平成31年度　長崎大学2次試験前期日程 (数学問題)
平成31年2月25日

- 教育A・経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数I・II・A・B (80分)
- 教育B・薬学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 工・歯学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 関数 $y = \cos^2 x - \sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2^n + 6n^2 + 4n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

(4) 平面上の3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ において

$$|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = 3|\vec{c}| = 6k \quad (k \text{ は正の定数})$$
$$\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$$

が成り立っている．このとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表し，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を k を用いて表せ．また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha \leqq \beta)$ に対し，$p,\ q$ を $p = \alpha + \beta$，$q = \alpha\beta$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $p = 3$，$q = -1$ のとき，α と β の値を求めよ．

(2) 実数 $\alpha,\ \beta$ を解とする x の2次方程式を p，q を用いて表せ．また，このときの p，q が満たす不等式を求めよ．

(3) (2) の実数 α，β が，さらに不等式 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3 \leqq 0$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が存在する領域 E を pq 平面に図示せよ．また，領域 E の面積 S を求めよ．

(4) (3) のとき，$\alpha\beta + \alpha + \beta$ の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの実数 α と β の値を求めよ．

3 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 3 次方程式 $x^3 - 3px + p = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつように，実数 p の値の範囲を定めよ．

(2) 関数 $y = \log x \ (x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線を ℓ とする．また，点 P を通り，ℓ に垂直な直線を m とする．2 本の直線 ℓ，m および y 軸とで囲まれる図形の面積を S とする．$S = 5$ となるときの点 P の座標を求めよ．

(3) 空間内に，3 点 $\mathrm{A}(3, -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 4)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 4)$ がある．点 C から直線 AB に垂線を引き，交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおくとき，実数 t の値と線分 CH の長さを求めよ．

(4) 原点を O とする座標平面上に，曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ があり，C 上に x 座標を t とする第 1 象限の点 P をとる．このとき，点 P から x 軸および y 軸に垂線を下ろし，交点をそれぞれ Q，R とする．四角形 OQPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V の最大値と，そのときの P の座標を求めよ．

4 $\triangle$OAB の 2 辺 OA，OB 上にそれぞれ点 C，D があり，直線 CD は $\triangle$OAB の重心 G を通るものとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a}\ (0 < x < 1), \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = y\vec{b}\ (0 < y < 1)$$

とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{CG} : \mathrm{GD} = t : (1 - t)$，$0 < t < 1$ とする．このとき，x と y をそれぞれ t の式で表せ．

(2) y を x の式で表せ．また，$0 < y < 1$ より x の値の範囲を求めよ．

(3) $\triangle$OCD の面積を S_1，$\triangle$OAB の面積を S_2 とし，$f(x) = \dfrac{S_1}{S_2}$ とする．関数 $f(x)$ の増減表をつくり，$f(x)$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 曲線 $C: y=\sin x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ 上の x 座標が 0 の点を A，x 座標が $\dfrac{2}{3}\pi$ の点を B とする．点 P$(p,\ \sin p)$ が曲線 C 上を動くとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 AP の中点を M$(x,\ y)$ とする．ただし，P が A と一致するときは，中点 M は A とする．このとき，x と y をそれぞれ p を用いて表せ．また，M がえがく曲線を $C_1: y=f(x)$ とするとき，関数 $f(x)$ と x の範囲を求めよ．

(2) 線分 PB の中点を N$(x,\ y)$ とする．ただし，P が B と一致するときは，中点 N は B とする．このとき，x と y をそれぞれ p を用いて表せ．また，N がえがく曲線を $C_2: y=g(x)$ とするとき，関数 $g(x)$ と x の範囲を求めよ．さらに，$y=g(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 AB とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(4) 3 つの曲線 $C,\ C_1,\ C_2$ の概形をえがき，3 つの曲線で囲まれる図形の面積 T を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta\ (-\pi<\arg\beta<\arg\alpha<\pi)$ とする．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n+\beta^n & (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n &= (\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1 & (n=1,2,3,\cdots) \end{aligned}$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ の値を求めよ．

