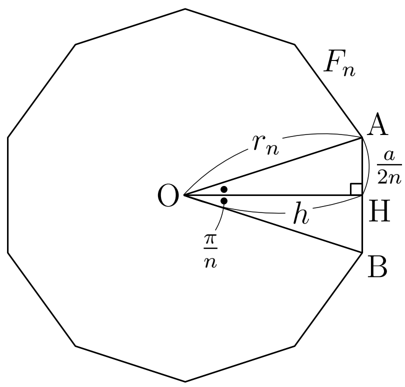
$\boxed{\textbf{8}}$ (1) S_3 は一辺が $\dfrac{a}{3}$ の正三角形の面積であるから

$$S_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 \sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}a^2}{36}}$$

S_4 は一辺が $\dfrac{a}{4}$ の正方形の面積であるから

$$S_4 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{a^2}{16}}$$

(2) 正 n 角形 F_n の 1 つの辺 AB に F_n の外心 O から垂線 OH を引くと



$$\angle\mathrm{AOH} = \frac{\pi}{n},\quad \mathrm{AH} = \frac{a}{2n}$$

したがって　　$\displaystyle r_n \sin\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2n}$

よって　　$\displaystyle \boldsymbol{r_n = \frac{a}{2n\sin\frac{\pi}{n}}}$

$h = \mathrm{OH}$ とおくと

$$h = r_n\cos\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\cos\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2n\tan\frac{\pi}{n}}$$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{2n\tan\frac{\pi}{n}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{S_n = \frac{a^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}}$$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}=x\cdot\dfrac{1}{\tan x}$ を微分すると $\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{\tan x}+x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\frac{\sin x\cos x-x}{\sin^2 x}\\ &=\frac{2\sin x\cos x-2x}{2\sin^2 x}=\frac{\sin 2x-2x}{2\sin^2 x}\end{aligned}$$

ここで，$g(x)=\sin 2x-2x$ とおくと $\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$g(0)=0,\quad g'(x)=2(\cos 2x-1)<0$$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において　$g(x)<0$　すなわち　$f'(x)<0$

よって，$0<x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において，$f(x)$ は単調減少である．

(4) (2) の結果から　$S_n=\dfrac{a^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}=\dfrac{a^2}{4\pi}\cdot\dfrac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}=\dfrac{a^2}{4\pi}f\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$　$\cdots(*)$

$\dfrac{\pi}{n+1}<\dfrac{\pi}{n}$ であるから，(3) の結果より

$$f\left(\frac{\pi}{n}\right)<f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\quad \text{よって}\quad S_n<S_{n+1}$$

$x=\dfrac{\pi}{n}$ とおくと，$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{x\to+0}\frac{a^2}{4\pi}f(x)$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\tan x}=1$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\boldsymbol{\frac{a^2}{4\pi}}$

F_n が円周の長さ a $\left(\text{半径}\dfrac{a}{2\pi}\right)$ の円に近づくから，次が成立する (類題[3])．

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\pi R^2=\frac{(2\pi R)^2}{4\pi}=\frac{a^2}{4\pi}$$

[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2018.pdf $\boxed{2}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\boldsymbol{P(x=k)={}_{100}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{100-k}}$

(2) 100 人中 1 人だけ賛成である確率は　$P(X=1)$

100 人中 2 人だけ賛成である確率は　$P(X=2)$

「100 人中 1 人だけが賛成者」でない確率が,「100 人中 2 人だけが賛成者」でない確率よりも大きいから

$$1-P(X=1)>1-P(X=2) \quad \text{ゆえに} \quad P(X=2)>P(X=1)$$

したがって
$$\begin{aligned} {}_{100}\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^{98} &> {}_{100}\mathrm{C}_1 p(1-p)^{99} \\ \frac{100\cdot 99}{2}p^2(1-p)^{98} &> 100p(1-p)^{99} \\ 99p &> 2(1-p) \end{aligned}$$

$0<p<1$ であることに注意して　$\boldsymbol{\frac{2}{101}<p<1}$

(3) 正規分布表から　$P(0 \leqq z \leqq 1.96)=0.4750$

ゆえに　$P(-1.96 \leqq z \leqq 1.96)=0.4750\times 2=0.9500$

標本比率 $p_0=\dfrac{80}{100}=0.8$，標本の大きさ $n=100$ のとき，母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\, p_0-1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}},\ p_0+1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \,\right]$$

$1.96\sqrt{\dfrac{0.8(1-0.8)}{100}}=1.96\times 0.04=0.0784$ より

$$[0.8-0.0784,\ 0.8+0.0784] \quad \text{よって} \quad \mathbf{[0.7216,\ 0.8784]}$$

(4) $P(X=k)={}_{100}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{100-k}$ の自然対数をとると

$$\log P(X=k)=\log{}_{100}\mathrm{C}_k+k\log p+(100-k)\log(1-p)$$

これを p について微分すると

$$\frac{d}{dp}\log P(X=k)=\frac{k}{p}-\frac{100-k}{1-p}=\frac{k-100p}{p(1-p)}$$

p	(0)	$\cdots$	$\frac{k}{100}$	$\cdots$	(1)
$\frac{d}{dp}P(X=k)$		$+$	0	$-$	
$P(X=k)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める p の値は　$\boldsymbol{p=\frac{k}{100}}$