

平成31年度 長崎大学2次試験前期日程(数学問題)

平成31年2月25日

- 教育A・経済・水産・環境科学部 [1] [2] 数I・II・A・B (80分)
- 教育B・薬学部 [3] [4] [6] [7] 数I・II・III・A・B (120分)
- 工・歯学部 [3] [4] [5] [7] 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部 [3] [4] [7] [8] 数I・II・III・A・B (120分)

[1] 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \cos^2 x - \sin x$ ($0 \leq x < 2\pi$) の最大値および最小値を求めよ。また、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が、 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n + 6n^2 + 4n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。
- (4) 平面上の3つのベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} において

$$|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = 3|\vec{c}| = 6k \quad (k \text{ は正の定数})$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$$

が成り立っている。このとき、 \vec{c} を \vec{a} と \vec{b} で表し、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を k を用いて表せ。また、 \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の値を求めよ。

[2] 実数 α, β ($\alpha \leq \beta$) に対し、 p, q を $p = \alpha + \beta$, $q = \alpha\beta$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $p = 3$, $q = -1$ のとき、 α と β の値を求めよ。
- (2) 実数 α, β を解とする x の2次方程式を p, q を用いて表せ。また、このときの p, q が満たす不等式を求めよ。
- (3) (2) の実数 α, β が、さらに不等式 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3 \leq 0$ を満たすとき、点 $P(p, q)$ が存在する領域 E を pq 平面に図示せよ。また、領域 E の面積 S を求めよ。
- (4) (3) のとき、 $\alpha\beta + \alpha + \beta$ の最大値および最小値を求めよ。また、そのときの実数 α と β の値を求めよ。

3 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

- (1) 3次方程式 $x^3 - 3px + p = 0$ が異なる3つの実数解をもつように、実数 p の値の範囲を定めよ。
- (2) 関数 $y = \log x$ ($x > 0$) 上の点 $P(t, \log t)$ における接線を l とする。また、点 P を通り、 l に垂直な直線を m とする。2本の直線 l, m および y 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。 $S = 5$ となるときの点 P の座標を求めよ。
- (3) 空間内に、3点 $A(3, -1, 1)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 0, 4)$ がある。点 C から直線 AB に垂線を引き、交点を H とする。 $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}$ とおくと、実数 t の値と線分 CH の長さを求めよ。
- (4) 原点を O とする座標平面上に、曲線 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ があり、 C 上に x 座標を t とする第1象限の点 P をとる。このとき、点 P から x 軸および y 軸に垂線を下ろし、交点をそれぞれ Q, R とする。四角形 $OQPR$ を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V の最大値と、そのときの P の座標を求めよ。

4 $\triangle OAB$ の2辺 OA, OB 上にそれぞれ点 C, D があり、直線 CD は $\triangle OAB$ の重心 G を通るものとする。

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = x\vec{a} \quad (0 < x < 1), \quad \overrightarrow{OD} = y\vec{b} \quad (0 < y < 1)$$

とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $CG : GD = t : (1 - t)$, $0 < t < 1$ とする。このとき、 x と y をそれぞれ t の式で表せ。
- (2) y を x の式で表せ。また、 $0 < y < 1$ より x の値の範囲を求めよ。
- (3) $\triangle OCD$ の面積を S_1 , $\triangle OAB$ の面積を S_2 とし、 $f(x) = \frac{S_1}{S_2}$ とする。関数 $f(x)$ の増減表をつくり、 $f(x)$ の最小値と、そのときの x と y の値を求めよ。

5 曲線 $C: y = \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi\right)$ 上の x 座標が 0 の点を A, x 座標が $\frac{2}{3}\pi$ の点を B とする. 点 $P(p, \sin p)$ が曲線 C 上を動くとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 AP の中点を $M(x, y)$ とする. ただし, P が A と一致するときは, 中点 M は A とする. このとき, x と y をそれぞれ p を用いて表せ. また, M がえがく曲線を $C_1: y = f(x)$ とするとき, 関数 $f(x)$ と x の範囲を求めよ.
- (2) 線分 PB の中点を $N(x, y)$ とする. ただし, P が B と一致するときは, 中点 N は B とする. このとき, x と y をそれぞれ p を用いて表せ. また, N がえがく曲線を $C_2: y = g(x)$ とするとき, 関数 $g(x)$ と x の範囲を求めよ. さらに, $y = g(x)$ の最大値と, そのときの x の値を求めよ.
- (3) 曲線 C と直線 AB とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.
- (4) 3 つの曲線 C, C_1, C_2 の概形をえがき, 3 つの曲線で囲まれる図形の面積 T を求めよ.