(2) $\alpha,\ \beta$ を極形式で表し，一般項 $a_n,\ b_n$ を求めよ．

(3) すべての自然数 n に対して，$a_n,\ b_n$ は整数であることを示せ．

(4) 複素数平面上の異なる 3 点 A(1)，B(α^n)，C(β^n) について，等式

$$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$$

が成り立つとき，$\triangle$ABC はどのような形になるか．また，このときの a_n と b_n の値を求めよ．

7 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を次のように定める．

$$f_n(x) = \frac{a_n}{x} \qquad (x > 0)$$
$$g_n(x) = x(x-1)^{2n} \quad (x \geqq 0)$$

ただし，a_n は各自然数 n に対して定まり，x とは無関係な正の実数である．以下の問いに答えよ．

(1) $x = t\ (0 < t < 1)$ における $y = f_n(x)$ の接線を ℓ とするとき，ℓ の式を t および a_n を用いて表せ．

(2) (1) の接線 ℓ は，$x = t\ (0 < t < 1)$ において，$y = g_n(x)$ にも接しているものとする．すなわち，$f_n(t) = g_n(t)$，$f_n'(t) = g_n'(t)$ が同時に成り立つ．このとき，t および a_n をそれぞれ n の式で表せ．

(3) 曲線 $y = g_n(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とするとき，S_n を n の式で表せ．

(4) (2) において，接線 ℓ と x 軸および y 軸とで囲まれる図形の面積を T_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n}$ の値を e を用いて表せ．ただし，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とする．

8 方程式 $z^3 = 1$ の解を z_1，z_2，z_3 とし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ とする．複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $z_1 + z_2 + z_3$，$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$，$z_1z_2z_3$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，線分の長さの 2 乗の和 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ および線分の長さの積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ の値を，α を用いてそれぞれ表せ．

(3) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，α が $\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha} = ri\ (r > 0)$ を満たすとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最大値および，そのときの r と α の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(4) (3) において，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ が最大となるときの $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$y=\cos^2 x-\sin x=1-\sin^2 x-\sin x$$

$t=\sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= 1-t^2-t \qquad (-1 \leqq t \leqq 1) \\ &= -\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \end{aligned}$$

よって　$t=-\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{x=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$

$t=1$，すなわち，$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-1}$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$ より　$4xy=6x+6y$　ゆえに　$(2x-3)(2y-3)=9$

x は自然数であるから，$2x-3 \geqq -1$，$2y-3 \geqq -1$ に注意して

$$(2x-3,\ 2y-3)=(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (6,\ 2)}$

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=2^n+6n^2+4n-1$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k+6k^2+4k-1) \\ &= 1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}+6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1) \\ &= 2^n+n(2n^2-n-2) \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=2^n+n(2n^2-n-2)}$

(4) $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より　$\boldsymbol{\vec{c}=-\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}}$

$3|\vec{c}|=|\vec{a}+2\vec{b}|$ であるから　$9|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$　$\cdots(*)$

$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=3|\vec{c}|=6k$ より　$|\vec{a}|=6k$，$|\vec{b}|=3k$，$|\vec{c}|=2k$

これを $(*)$ に代入すると

$$9(2k)^2=(6k)^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4(3k)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-9k^2}$$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-9k^2}{6k\cdot 3k}=-\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{2}{3}\pi}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $p=\alpha+\beta$，$q=\alpha\beta$ より，$\alpha,\ \beta$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2-px+q=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-3x-1=0$$

$\alpha \leqq \beta$ であるから　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\ \beta=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$

(2) $\alpha,\ \beta$ を解とする 2 次方程式は

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

$p=\alpha+\beta$，$q=\alpha\beta$ であるから，$\alpha,\ \beta$ を解とする 2 次方程式は

$$\boldsymbol{x^2-px+q=0} \quad \cdots(*)$$

この方程式が実数解をもつから，その判別式を D とすると，$D \geqq 0$ より

$$\boldsymbol{p^2-4q \geqq 0}$$

(3) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3 \leqq 0$ より

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3 \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad p^2-q-3 \leqq 0$$

