# 平成30年度　長崎大学2次試験前期日程 (数学問題)
# 平成30年2月25日

- 教育A・経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数I・II・A・B (80分)
- 教育B・薬学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 工・歯学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{5}{6}$ の極値を求めよ．さらに，3次方程式 $f(x) = k$ が，異なる正の解を2個，負の解を1個もつように，定数 $k$ の値の範囲を定めよ．

(2) $0 < \theta < \pi$ で $\tan\theta = -2\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\cos\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする．

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとき，初項 $a_1$ および一般項 $a_n$ を求めよ．

(4) 座標平面上に原点O，点A(5, 2)，点B(11, 10) がある．条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ を満たす点P$(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値，およびそのときのPの座標をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ 2x^2 & (x \geqq 0) \end{cases}$$

と定義する．曲線 $C : y = f(x)$ の上に2点A$(-a,\ a^2)$，B$(a,\ 2a^2)$ がある．ただし，$a$ は正の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線ABの方程式を求めよ．また，線分ABの長さを求めよ．

(2) 曲線 $C$ と直線ABで囲まれる図形の面積 $S$ を求めよ．

(3) 2点A，Bにおける曲線 $C$ の接線を，それぞれ $\ell$，$m$ とする．$\ell$，$m$ の方程式を求めよ．さらに，$\ell$ と $m$ の交点Dの座標を求めよ．

(4) 直線ABと直線 $\ell$ が直交するように，$a$ の値を定めよ．このとき，曲線 $C$ と2直線 $\ell$，$m$ とで囲まれる図形の面積 $T$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする．

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとき，初項 $a_1$ および一般項 $a_n$ を求めよ．

(2) $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = A$ とするとき，

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

の値を $A$ を用いて表せ．

(3) 方程式

$$\log_2 x^2 = 2 + \log_2 |x - 2|$$

を解け．

(4) 関数 $f(x)$ を

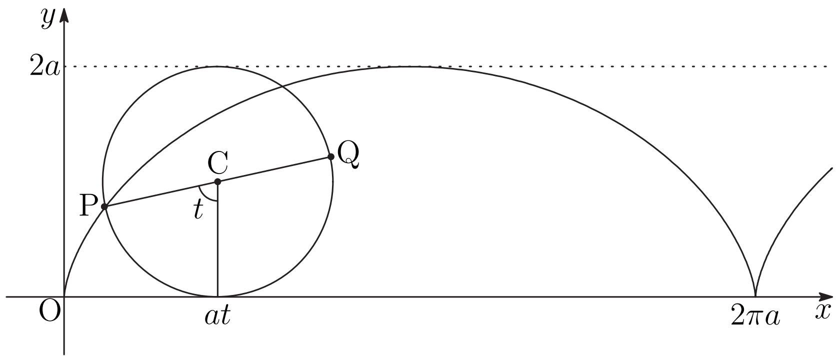
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geqq 0) \end{cases}$$

と定義する．「微分係数の定義」にしたがって，$f(x)$ の $x = 0$ における微分係数を求めよ．

$\boxed{4}$ 半径 $a$ の円が $x$ 軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき，円周上の 2 つの定点 P と Q の運動について考える．時刻 $t=0$ のとき P は原点 O にあり，Q は点 $(0,\ 2a)$ にある．円は毎秒 1 ラジアンの速さで回転する．このとき，点 P の時刻 $t$ における座標 $(x,\ y)$ は

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

で表される．以下の問いに答えよ．




(1) 時刻 $t$ における円の中心 C と点 Q の座標を，それぞれ求めよ．

(2) 時刻 $t$ における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ．また，時刻 $t$ が $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲において，速さ $|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|$ の最大値と最小値，およびその時の P の座標を求めよ．

(3) 時刻 $t$ における点 Q の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ．さらに，内積 $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}} \cdot \overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ．