6 2 次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の 2 つの解を α, β $(-\pi < \arg \beta < \arg \alpha < \pi)$ とする. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n + \beta^n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= (\alpha\beta)^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1 & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

と定めるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a_1, a_2, b_1, b_2 の値を求めよ.
- (2) α, β を極形式で表し, 一般項 a_n, b_n を求めよ.
- (3) すべての自然数 n に対して, a_n, b_n は整数であることを示せ.
- (4) 複素数平面上の異なる 3 点 $A(1), B(\alpha^n), C(\beta^n)$ について, 等式

$$b_n = |\alpha^n - \beta^n|^2$$

が成り立つとき, $\triangle ABC$ はどのような形になるか. また, このときの a_n と b_n の値を求めよ.

7 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を次のように定める.

$$f_n(x) = \frac{a_n}{x} \quad (x > 0)$$

$$g_n(x) = x(x-1)^{2n} \quad (x \geq 0)$$

ただし、 a_n は各自然数 n に対して定まり、 x とは無関係な正の実数である. 以下の問いに答えよ.

- (1) $x = t$ ($0 < t < 1$) における $y = f_n(x)$ の接線を l とするとき、 l の式を t および a_n を用いて表せ.
- (2) (1) の接線 l は、 $x = t$ ($0 < t < 1$) において、 $y = g_n(x)$ にも接しているものとする. すなわち、 $f_n(t) = g_n(t)$, $f'_n(t) = g'_n(t)$ が同時に成り立つ. このとき、 t および a_n をそれぞれ n の式で表せ.
- (3) 曲線 $y = g_n(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とするとき、 S_n を n の式で表せ.
- (4) (2) において、接線 l と x 軸および y 軸とで囲まれる図形の面積を T_n とする. このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n}$ の値を e を用いて表せ. ただし、 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とする.

8 方程式 $z^3 = 1$ の解を z_1, z_2, z_3 とし、 $0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ とする. 複素数平面上に 3 点 $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ をとるとき、以下の問いに答えよ.

- (1) $z_1 + z_2 + z_3$, $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, $z_1z_2z_3$ の値をそれぞれ求めよ.
- (2) 複素数平面上の点 $P(\alpha)$ について、線分の長さの 2 乗の和 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ および線分の長さの積 $AP \cdot BP \cdot CP$ の値を、 α を用いてそれぞれ表せ.
- (3) 複素数平面上の点 $P(\alpha)$ について、 α が $\frac{z_2 - \alpha}{z_3 - \alpha} = ri$ ($r > 0$) を満たすとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最大値および、そのときの r と α の値を求めよ. ただし、 i は虚数単位である.
- (4) (3) において、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ が最大となるときの $AP \cdot BP \cdot CP$ の値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad y = \cos^2 x - \sin x = 1 - \sin^2 x - \sin x$$

$t = \sin x$ ($0 \leq x < 2\pi$) とおくと

$$\begin{aligned} y &= 1 - t^2 - t \quad (-1 \leq t \leq 1) \\ &= -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

よって $t = -\frac{1}{2}$, すなわち, $x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ のとき, 最大値 $\frac{5}{4}$

$t = 1$, すなわち, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, 最小値 -1

$$(2) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \text{ より } 4xy = 6x + 6y \quad \text{ゆえに } (2x-3)(2y-3) = 9$$

x は自然数であるから, $2x-3 \geq -1$, $2y-3 \geq -1$ に注意して

$$(2x-3, 2y-3) = (1, 9), (3, 3), (9, 1)$$

よって $(x, y) = (2, 6), (3, 3), (6, 2)$

$$(3) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} - a_n = 2^n + 6n^2 + 4n - 1 \text{ より, } n \geq 2 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k + 6k^2 + 4k - 1) \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + 6 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) + 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - (n-1) \\ &= 2^n + n(2n^2 - n - 2) \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから $a_n = 2^n + n(2n^2 - n - 2)$

$$(4) \quad \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} \text{ より } \vec{c} = -\frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

$$3|\vec{c}| = |\vec{a} + 2\vec{b}| \text{ であるから } 9|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \quad \dots (*)$$

$$|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = 3|\vec{c}| = 6k \text{ より } |\vec{a}| = 6k, \quad |\vec{b}| = 3k, \quad |\vec{c}| = 2k$$