領域 E(下図の斜線部分で境界線を含む) の表す不等式は　$\begin{cases} q \geqq p^2-3 \\ q \leqq \dfrac{p^2}{4} \end{cases}$

2 つの放物線 $q=p^2-3,\ q=\dfrac{p^2}{4}$ の共有点の p 座標は　$p=\pm 2$

よって，求める面積 S は

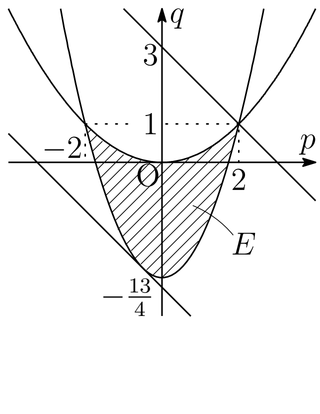
$$S=\int_{-2}^{2}\left\{\frac{p^2}{4}-(p^2-3)\right\}dp=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{2}(p+2)(p-2)\,dp=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot 4^3=\mathbf{8}$$

(4) $\alpha\beta+\alpha+\beta=q+p$ より，$p+q=k$ とおく．

E 上の点 $(2,\ 1)$ で k は最大値 $\mathbf{3}$ をとる．

$\alpha,\ \beta$ は $(*)$ より，方程式 $x^2-2x+1=0$ の解で

$$\boldsymbol{\alpha=\beta=1}$$



また，k が最小となるとき，

$$q=p^2-3\ (-2 \leqq p \leqq 2)$$

にあるから　$k=p^2+p-3=\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$

ゆえに，点 $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$ で，k は最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{13}{4}}$ をとる．$\alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ は，

2 次方程式 $x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{11}{4}=0$ の解で　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{-1-3\sqrt{5}}{4},\ \beta=\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 3次方程式 $x^3-3px+p=0\cdots(*)$ より，$f(x)=x^3-3px+p$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3p=3(x^2-p)$$

$p \leqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$ となり，$f(x)$ が単調増加で，$(*)$ は異なる3つの実数解をもたない．ゆえに，$p>0$ より，$f'(x)=0$ の解は　$x=\pm\sqrt{p}$

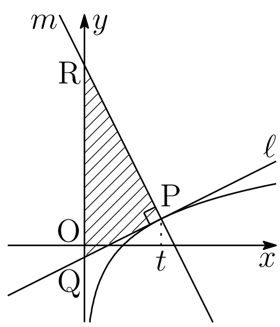
x	$\cdots$	$-\sqrt{p}$	$\cdots$	$\sqrt{p}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極大値 $f(-\sqrt{p})=p(2\sqrt{p}+1)>0$，極小値 $f(\sqrt{p})=p(-2\sqrt{p}+1)$

ゆえに，3次方程式 $(*)$ が，異なる3つの実数解をもつためには　$f(\sqrt{p})<0$

したがって　$-2\sqrt{p}+1<0$　よって　$\boldsymbol{p>\dfrac{1}{4}}$

(2) $y=\log x$ より　$y'=\dfrac{1}{x}$



ℓ は，点Pを通り，傾き $\dfrac{1}{t}$ の直線であるから

$$y=\frac{1}{t}(x-t)+\log t=\frac{x}{t}-1+\log t$$

m は，点Pを通り，傾き $-t$ の直線であるから

$$y=-t(x-t)+\log t=-tx+t^2+\log t$$

2直線 $\ell,\ m$ の y 軸との交点をそれぞれQ，Rとすると

$$\mathrm{QR}=(t^2+\log t)-(-1+\log t)=t^2+1$$

したがって　$S=\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}t\cdot\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}t(t^2+1)$

$S=5$ のとき　$\dfrac{1}{2}t(t^2+1)=5$　ゆえに　$(t-2)(t^2+2t+5)=0$

$t^2+2t+5=(t+1)^2+4>0$ に注意して，これを解くと　$t=2$

よって，求める点Pの座標は　$\mathbf{(2,\ \log 2)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots(*)$$