(4) 時刻 $t = \dfrac{\pi}{2}$ から $t = \dfrac{3\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のり $L_{\mathrm{P}}$ と，点 Q が動く道のり $L_{\mathrm{Q}}$ を，それぞれ求めよ．

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + 2$ がある．曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点を P とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減および凹凸を調べ，極値および P の座標を求めよ．

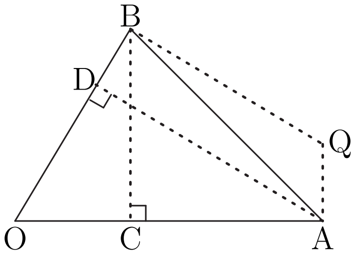
(2) 曲線 $C$ 上の点 P における接線を $\ell$ とする．また，P を通り $\ell$ に垂直な直線を $m$ とする．$\ell$，$m$ の方程式を求めよ．

(3) 直線 $m$ と曲線 $C$ との交点で，P と異なる点を Q，R とする．ただし，Q の $x$ 座標は R の $x$ 座標より小さいものとする．このとき，$C$ と線分 PR とで囲まれる図形 $F$ の面積 $S$ を求めよ．

(4) P を通り，図形 $F$ の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 三角形 OAB において

$$\mathrm{OA}=a,\quad \mathrm{OB}=b,\quad \angle\mathrm{O}=\theta$$




とおく．ただし，$0<b\leqq a$，$0<\theta<\pi$ である．また，点 C と D は，それぞれ，直線 OA と OB 上にあり，CB⊥OA，DA⊥OB を満たす．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，この三角形の外心 P について調べる．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $a$，$b$，$\theta$，$\vec{a}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $a$，$b$，$\theta$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) OA の A を通る垂線と，OB の B を通る垂線との交点を Q とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ となる実数 $\ell$，$m$ がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ であることに注意して，$\ell$ と $m$ の値を $a$，$b$，$\theta$ を用いて表せ．

(3) Q が (2) の点であるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=p\vec{a}+q\vec{b}$$

となる実数 $p$，$q$ がある．$p$ と $q$ の値を $a$，$b$，$\theta$ を用いて表せ．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\vec{a}+s\vec{b}$$

を満たす $r$ と $s$ の値を $a$，$b$，$\theta$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $t$ を正の実数とし，複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ がある．等式

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{t}\,|z-t| \qquad \text{(a)}$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の全体が表す図形を $F$ とする．下の小問 (1) から (4) を通して $F$ がどのような図形を表すか調べたい．以下の問いに答えよ．

(1) A と B はどちらも図形 $F$ の点ではないことを示せ．

(2) $t=1$ ならば，$F$ はどのような図形を表すか．

(3) $t\neq 1$ とする．図形 $F$ の点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 AB 上に位置するような $z$ の値は 2 つある．その値 $z_1$ と $z_2$ を求めよ．ただし，$|z_1|<|z_2|$ とする．

(4) $t\neq 1$ とする．2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ として，$m$ の値を求めよ．また，$\mathrm{P}(z)$ が図形 $F$ の点であるとき，$|z-m|$ の値を求めよ．さらに，$F$ はどのような図形を表すか．

$\boxed{8}$ 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$0! = 1$ と定める．また，関数 $y = t^0$ は，関数 $y = 1$ を意味する．

(1) 部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ．同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ．

(2) $F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ．その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ．さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ．さらに，$n \geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ．

(4) $p(x) = x^n$ とおくとき，$k$ 次導関数

$$p^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

を求めよ．そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\, dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)$$

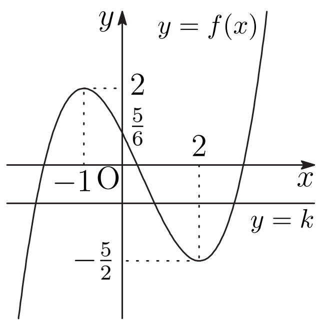
が成り立つことを示せ．ただし，$p^{(0)}(x) = p(x)$ と定める．