これを (*) に代入すると

$$9(2k)^2 = (6k)^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4(3k)^2 \quad \text{ゆえに } \vec{a} \cdot \vec{b} = -9k^2$$

$$\text{したがって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-9k^2}{6k \cdot 3k} = -\frac{1}{2} \quad \text{よって } \theta = \frac{2}{3}\pi \quad \blacksquare$$

- 2 (1) $p = \alpha + \beta$, $q = \alpha\beta$ より, α, β を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - px + q = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\alpha \leq \beta \text{ であるから} \quad \alpha = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \quad \beta = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

- (2) α, β を解とする 2 次方程式は

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$p = \alpha + \beta$, $q = \alpha\beta$ であるから, α, β を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - px + q = 0 \quad \dots (*)$$

この方程式が実数解をもつから, その判別式を D とすると, $D \geq 0$ より

$$p^2 - 4q \geq 0$$

- (3) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3 \leq 0$ より

$$(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - 3 \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 - q - 3 \leq 0$$

領域 E (下図の斜線部分で境界線を含む) の表す不等式は
$$\begin{cases} q \geq p^2 - 3 \\ q \leq \frac{p^2}{4} \end{cases}$$

2 つの放物線 $q = p^2 - 3$, $q = \frac{p^2}{4}$ の共有点の p 座標は $p = \pm 2$

よって, 求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^2 \left\{ \frac{p^2}{4} - (p^2 - 3) \right\} dp = -\frac{3}{4} \int_{-2}^2 (p+2)(p-2) dp = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4^3 = 8$$

- (4) $\alpha\beta + \alpha + \beta = q + p$ より, $p + q = k$ とおく.

E 上の点 $(2, 1)$ で k は最大値 3 をとる.

α, β は (*) より, 方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ の解で

$$\alpha = \beta = 1$$

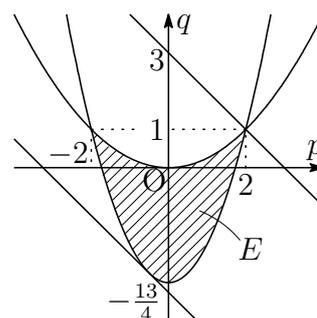
また, k が最小となるとき,

$$q = p^2 - 3 \quad (-2 \leq p \leq 2)$$

にあるから $k = p^2 + p - 3 = \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$

ゆえに, 点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ で, k は最小値 $-\frac{13}{4}$ をとる. α, β ($\alpha \leq \beta$) は,

2 次方程式 $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} = 0$ の解で $\alpha = \frac{-1 - 3\sqrt{5}}{4}$, $\beta = \frac{-1 + 3\sqrt{5}}{4}$



■

- 3 (1) 3次方程式 $x^3 - 3px + p = 0 \cdots (*)$ より, $f(x) = x^3 - 3px + p$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 3p = 3(x^2 - p)$$

$p \leq 0$ のとき, $f'(x) \geq 0$ となり, $f(x)$ が単調増加で, $(*)$ は異なる3つの実数解をもたない. ゆえに, $p > 0$ より, $f'(x) = 0$ の解は $x = \pm\sqrt{p}$

x	\cdots	$-\sqrt{p}$	\cdots	\sqrt{p}	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	極大	\searrow	極小	\nearrow

極大値 $f(-\sqrt{p}) = p(2\sqrt{p} + 1) > 0$, 極小値 $f(\sqrt{p}) = p(-2\sqrt{p} + 1)$

ゆえに, 3次方程式 $(*)$ が, 異なる3つの実数解をもつためには $f(\sqrt{p}) < 0$

したがって $-2\sqrt{p} + 1 < 0$ よって $p > \frac{1}{4}$

- (2) $y = \log x$ より $y' = \frac{1}{x}$

ℓ は, 点 P を通り, 傾き $\frac{1}{t}$ の直線であるから

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t = \frac{x}{t} - 1 + \log t$$

m は, 点 P を通り, 傾き $-t$ の直線であるから

$$y = -t(x - t) + \log t = -tx + t^2 + \log t$$

2直線 ℓ, m の y 軸との交点をそれぞれ Q, R とすると

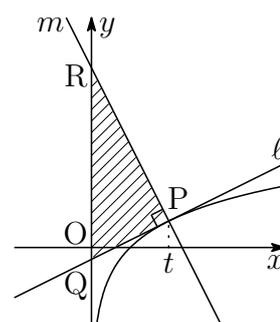
$$QR = (t^2 + \log t) - (-1 + \log t) = t^2 + 1$$

