平成 31 年度　長崎大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
工学部　平成 31 年 3 月 12 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ x 軸と y 軸からなる直交座標平面上に原点 O を中心とする半径 R の円がある．x 軸上の点 A から円に接線を引き，第一象限にある地点を B とする．点 A の座標を $(H,\ 0)$ (ただし，$H > R$)，点 B の座標を $(x_{\mathrm{B}},\ y_{\mathrm{B}})$ とする．また，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とする．

(1) 直線 OB の式を，θ を用いて表せ．

(2) 直線 AB の式を，θ と H を用いて表せ．

(3) x_{B} および y_{B} を，それぞれ θ と H を用いて表せ．

(4) $\theta = 15^\circ$ のとき，$2x_{\mathrm{B}} - H$ を，H を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 円周率を使用する場合は π で表記してよい．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$ の値を求めよ．

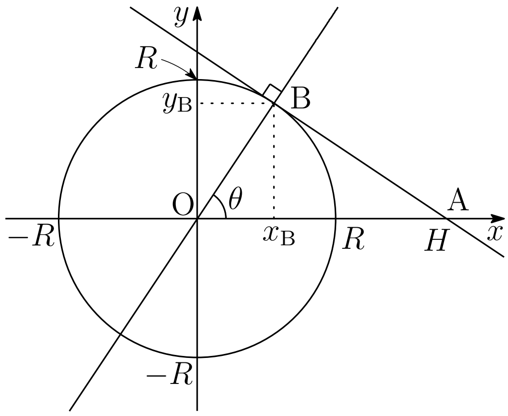
(2) 関数 $f(x) = x^2 \log \dfrac{1}{x}$ について，関数 $f(x)$ の極値と，そのときの x の値を求めよ．

(3) t は $t \geqq 1$ を満たす実数とする．曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と 2 つの直線 $x = 1$，$x = \sqrt{2}te^{\frac{t^2}{4}}$ と，x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする．$\dfrac{dV}{dt}$ が最小となる t の値を求め，そのときの $V(t)$ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 直線OBは原点Oを通る傾き$\tan\theta$の直線であるから

$$\boldsymbol{y = x\tan\theta}$$



(2) 直線ABは，点A$(H,\ 0)$を通る傾き$-\dfrac{1}{\tan\theta}$の直線であるから

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{\tan\theta}(x - H)}$$

(3) 直線OBとABの方程式からyを消去すると

$$x\tan\theta = -\frac{1}{\tan\theta}(x-H) \quad \text{ゆえに} \quad (1+\tan^2\theta)x = H$$

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\quad \dfrac{x}{\cos^2\theta} = H \quad$ ゆえに $\quad x = H\cos^2\theta$

これを方程式OBの方程式に代入すると

$$y = H\cos^2\theta\tan\theta = H\sin\theta\cos\theta = \frac{H}{2}\sin 2\theta$$

よって $\qquad \boldsymbol{x_B = H\cos^2\theta,\ \ y_B = \dfrac{H}{2}\sin 2\theta}$

(4) (3)の結果から $\quad 2x_B - H = 2H\cos^2\theta - H = H(2\cos^2\theta - 1) = H\cos 2\theta$

$\theta = 15^\circ$ のとき $\quad 2x_B - H = H\cos 30^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}H}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$ において，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3+(\sqrt{3}\tan\theta)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$$

(2) $f(x)=x^2\log\dfrac{1}{x}=-x^2\log x$ より

$$f'(x)=-2x\log x-x^2\cdot\frac{1}{x}=-x(2\log x+1)$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$ のとき，極大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2e}}$ をとる**.**

(3) $t \geqq 1$ より，$1 \leqq \sqrt{2}te^{\frac{t^2}{4}}$ に注意して

$$V(t)=\pi\int_1^{\sqrt{2}te^{\frac{t^2}{4}}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\pi\Big[\ \log x\ \Big]_1^{\sqrt{2}te^{\frac{t^2}{4}}}=\pi\left(\log\sqrt{2}t+\frac{t^2}{4}\right)$$

これを t について微分すると

$$V'(t)=\pi\left(\frac{1}{t}+\frac{t}{2}\right)$$

$\dfrac{1}{t}>0$，$\dfrac{t}{2}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{t}+\frac{t}{2}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{2}}=\sqrt{2}$$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{1}{t}=\frac{t}{2}\quad \text{すなわち}\quad t=\sqrt{2}$$

したがって，$\boldsymbol{t=\sqrt{2}}$ のとき $\dfrac{dV}{dt}$ は最小となり，そのとき

$$V(\sqrt{2})=\boldsymbol{\pi\left(\log 2+\frac{1}{2}\right)}$$