# 正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{5}{6}$ より

$$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ |




よって　極大値 $f(-1)=\mathbf{2}$，極小値 $f(2)=\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}}$

また，3 次方程式 $f(x)=k$ が，異なる正の解を 2 個，負の解を 1 個もつ $k$ の値の範囲は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の $x$ 座標が $x>0$ の範囲に 2 個と $x<0$ の範囲に 1 個もつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-\frac{5}{2}<k<\frac{5}{6}}$$

(2) $0<\theta<\pi$ で $\tan\theta=-2\sqrt{2}<0$ であるから　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$　$\cdots$①

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より　$1+(-2\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　ゆえに　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

① より，$\cos\theta<0$ であるから　$\boldsymbol{\cos\theta=-\dfrac{1}{3}}$

これを $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ に代入すると　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{3}$

① より，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ に注意して

$$\boldsymbol{\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(3) $S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots (*)$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると　$S_1 = 6 - 2a_1$

$S_1 = a_1$ であるから　$a_1 = 6 - 2a_1$　これを解いて　$\boldsymbol{a_1 = 2}$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$ であるから，$(*)$ より

$$a_n = 6n - 2a_n - \{6(n-1) - 2a_{n-1}\}$$

整理すると　$3a_n = 2a_{n-1} + 6$　ゆえに　$a_n - 6 = \dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 6)$

これから，数列 $\{a_n - 6\}$ は初項 $-4$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n - 6 = -4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから，求める一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

(4) $\mathrm{A}(5,\ 2)$，$\mathrm{B}(11,\ 10)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x - 5,\ y - 2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = (x - 11,\ y - 10)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ であるから　$(x-5)(x-11) + (y-2)(y-10) = 0$

したがって　$(x-8)^2 + (y-6)^2 = 25 \quad \cdots (*)$

よって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡は　**中心 (8，6)，半径 5 の円**

円 $(*)$ の中心を C，$\vec{r} = (4,\ 3)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\vec{r}$，$|\vec{r}| = 5$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \vec{r} = 3\vec{r}$,　すなわち，**P(12，9)** のとき　最大値 $3|\vec{r}| = \mathbf{15}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + (-\vec{r}) = \vec{r}$, すなわち，**P(4，3)** のとき　最小値 $|\vec{r}| = \mathbf{5}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2 点 $\mathrm{A}(-a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(a,\ 2a^2)$ を通る直線の方程式は

$$y-a^2=\frac{2a^2-a^2}{a-(-a)}(x+a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a^2}$$

線分 AB の長さは $(a>0)$

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{a-(-a)\}^2+(2a^2-a^2)^2}=\sqrt{4a^2+a^4}=\boldsymbol{a\sqrt{4+a^2}}$$

(2) $C$ は下に凸であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_{-a}^{0}\left(\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a^2-x^2\right)dx+\int_{0}^{a}\left(\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a^2-2x^2\right)dx\\&=\int_{-a}^{a}\left(\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a^2\right)dx-\int_{-a}^{0}x^2\,dx-\int_{0}^{a}2x^2\,dx\\&=\left[\,\frac{a}{4}x^2+\frac{3}{2}a^2x\,\right]_{-a}^{a}-\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_{-a}^{0}-\left[\,\frac{2}{3}x^3\,\right]_{0}^{a}=\boldsymbol{2a^3}\end{aligned}$$

(3) $x<0$ のとき，$f(x)=x^2$ より，$f'(x)=2x$ であるから，$\ell$ の方程式は

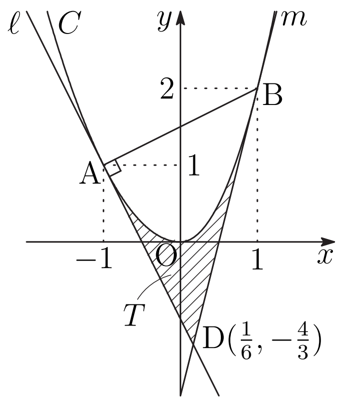
$$y-a^2=-2a(x+a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-2ax-a^2}$$