したがって $S = \triangle PQR = \frac{1}{2}t \cdot QR = \frac{1}{2}t(t^2 + 1)$

$S = 5$ のとき $\frac{1}{2}t(t^2 + 1) = 5$ ゆえに $(t - 2)(t^2 + 2t + 5) = 0$

$t^2 + 2t + 5 = (t + 1)^2 + 4 > 0$ に注意して, これを解くと $t = 2$

よって, 求める点 P の座標は $(2, \log 2)$



(3) $\vec{CH} = \vec{AH} - \vec{AC} = t\vec{AB} - \vec{AC}$, $\vec{AB} \perp \vec{CH}$ より, $\vec{AB} \cdot \vec{CH} = 0$ であるから

$$\vec{AB} \cdot (t\vec{AB} - \vec{AC}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\vec{AB}|^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AC} \quad \dots (*)$$

A(3, -1, 1), B(0, 2, 4), C(1, 0, 4) より

$$\vec{AB} = (-3, 3, 3), \quad \vec{AC} = (-2, 1, 3),$$

$$|\vec{AB}|^2 = (-3)^2 + 3^2 + 3^2 = 27,$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 18$$

これを (*) に代入して $27t = 18$ よって $t = \frac{2}{3}$

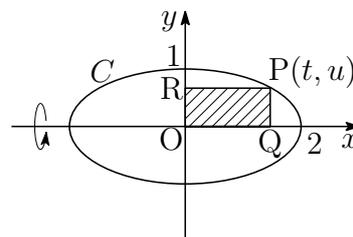
したがって $\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{2}{3}(-3, 3, 3) = (-2, 2, 2)$

ゆえに $\vec{CH} = \vec{AH} - \vec{AC} = (-2, 2, 2) - (-2, 1, 3) = (0, 1, -1)$

よって $CH = |\vec{CH}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

(4) $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 P を (t, u) とすると

$$\frac{t^2}{4} + u^2 = 1 \quad \dots (*)$$



四角形 OQPR の体積 V は, (*) より

$$V = \pi u^2 t = \pi t \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) = \pi \left(t - \frac{t^3}{4}\right) \quad (0 < t < 2)$$

$f(t) = t - \frac{t^3}{4}$ とおくと $f'(t) = 1 - \frac{3}{4}t^2 = -\frac{3}{4} \left(t + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(t - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$f(t)$ の増減表は, 次のようになる.

t	(0)	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$...	(2)
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↘	

$t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ を (*) に代入し, $u > 0$ に注意して解くと $u = \frac{\sqrt{6}}{3}$

よって, 点 P $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ のとき, V は最大値 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ をとる. ■

4 (1) $\triangle OAB$ の重心 G は $\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$

点 G について $CG : GD = t : 1 - t$ より

$$\vec{OG} = (1 - t)\vec{OC} + t\vec{OD}$$

また, $\vec{OC} = x\vec{a}$, $\vec{OD} = y\vec{b}$ であるから

$$\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} = (1 - t)x\vec{a} + ty\vec{b}$$

したがって $\left\{ (1 - t)x - \frac{1}{3} \right\} \vec{a} + \left(ty - \frac{1}{3} \right) \vec{b} = \vec{0}$

\vec{a} , \vec{b} は 1 次独立であるから, $0 < t < 1$ に注意して

$$(1 - t)x - \frac{1}{3} = 0, \quad ty - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{よって} \quad x = \frac{1}{3(1 - t)}, \quad y = \frac{1}{3t}$$

(2) (1) の結果から $\frac{1}{x} = 3(1 - t)$, $\frac{1}{y} = 3t$ ゆえに $\frac{1}{y} = 3 - \frac{1}{x} \dots (*)$

$0 < y < 1$ より, $\frac{1}{y} > 1$ であるから, $0 < x < 1$ に注意して

$$3 - \frac{1}{x} > 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} < x < 1$$

(*) および上の結果から $y = \frac{x}{3x - 1} \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1 \right)$

(3) (2) の結果により $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\triangle OCD}{\triangle OAB} = xy = \frac{x^2}{3x - 1}$