A$(3,-1,\ 1)$，B$(0,\ 2,\ 4)$，C$(1,\ 0,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 3,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 1,\ 3),$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-3)^2+3^2+3^2=27,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-3\cdot(-2)+3\cdot1+3\cdot3=18$$

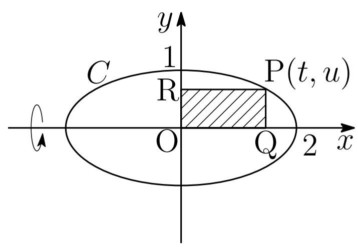
これを $(*)$ に代入して　$27t=18$　よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{3}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{3}(-3,\ 3,\ 3)=(-2,\ 2,\ 2)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,\ 2)-(-2,\ 1,\ 3)=(0,\ 1,-1)$

よって　$\mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(4) $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 P を $(t,\ u)$ とすると



$$\frac{t^2}{4}+u^2=1 \quad \cdots(*)$$

四角形 OQPR の体積 V は，$(*)$ より

$$V=\pi u^2t=\pi t\left(1-\frac{t^2}{4}\right)=\pi\left(t-\frac{t^3}{4}\right) \quad (0<t<2)$$

$f(t)=t-\dfrac{t^3}{4}$ とおくと　$f'(t)=1-\dfrac{3}{4}t^2=-\dfrac{3}{4}\left(t+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

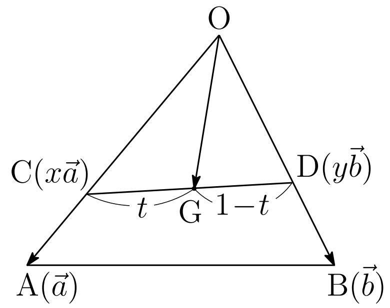
$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(2)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

$t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を $(*)$ に代入し，$u>0$ に注意して解くと　$u=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって，点 P$\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}}\right)$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\triangle$OAB の重心 G は　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$



点 G について CG : GD $= t : 1-t$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = y\vec{b}$ であるから

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3} = (1-t)x\vec{a} + ty\vec{b}$$

したがって　$\left\{(1-t)x - \dfrac{1}{3}\right\}\vec{a} + \left(ty - \dfrac{1}{3}\right)\vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，$0 < t < 1$ に注意して

$$(1-t)x - \frac{1}{3} = 0, \quad ty - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{3(1-t)}, \quad y = \frac{1}{3t}}$$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{1}{x} = 3(1-t)$, $\dfrac{1}{y} = 3t$　ゆえに　$\dfrac{1}{y} = 3 - \dfrac{1}{x}$　$\cdots(*)$

$0 < y < 1$ より，$\dfrac{1}{y} > 1$ であるから，$0 < x < 1$ に注意して

$$3 - \frac{1}{x} > 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} < x < 1$$

$(*)$ および上の結果から　$\boldsymbol{y = \dfrac{x}{3x-1} \quad \left(\dfrac{1}{2} < x < 1\right)}$

(3) (2) の結果により　$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\triangle\mathrm{OCD}}{\triangle\mathrm{OAB}} = xy = \dfrac{x^2}{3x-1}$

よって　$f(x) = \dfrac{x^2}{3x-1} = \dfrac{1}{9}\left(3x+1+\dfrac{1}{3x-1}\right) \quad \left(\dfrac{1}{2} < x < 1\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{(3x-1)^2}\right\} = \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$

x	$(\frac{1}{2})$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	

よって，$f(x)$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$，このとき，(2) の結果から　$\boldsymbol{x = y = \dfrac{2}{3}}$

補足 $f(x) = \dfrac{1}{9}\left(3x-1+\dfrac{1}{3x-1}+2\right) \geqq \dfrac{1}{9}\left(2\sqrt{(3x-1)\cdot\dfrac{1}{3x-1}}+2\right) = \dfrac{4}{9}$