$x\geqq 0$ のとき，$f(x)=2x^2$ より，$f'(x)=4x$ であるから，$m$ の方程式は

$$y-2a^2=4a(x-a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=4ax-2a^2}$$

$\ell$ と $m$ の連立方程式を解いて　$\boldsymbol{\mathrm{D}\left(\frac{a}{6},-\frac{4}{3}a^2\right)}$

(4) 直線 AB と直線 $\ell$ が直交するから $(a>0)$




$$\frac{a}{2}\cdot(-2a)=-1\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=1}$$

このとき　$\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$

(3) の結果から　$\mathrm{D}\left(\frac{1}{6},-\frac{4}{3}\right)$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AD}=\frac{7}{6}\sqrt{5}$

したがって　$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=\frac{35}{12}$

(2) の結果から　$S=2$　よって　$T=\triangle\mathrm{ABD}-S=\frac{35}{12}-2=\boldsymbol{\frac{11}{12}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\boxed{1}$ (3) を参照.

(2) $\theta = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ とおくと，$A = \sin\theta$ であるから

$$
\begin{aligned}
&(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\
=&2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
=&2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos 2\theta \\
=&2 - 2(1 - 2\sin^2\theta) = 4\sin^2\theta = \boldsymbol{4A^2}
\end{aligned}
$$

(3) 方程式から　$\log_2 x^2 = \log_2 4|x-2|$

真数は正であるから　$x^2 = 4|x-2| > 0$

(i) $x > 2$ のとき　$x^2 = 4(x-2)$　ゆえに　$(x-2)^2 = -4$

これを満たす実数 $x$ は存在しない.

(ii) $x < 2$ のとき　$x^2 = 4(2-x)$　ゆえに　$(x+2)^2 = 12$

$x < 2$ に注意して　$x = -2 \pm 2\sqrt{3}$

(i),(ii) より　$\boldsymbol{x = -2 \pm 2\sqrt{3}}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geqq 0) \end{cases}$ より　$f(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1, \\
&\lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to -0}(x + 1) = 1
\end{aligned}
$$

よって　$f'(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 中心Cの座標 $(x,\ y)$ は　$\boldsymbol{x = at,\quad y = a}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = a\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t + \sin t) \\ a(1 + \cos t) \end{pmatrix}$$

よって，点Qの座標 $(x,\ y)$ は　$\boldsymbol{x = a(t + \sin t),\quad y = a(1 + \cos t)}$

(2) Pの座標 $(x,\ y)$ は，$x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}} = (a(1 - \cos t),\ a\sin t)}$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において　$|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}| = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}$

$$= a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|$ は　$t = \pi$, すなわち, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\pi a,\ 2a})$ のとき, 最大値 $\boldsymbol{2a}$
$t = 0,\ 2\pi$, すなわち, $\mathbf{P(0,\ 0)}$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{2\pi a,\ 0})$ のとき, 最小値 $\mathbf{0}$

(3) (1) の結果から　$\boldsymbol{\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}} = (a(1 + \cos t), -a\sin t)}$

ゆえに　$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}} = a^2(1 - \cos t)(1 + \cos t) - a^2\sin^2 t = \mathbf{0}$

(4) $L_{\mathrm{P}} = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{4\sqrt{2}a}$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において　$|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}| = a\sqrt{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t}$

$$= a\sqrt{2(1 + \cos t)} = 2a\left|\cos\frac{t}{2}\right|$$

$$L_{\mathrm{Q}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2a\cos\frac{t}{2}\,dt - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 2a\cos\frac{t}{2}\,dt$$

$$= \left[4a\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[4a\sin\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{4(2 - \sqrt{2})a}$$