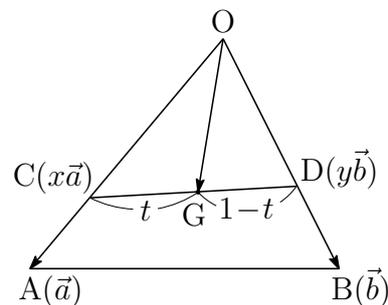
よって $f(x) = \frac{x^2}{3x - 1} = \frac{1}{9} \left(3x + 1 + \frac{1}{3x - 1} \right) \quad \left(\frac{1}{2} < x < 1 \right)$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{(3x - 1)^2} \right\} = \frac{x(3x - 2)}{(3x - 1)^2}$$

x	$\left(\frac{1}{2}\right)$	\dots	$\frac{2}{3}$	\dots	(1)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		\searrow	$\frac{4}{9}$	\nearrow	

よって, $f(x)$ の最小値は $\frac{4}{9}$, このとき, (2) の結果から $x = y = \frac{2}{3}$

補足 $f(x) = \frac{1}{9} \left(3x - 1 + \frac{1}{3x - 1} + 2 \right) \geq \frac{1}{9} \left(2\sqrt{(3x - 1) \cdot \frac{1}{3x - 1}} + 2 \right) = \frac{4}{9}$ ■



- 5 (1) 2点 $A(0, 0)$, $P(p, \sin p)$ $\left(0 \leq p \leq \frac{2}{3}\pi\right)$ の中点が $M(x, y)$ であるから

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = \frac{\sin p}{2} \quad \text{ゆえに} \quad C_1 : y = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{よって} \quad f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

- (2) 2点 $B\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P(p, \sin p)$ $\left(0 \leq p \leq \frac{2}{3}\pi\right)$ の中点が $N(x, y)$ であるから

$$x = \frac{1}{2} \left(p + \frac{2\pi}{3}\right), \quad y = \frac{1}{2} \left(\sin p + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

上の2式から, p を消去すると

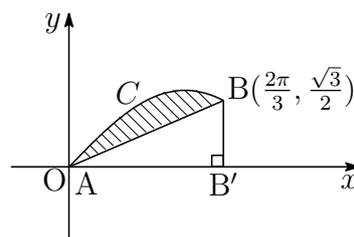
$$C_2 : y = \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \left(\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{よって} \quad g(x) = \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \left(\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\right)$$

また, $2x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, すなわち, $x = \frac{7\pi}{12}$ のとき, 最大値 $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

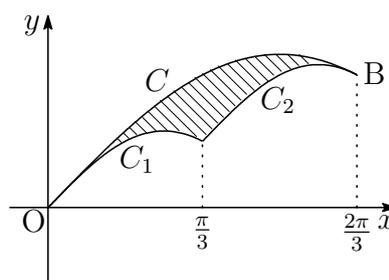
- (3) S は, 右の図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x \, dx - \triangle ABB' \\ &= \left[-\cos x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi \end{aligned}$$



- (4) T は, 右の図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx \\ &\quad - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\} dx \end{aligned}$$



$$\text{ここで} \quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) dx$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad T &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) dx \\ &= \left[-\cos x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi \end{aligned}$$

■

6 (1) 2次方程式

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$a_1 = \alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = 1$$

ゆえに $a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

$$a_n = \alpha^n + \beta^n,$$

$$b_n = (\alpha\beta)^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1 = 1^n - a_n + 1 = 2 - a_n$$

よって $a_1 = 1, a_2 = -1$

$$b_1 = 2 - a_1 = 2 - 1 = 1, \quad b_2 = 2 - a_2 = 2 - (-1) = 3$$

(2) 2次方程式(*)を解くと $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

この方程式の解 α, β について, $-\pi < \arg \beta < \arg \alpha < \pi$ であるから

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n = \alpha^n + \beta^n &= \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} + \cos \left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{n\pi}{3}\right) \\ &= \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} = 2 \cos \frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

$$b_n = 2 - a_n = 2 - 2 \cos \frac{n\pi}{3}$$

(3) (2)の結果から, 法6に関して

$$n \equiv 0 \pmod{6} \text{ のとき } (a_n, b_n) = (2, 0)$$

$$n \equiv \pm 1 \pmod{6} \text{ のとき } (a_n, b_n) = (1, 1)$$

$$n \equiv \pm 2 \pmod{6} \text{ のとき } (a_n, b_n) = (-1, 3)$$

$$n \equiv 3 \pmod{6} \text{ のとき } (a_n, b_n) = (-2, 4)$$

よって, すべての自然数 n に対して, a_n, b_n は整数である.

