平成 30 年度　長崎大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
工学部　平成 30 年 3 月 12 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\triangle$ABC における角度 $\angle$CAB を α，$\angle$ABC を β，$\angle$BCA を γ，辺 BC の中点を M，辺 AB を含む直線に点 C から下ろした垂線との交点を H とする．また，$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$，辺 AB の長さを 2，辺 AC の長さを 5 とする．

(1) MC の長さを求めよ．

(2) $\triangle$ABC の面積 S を求めよ．

(3) 直角三角形 $\triangle$ACH の外接円の半径 R を求めよ．

(4) HC の長さを求めよ．

(5) 直角三角形 $\triangle$ACH の内接円の半径 r を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の (1)〜(5) に答えよ．

(1) 関数 $y = e^{-x} + x - 1$ の最小値を求めよ．

(2) 方程式 $x^3 + 3x^2 = a$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

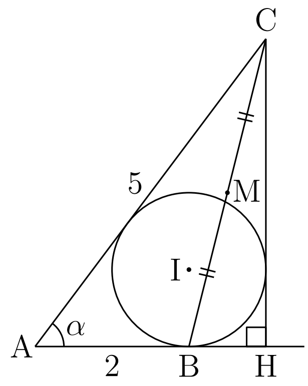
(3) 区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ の交点の座標と，この二つの曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{-3}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

(5) 関数 $y = x^{3x}$ $(x > 0)$ を x で微分せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos\alpha \\ &= 5^2 + 2^2 - 2\cdot5\cdot2\cdot\frac{3}{5} = 17\end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ より　$\mathrm{BC} = \sqrt{17}$

M は BC の中点であるから

$$\mathrm{MC} = \frac{\mathrm{BC}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{17}}{2}}$$

(2) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ より

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot5\cdot2\cdot\frac{4}{5} = \mathbf{4}$$

(3) $\mathrm{HC} = \mathrm{AC}\sin\alpha = 5\cdot\frac{4}{5} = \mathbf{4}$

(4) $\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\cos\alpha = 5\cdot\frac{3}{5} = 3$ より

$$\triangle\mathrm{ACH} = \frac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{CH} = \frac{1}{2}\cdot3\cdot4 = 6$$

$\triangle$ACH の内心を I とすると，$\triangle\mathrm{ICA} + \triangle\mathrm{ICH} + \triangle\mathrm{IHC} = \triangle\mathrm{ACH}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot5r + \frac{1}{2}\cdot3r + \frac{1}{2}\cdot4r = 6 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r = 1}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = e^{-x} + x - 1$ より　$y' = -e^{-x} + 1 = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$

右の増減表より　$x = 0$ で最小値 $\mathbf{0}$ をとる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x) = a$ が異なる3つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲は　$\boldsymbol{0 < a < 4}$

(3) $$\begin{cases} y=\sin x & \cdots ① \\ y=\sin 2x & \cdots ② \end{cases}$$

①，② から y を消去すると

$$\sin x=\sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x(2\cos x-1)=0$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ に注意して　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{3},\ 2\pi$

交点の座標は，これらを ① に代入して

$$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (2\pi,\ 0)}$$

求める面積 S は

$$S=\int_0^{\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx$ において，$x=2\pi-u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx&=\int_{\pi}^{0}|\sin(2\pi-u)-\sin 2(2\pi-u)|\,(-du)\\&=\int_0^{\pi}|-\sin u+\sin 2u|\,du=\int_0^{\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx\end{aligned}$$

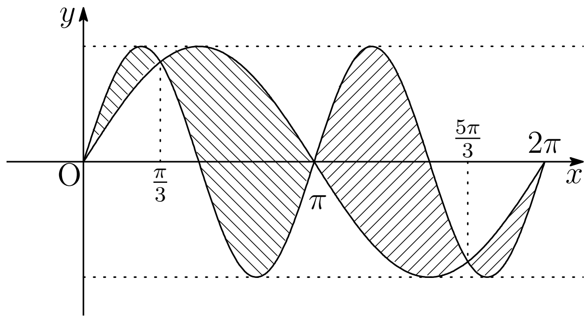
したがって　$\displaystyle\frac{S}{2}=\int_0^{\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx \quad \cdots(*)$

$f(x)=\sin x-\sin 2x=\sin x(1-2\cos x)$ とおくと

　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において　$f(x) \leqq 0$,　$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ において　$f(x) \geqq 0$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\cos x$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=-\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=F(0)+F(\pi)-2F\left(\frac{\pi}{3}\right)\\&=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{2}\end{aligned}$$
よって　$\boldsymbol{S=5}$



(4)

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx &= \int_{-3}^{1}\{1-(1-x)\}\sqrt{1-x}\,dx \\ &= \int_{-3}^{1}\left\{(1-x)^{\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{3}{2}}\right\}dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_{-3}^{1} = \boldsymbol{-\frac{112}{15}}\end{aligned}$$

(5) $y=x^{3x}$ の両辺の自然対数をとると　$\log y=\log x^{3x}=3x\log x$

これを微分すると

$$\frac{y'}{y}=3(\log x+1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y'=3x^{3x}(\log x+1)}$$