**5** (1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+2$ より　$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$,　$f''(x)=2x$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 変曲点 | ↘ | 極小 | ↗ |

よって　**極大値** $\boldsymbol{f(-1)=\dfrac{8}{3}}$, **極小値** $\boldsymbol{f(1)=\dfrac{4}{3}}$, **変曲点** $\mathbf{P(0,\ 2)}$

(2) (1) の結果から　$f'(0)=-1$　ゆえに　$\ell$ の傾きは $-1$, $m$ の傾きは $1$

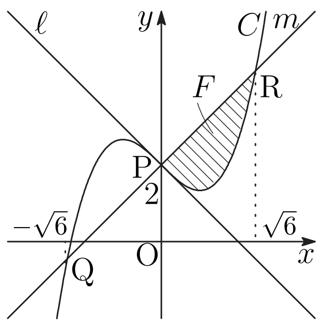
$\ell$, $m$ は点 $\mathrm{P}(0,\ 2)$ を通るから　$\boldsymbol{\ell : y=-x+2}$,　$\boldsymbol{m : y=x+2}$

(3) $C : y=\dfrac{1}{3}x^3-x+2$, $m : y=x+2$ の共有点の $x$ 座標は

$$\frac{1}{3}x^3-x+2=x+2 \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2-6)=0$$

これを解いて　$x=0,\ \pm\sqrt{6}$

$F$ は右の図の斜線部分であるから




$$S=\int_0^{\sqrt{6}}\left\{x+2-\left(\frac{1}{3}x^3-x+2\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{6}}\left(2x-\frac{1}{3}x^3\right)dx=\left[\ x^2-\frac{1}{12}x^4\ \right]_0^{\sqrt{6}}=\mathbf{3}$$

(4) (3) の図から, $F$ を二等分する直線の方程式を $y=ax+2\ (-1<a<1)$ とおくと, この直線と $C$ の共有点の $x$ 座標は

$$\frac{1}{3}x^3-x+2=ax+2 \quad \text{ゆえに} \quad x\{x^2-3(a+1)\}=0$$

これを解いて　$x=0,\ \pm\sqrt{3(a+1)}$

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\sqrt{3(a+1)}}\left\{ax+2-\left(\frac{1}{3}x^3-x+2\right)\right\}dx$$

$$\frac{3}{2}=\int_0^{\sqrt{3(a+1)}}\left\{(a+1)x-\frac{1}{3}x^3\right\}dx$$

$$=\left[\ \frac{1}{2}(a+1)x^2-\frac{1}{12}x^4\ \right]_0^{\sqrt{3(a+1)}}=\frac{3}{4}(a+1)^2$$

したがって, $\dfrac{3}{4}(a+1)^2=\dfrac{3}{2}$ を $-1<a<1$ に注意して解くと　$a=\sqrt{2}-1$

よって, 求める直線の方程式は　　$\boldsymbol{y=(\sqrt{2}-1)x+2}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\vec{a}$, $\vec{b}$と同じ向きの単位ベクトルを，それぞれ$\vec{e}$, $\vec{f}$とおくと　$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{a}$, $\vec{f}=\dfrac{\vec{b}}{b}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\mathrm{OB}\cos\theta)\vec{e}=(b\cos\theta)\dfrac{\vec{a}}{a}=\boldsymbol{\dfrac{b\cos\theta}{a}\vec{a}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\mathrm{OA}\cos\theta)\vec{f}=(a\cos\theta)\dfrac{\vec{b}}{b}=\boldsymbol{\dfrac{a\cos\theta}{b}\vec{b}}$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}-\dfrac{b\cos\theta}{a}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}-\dfrac{a\cos\theta}{b}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ および上の 2 式から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\ell\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\&=\vec{a}+\ell\left(\vec{b}-\frac{b\cos\theta}{a}\vec{a}\right)=\left(1-\frac{b\cos\theta}{a}\ell\right)\vec{a}+\ell\vec{b}\qquad\cdots①\\\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m\overrightarrow{\mathrm{DA}}\\&=\vec{b}+m\left(\vec{a}-\frac{a\cos\theta}{b}\vec{b}\right)=m\vec{a}+\left(1-\frac{a\cos\theta}{b}m\right)\vec{b}\qquad\cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$は 1 次独立であるから