別解 $\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$, $\alpha + \beta = \alpha\beta = 1$ より

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$a_1 = 1, a_2 = -1$ および $\textcircled{1}$ より, すべての自然数 n に対して, a_n は整数.

また, $b_n = 2 - a_n$ より, すべての自然数 n に対して, b_n は整数.

(4) (2) の計算により

$$\alpha^n - \beta^n = \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) - \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right) = 2i \sin \frac{n\pi}{3}$$

したがって

$$|\alpha^n - \beta^n|^2 = 4 \sin^2 \frac{n\pi}{3} = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0, 3) \\ 3 & (n \equiv \pm 1, \pm 2) \end{cases} \pmod{6}$$

$b_n = |\alpha^n - \beta^n|^2$ が成り立つのは、上式および (3) の結果から、 $n \equiv \pm 2 \pmod{6}$ のときである。このとき、(2) で示した極形式により

$$\alpha^n = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \beta^n = \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$$

ゆえに $|\alpha^n - 1| = |\beta^n - 1| = |\alpha^n - \beta^n|$ すなわち $AB = AC = BC$

このとき $(a_n, b_n) = (-1, 3)$

別解 (2) で示したように、 b_n は 0 以上の整数 (実数) であるから、 $b_n = |b_n|$ より

$$\begin{aligned} b_n &= |(\alpha\beta)^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1| = |(\alpha^n - 1)(\beta^n - 1)| \\ &= |\alpha^n - 1| |\beta^n - 1| \end{aligned}$$

ここで $|\beta^n - 1| = |\beta^n - \alpha^n \beta^n| = |\beta|^n |1 - \alpha^n| = |\alpha^n - 1|$

したがって $b_n = |\alpha^n - 1|^2 = |\beta^n - 1|^2$

$b_n = |\alpha^n - \beta^n|^2$ が成り立つとき

$$|\alpha^n - 1| = |\beta^n - 1| = |\alpha^n - \beta^n| \quad \text{すなわち} \quad AB = AC = BC$$

$\triangle ABC$ が正三角形になるための条件であるから、 $\arg \beta = -\arg \alpha$ より

$$\arg \alpha^n = n \arg \alpha = \frac{n}{3}\pi \equiv \pm \frac{2}{3}\pi \pmod{6} \quad \text{よって} \quad n \equiv \pm 2 \pmod{6}$$

このとき、(2) の結果により $(a_n, b_n) = (-1, 3)$ ■

7 (1) $f_n(x) = \frac{a_n}{x}$ より $f'_n(x) = -\frac{a_n}{x^2}$

ℓ は、点 $(t, f_n(t))$ を通り、傾き $f'_n(t)$ の直線であるから

$$y - \frac{a_n}{t} = -\frac{a_n}{t^2}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{a_n}{t^2}x + \frac{2a_n}{t}$$

$$(2) \quad g_n(x) = x(x-1)^{2n} \text{ より} \quad g'_n(x) = (x-1)^{2n} + 2nx(x-1)^{2n-1} \\ = \{(2n+1)x-1\}(x-1)^{2n-1}$$

$$f_n(t) = g_n(t) \text{ より} \quad \frac{a_n}{t} = t(t-1)^{2n} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = t^2(t-1)^{2n} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'_n(t) = g'_n(t) \text{ より} \quad -\frac{a_n}{t^2} = \{(2n+1)t-1\}(t-1)^{2n-1}$$

$$\text{ゆえに} \quad a_n = -t^2\{(2n+1)t-1\}(t-1)^{2n-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から, $0 < t < 1$ に注意して

$$t^2(t-1)^{2n} = -t^2\{(2n+1)t-1\}(t-1)^{2n-1}$$

$$t-1 = -\{(2n+1)t-1\}$$

ゆえに $t = \frac{1}{n+1}$ これを ① に代入すると

$$a_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \left(\frac{1}{n+1} - 1\right)^{2n} = \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}$$

(3) $y = g_n(x)$ は x 軸と 2 点 $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を共有し, $0 \leq x \leq 1$ において, $g_n(x) \geq 0$ であるから

$$S_n = \int_0^1 x(x-1)^{2n} dx = \int_0^1 x(1-x)^{2n} dx$$

ここで, $1-x=t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = -1$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 0$

$$S_n = \int_1^0 (1-t)t^{2n}(-dt) = \int_0^1 (t^{2n} - t^{2n+1}) dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1 \\ = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