$\boxed{5}$ (1) 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(p,\ \sin p)$ $\left(0 \leqq p \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ の中点が $\mathrm{M}(x,\ y)$ であるから

$$\boldsymbol{x = \frac{p}{2},\ \ y = \frac{\sin p}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad C_1 : y = \frac{1}{2}\sin 2x \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)}$

(2) 2 点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{P}(p,\ \sin p)$ $\left(0 \leqq p \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ の中点が $\mathrm{N}(x,\ y)$ であるから

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\left(p + \frac{2\pi}{3}\right),\quad y = \frac{1}{2}\left(\sin p + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

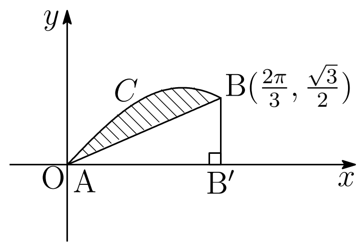
上の 2 式から，p を消去すると

$$C_2 : y = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \left(\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3}\right)$$

よって　$\boldsymbol{g(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \quad \left(\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}\right)}$

また，$2x - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{x = \dfrac{7\pi}{12}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}}$

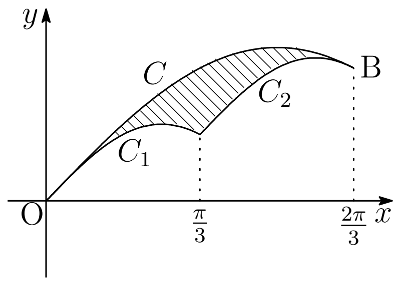
(3) S は，右の図の斜線部分であるから



$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx - \triangle\mathrm{ABB'}$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$$

(4) T は，右の図の斜線部分であるから



$$T = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$- \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left\{\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\right\} dx$$

ここで　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left\{\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) dx$

よって　$\displaystyle T = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) dx$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 2次方程式

$$x^2-x+1=0 \quad \cdots(*)$$

の解が$\alpha,\ \beta$であるから，解と係数の関係により

$$a_1=\alpha+\beta=1, \quad \alpha\beta=1$$

ゆえに　$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2{\cdot}1=-1$

$a_n=\alpha^n+\beta^n$,

$b_n=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1=1^n-a_n+1=2-a_n$

よって　$a_1=\mathbf{1},\ a_2=\mathbf{-1}$

$b_1=2-a_1=2-1=\mathbf{1},\ b_2=2-a_2=2-(-1)=\mathbf{3}$

(2) 2次方程式$(*)$を解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

この方程式の解$\alpha,\ \beta$について，$-\pi<\arg\beta<\arg\alpha<\pi$であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}, \quad \beta=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n=\alpha^n+\beta^n &= \cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}=\mathbf{2\cos\frac{n\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$b_n=2-a_n=\mathbf{2-2\cos\frac{n\pi}{3}}$$

(3) (2)の結果から，法6に関して

$n\equiv 0 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n)=(2,\ 0)$
$n\equiv \pm1 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n)=(1,\ 1)$
$n\equiv \pm2 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)$
$n\equiv 3 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n)=(-2,\ 4)$

よって，すべての自然数nに対して，$a_n,\ b_n$は整数である．

別解　$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$, $\alpha+\beta=\alpha\beta=1$より

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \quad \cdots ①$$

$a_1=1,\ a_2=-1$および①より，すべての自然数nに対して，a_nは整数．
また，$b_n=2-a_n$より，すべての自然数nに対して，b_nは整数．

(4) (2) の計算により

$$\alpha^n-\beta^n=\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)=2i\sin\frac{n\pi}{3}$$

したがって

$$|\alpha^n-\beta^n|^2=4\sin^2\frac{n\pi}{3}=\begin{cases}0 & (n\equiv 0,\ 3)\\ 3 & (n\equiv \pm1,\ \pm2)\end{cases}\qquad (\mathrm{mod}\ 6)$$