$$1-\frac{b\cos\theta}{a}\ell=m,\quad \ell=1-\frac{a\cos\theta}{b}m$$

上の 2 式から $m$ を消去すると　$\ell=1-\dfrac{a\cos\theta}{b}\left(1-\dfrac{b\ell\cos\theta}{a}\right)$

したがって　$\ell(1-\cos^2\theta)=1-\dfrac{a\cos\theta}{b}$　　すなわち　$\boldsymbol{\ell=\dfrac{b-a\cos\theta}{b\sin^2\theta}}$

これから　$$\begin{aligned}m&=1-\frac{b\cos\theta}{a}\cdot\frac{b-a\cos\theta}{b\sin^2\theta}\\&=1-\frac{\cos\theta(b-a\cos\theta)}{a\sin^2\theta}=\boldsymbol{\frac{a-b\cos\theta}{a\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=p\vec{a}+q\vec{b}$は，①，② より　$p=m$, $q=\ell$

よって　$\boldsymbol{p=\dfrac{a-b\cos\theta}{a\sin^2\theta}}$, $\boldsymbol{q=\dfrac{b-a\cos\theta}{b\sin^2\theta}}$

$\angle\mathrm{OAQ}=\angle\mathrm{OBQ}=90^\circ$ より，OQ は △AOB の外接円の直径である．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より　$r=\dfrac{1}{2}p=\boldsymbol{\dfrac{a-b\cos\theta}{2a\sin^2\theta}}$, $s=\dfrac{1}{2}q=\boldsymbol{\dfrac{b-a\cos\theta}{2b\sin^2\theta}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1)
$$F : t\left|z+\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t}|z-t| \quad \cdots\text{(a)}$$

(a) に $z=t$ を代入すると，$t>0$ より

$$(\text{左辺}) = t\left|t+\frac{1}{t}\right| = t\left(t+\frac{1}{t}\right) > 0, \quad (\text{右辺}) = 0$$

(a) に $z=-\dfrac{1}{t}$ を代入すると，$t>0$ より

$$(\text{左辺}) = 0, \quad (\text{右辺}) = \frac{1}{t}\left|-\frac{1}{t}-t\right| = t\left(\frac{1}{t}+t\right) > 0$$

よって，$\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ は，図形 $F$ の点ではない．

(2) $t=1$ のとき　$F : |z+1| = |z-1|$

$F$ の点 $z$ は 2 点 $(1)$，$(-1)$ から等距離にあるから，$F$ は虚軸にある直線．

(3) (a) より，$t^2\left|z+\dfrac{1}{t}\right|^2 = \dfrac{1}{t^2}|z-t|^2$ であるから $(t \neq 1)$

$$\begin{aligned}
t^2\left(z+\frac{1}{t}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t^2}(z-t)(\overline{z}-t) \\
\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)z\overline{z} + \left(t+\frac{1}{t}\right)(z+\overline{z}) &= 0 \\
z\overline{z} + \frac{t}{t^2-1}(z+\overline{z}) &= 0 \\
\left|z+\frac{t}{t^2-1}\right|^2 &= \frac{t^2}{(t^2-1)^2} \\
\left|z-\frac{t}{1-t^2}\right| &= \frac{t}{|1-t^2|} \quad \cdots(*)
\end{aligned}$$