(4) 直線 $l: y = -\frac{a_n}{t^2}x + \frac{2a_n}{t}$ の x 切片 $2t$ および y 切片 $\frac{2a_n}{t}$ により

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2a_n}{t} = 2a_n = \frac{2n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)^{2n+2}}{2n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4\left(2 + \frac{1}{n}\right)} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^2 = \frac{e^2}{8}$$

■

8 (1) $z^3 - 1 = 0$ の解が z_1, z_2, z_3 であるから

$$\begin{aligned} z^3 - 1 &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \quad \cdots (*) \\ &= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)z - z_1z_2z_3 \end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較して

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0, \quad z_1z_2z_3 = 1$$

(2) $A(z_1), B(z_2), C(z_3), P(\alpha)$ より

$$AP^2 = |\alpha - z_1|^2 = (\alpha - z_1)(\bar{\alpha} - \bar{z}_1) = |\alpha|^2 - \bar{z}_1\alpha - z_1\bar{\alpha} + 1$$

$$\text{同様に } BP^2 = |\alpha|^2 - \bar{z}_2\alpha - z_2\bar{\alpha} + 1, \quad CP^2 = |\alpha|^2 - \bar{z}_3\alpha - z_3\bar{\alpha} + 1$$

上式および (1) の結果から, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0$ により

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= 3|\alpha|^2 - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)\alpha - (z_1 + z_2 + z_3)\bar{\alpha} + 3 \\ &= 3|\alpha|^2 + 3 \end{aligned}$$

$AP = |\alpha - z_1|, BP = |\alpha - z_2|, CP = |\alpha - z_3|$ および (*) により

$$\begin{aligned} AP \cdot BP \cdot CP &= |\alpha - z_1||\alpha - z_2||\alpha - z_3| \\ &= |(\alpha - z_1)(\alpha - z_2)(\alpha - z_3)| = |\alpha^3 - 1| \end{aligned}$$

(3) $z^3 = 1$ を解いて $z = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ に注意して

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad z_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

α が $\frac{z_2 - \alpha}{z_3 - \alpha} = ri \ (r > 0)$ を満たすとき

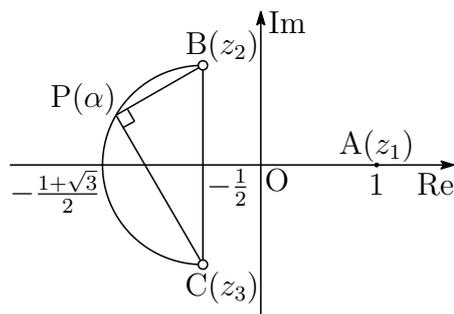
$$\angle z_3\alpha z_2 = \frac{\pi}{2}$$

したがって, 右の図のように, $P(\alpha)$ は BC を直径とする半円上にある (B, C を除く). また, (2) の結果から

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3|\alpha|^2 + 3$$

右上の図から, 上式は $\alpha = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ のとき, 最大となる.

$$\text{最大値は } 3 \left| -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right|^2 + 3 = \frac{12 + 3\sqrt{3}}{2}$$



このとき, $BP = CP$, すなわち, $|z_2 - \alpha| = |z_3 - \alpha|$ より, $r > 0$ に注意して

$$r = |ri| = \left| \frac{z_2 - \alpha}{z_3 - \alpha} \right| = \frac{|z_2 - \alpha|}{|z_3 - \alpha|} = 1$$

別解 $P(\alpha)$ は BC を直径とする半円上にあるから (B, C を除く)

$$BP^2 + CP^2 = BC^2, \quad BC = \sqrt{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad AP^2 + BP^2 + CP^2 = AP^2 + 3 \quad \dots (**)$$

前ページの図から, $\alpha = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ のとき, $(**)$ は最大となる.

このとき, $AP = 1 - \left(-\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ より, 求める最大値は

$$\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 = \frac{12 + 3\sqrt{3}}{2}$$

(4) $AP \cdot BP \cdot CP = |\alpha^3 - 1|$ に $\alpha = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ を代入して

$$\begin{aligned} AP \cdot BP \cdot CP &= \left| -\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^3 - 1 \right| \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^3 + 1 = \frac{9 + 3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

■