$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$ が成り立つのは，上式および (3) の結果から，$n\equiv\pm2$ $(\mathrm{mod}\ 6)$ のときである．このとき，(2) で示した極形式により

$$\alpha^n=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\quad \beta^n=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

ゆえに　$|\alpha^n-1|=|\beta^n-1|=|\alpha^n-\beta^n|$　すなわち　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$

このとき　$\boldsymbol{(a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)}$

別解 (2) で示したように，b_n は 0 以上の整数 (実数) であるから，$b_n=|b_n|$ より

$$\begin{aligned}b_n&=|(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1|=|(\alpha^n-1)(\beta^n-1)|\\&=|\alpha^n-1||\beta^n-1|\end{aligned}$$

ここで　$|\beta^n-1|=|\beta^n-\alpha^n\beta^n|=|\beta|^n|1-\alpha^n|=|\alpha^n-1|$

したがって　$b_n=|\alpha^n-1|^2=|\beta^n-1|^2$

$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$ が成り立つとき

$$|\alpha^n-1|=|\beta^n-1|=|\alpha^n-\beta^n|\quad すなわち\quad \mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形になるための条件であるから，$\arg\beta=-\arg\alpha$ より

$$\arg\alpha^n=n\arg\alpha=\frac{n}{3}\pi\equiv\pm\frac{2}{3}\pi\quad(\mathrm{mod}\ 6)\quad よって\quad n\equiv\pm2\quad(\mathrm{mod}\ 6)$$

このとき，(2) の結果により　$\boldsymbol{(a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)}$

7 (1) $f_n(x)=\dfrac{a_n}{x}$ より　$f_n'(x)=-\dfrac{a_n}{x^2}$

ℓ は，点 $(t,\ f_n(t))$ を通り，傾き $f_n'(t)$ の直線であるから

$$y-\frac{a_n}{t}=-\frac{a_n}{t^2}(x-t)\quad すなわち\quad \boldsymbol{y=-\frac{a_n}{t^2}x+\frac{2a_n}{t}}$$

(2) $g_n(x) = x(x-1)^{2n}$ より　$g_n'(x) = (x-1)^{2n} + 2nx(x-1)^{2n-1}$

$$= \{(2n+1)x - 1\}(x-1)^{2n-1}$$

$f_n(t) = g_n(t)$ より　$\dfrac{a_n}{t} = t(t-1)^{2n}$　ゆえに　$a_n = t^2(t-1)^{2n}$　$\cdots$①

$f_n'(t) = g_n'(t)$ より　$-\dfrac{a_n}{t^2} = \{(2n+1)t-1\}(t-1)^{2n-1}$

ゆえに　$a_n = -t^2\{(2n+1)t-1\}(t-1)^{2n-1}$　$\cdots$②

①，② から，$0 < t < 1$ に注意して

$$t^2(t-1)^{2n} = -t^2\{(2n+1)t-1\}(t-1)^{2n-1}$$
$$t - 1 = -\{(2n+1)t-1\}$$

ゆえに　$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{n+1}}$　これを ① に代入すると

$$a_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{n+1} - 1\right)^{2n} = \boldsymbol{\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}}$$

(3) $y = g_n(x)$ は x 軸と 2 点 $(0,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を共有し，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$g_n(x) \geqq 0$ であるから

$$S_n = \int_0^1 x(x-1)^{2n}\,dx = \int_0^1 x(1-x)^{2n}\,dx$$

ここで，$1 - x = t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = -1$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 0$

$$S_n = \int_1^0 (1-t)t^{2n}(-dt) = \int_0^1 (t^{2n} - t^{2n+1})\,dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \boldsymbol{\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}}$$

(4) 直線 $\ell : y = -\dfrac{a_n}{t^2}x + \dfrac{2a_n}{t}$ の x 切片 $2t$ および y 切片 $\dfrac{2a_n}{t}$ により

$$T_n = \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot\frac{2a_n}{t} = 2a_n = \frac{2n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)^{2n+2}}{2n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4\left(2+\frac{1}{n}\right)}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2 = \boldsymbol{\frac{e^2}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $z^3-1=0$ の解が z_1，z_2，z_3 であるから

$$\begin{aligned} z^3-1 &= (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \quad \cdots(*) \\ &= z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)z-z_1z_2z_3 \end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較して

$$\boldsymbol{z_1+z_2+z_3=0,\quad z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0,\quad z_1z_2z_3=1}$$

(2) $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$，$\mathrm{P}(\alpha)$ より

$$\mathrm{AP}^2=|\alpha-z_1|^2=(\alpha-z_1)(\overline{\alpha}-\overline{z_1})=|\alpha|^2-\overline{z_1}\alpha-z_1\overline{\alpha}+1$$

同様に　$\mathrm{BP}^2=|\alpha|^2-\overline{z_2}\alpha-z_2\overline{\alpha}+1$，$\mathrm{CP}^2=|\alpha|^2-\overline{z_3}\alpha-z_3\overline{\alpha}+1$

上式および (1) の結果から，$\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=\overline{z_1+z_2+z_3}=0$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 &= 3|\alpha|^2-(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})\alpha-(z_1+z_2+z_3)\overline{\alpha}+3 \\ &= \boldsymbol{3|\alpha|^2+3} \end{aligned}$$

$\mathrm{AP}=|\alpha-z_1|$，$\mathrm{BP}=|\alpha-z_2|$，$\mathrm{CP}=|\alpha-z_3|$ および $(*)$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP} &= |\alpha-z_1||\alpha-z_2||\alpha-z_3| \\ &= |(\alpha-z_1)(\alpha-z_2)(\alpha-z_3)|=\boldsymbol{|\alpha^3-1|} \end{aligned}$$

(3) $z^3=1$ を解いて　$z=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

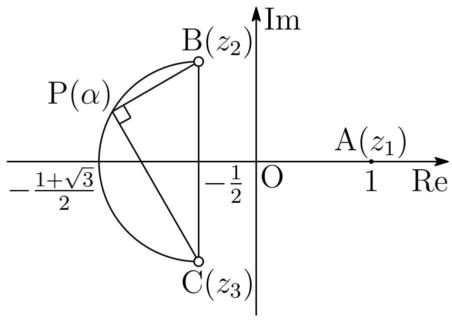
$0\leqq \arg z_1<\arg z_2<\arg z_3<2\pi$ に注意して

$$z_1=1,\quad z_2=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad z_3=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

α が $\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri\ (r>0)$ を満たすとき

$$\angle z_3\alpha z_2=\frac{\pi}{2}$$

したがって，右の図のように，$\mathrm{P}(\alpha)$ は BC を直径とする半円上にある (B，C を除く)．また，(2) の結果から



$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=3|\alpha|^2+3$$

右上の図から，上式は $\boldsymbol{\alpha=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$ のとき，最大となる．

最大値は　$3\left|-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right|^2+3=\boldsymbol{\dfrac{12+3\sqrt{3}}{2}}$

このとき，BP = CP，すなわち，$|z_2-\alpha| = |z_3-\alpha|$ より，$r>0$ に注意して

$$r = |ri| = \left|\frac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}\right| = \frac{|z_2-\alpha|}{|z_3-\alpha|} = \mathbf{1}$$

別解 $\mathrm{P}(\alpha)$ は BC を直径とする半円上にあるから (B，C を除く)

$$\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=\mathrm{BC}^2, \quad \mathrm{BC}=\sqrt{3}$$

ゆえに　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=\mathrm{AP}^2+3 \quad \cdots(**)$

前ページの図から，$\boldsymbol{\alpha = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ のとき，$(**)$ は最大となる．

このとき，$\mathrm{AP} = 1-\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ より，求める最大値は

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2+3 = \boldsymbol{\frac{12+3\sqrt{3}}{2}}$$

(4) $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP} = |\alpha^3-1|$ に $\alpha = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ を代入して

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP} &= \left|-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3-1\right| \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3+1 = \boldsymbol{\frac{9+3\sqrt{3}}{4}}\end{aligned}$$