したがって，$F$ は中心が $\dfrac{t}{1-t^2}$ で，半径 $\dfrac{t}{|1-t^2|}$ の円である．

よって，条件から　$\boldsymbol{z_1 = 0}$，$\boldsymbol{z_2 = \dfrac{2t}{1-t^2}}$

(4) (3) の結果から　$m = \dfrac{z_1+z_2}{2} = \boldsymbol{\dfrac{t}{1-t^2}}$　$(*)$ より　$\boldsymbol{|z-m| = \dfrac{t}{|1-t^2|}}$

よって，**$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{m}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{|m|}$ の円**である．

$\boxed{8}$ (1) 部分積分法により

$$\begin{aligned}F_2(x) &= \int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}\,dt = -\int_0^x \frac{t^2}{2!}(e^{-t})'\,dt \\ &= -\left[\ \frac{t^2}{2!}e^{-t}\ \right]_0^x + \int_0^x \frac{t}{1!}e^{-t}\,dt = \boldsymbol{-\frac{x^2}{2!}e^{-x} + F_1(x)}, \\ F_1(x) &= \int_0^x te^{-t}\,dt = -\int_0^x t(e^{-t})'\,dt \\ &= -\left[\ te^{-t}\ \right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt = \boldsymbol{-xe^{-x} + F_0(x)}\end{aligned}$$

(2) $F_0(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[\ -e^{-t}\ \right]_0^x = \boldsymbol{1 - e^{-x}}$

上式および (1) の結果により

$$\begin{aligned}F_1(x) &= -xe^{-x} + (1 - e^{-x}) = \boldsymbol{1 - e^{-x}(x+1)} \\ F_2(x) &= -\frac{x^2}{2}e^{-x} + \{1 - e^{-x}(x+1)\} = \boldsymbol{1 - e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)}\end{aligned}$$

(3) (1) と同様に，部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt = -\int_0^x \frac{t^n}{n!}(e^{-t})'\,dt \\ &= -\left[\ \frac{t^n}{n!}e^{-t}\ \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt = \boldsymbol{-\frac{x^n}{n!}e^{-x} + F_{n-1}(x)}\end{aligned}$$

$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{x^k}{k!}e^{-x}$ であるから $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\{F_k(x) - F_{k-1}(x)\} &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x} \\ F_n(x) - F_0(x) &= -e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} \qquad \cdots (*)\end{aligned}$$

$F_0(x) = 1 - e^{-x}$ を $(*)$ の辺々に加えると

$$\boldsymbol{F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}$$

(4) $p(x)=x^n$ より $\quad \boldsymbol{p^{(k)}(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}}$

(3) の結果から $\displaystyle \int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt = 1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

ここで $\displaystyle \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$

よって $\displaystyle \int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$

**解説** 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx=\frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$
$$\int e^{-x+q}f(x)\,dx=-e^{-x+q}\left\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\right\}+C$$

本題は，上の第 2 式を用いると

$$\int_0^x e^{-t}p(t)\,dt=-\sum_{k=0}^{n}\Big[\,e^{-t}p^{(k)}(t)\,\Big]_0^x=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(0)-\sum_{k=0}^{n}e^{-x}p^{(k)}(x)$$

$p(x)=x^n$ であるから $\quad p^{(k)}(0)=\begin{cases}0 & (k=0,1,2,\cdots,n-1)\\ n! & (k=n)\end{cases}$

よって $\displaystyle \int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$

**注意** $\displaystyle e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdots$(a) は，$x\neq 0$ のとき，$\displaystyle e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdots$(b) と表記できるが，$x=0$ のとき，$0^0$ の項が現れ不適切である (不定形)．そこで便宜的に $0^0=1$ と定めておけば，(a) はすべての $x$ について (b) と表記できる．大学数学では，このように「$0^0=1$」と定めて計算する流儀がある．

$(*)$ より，正確には，$\displaystyle F_n(x)=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$ であるが，この便宜的な流儀にならい，$\displaystyle F_n(x)=1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ と表記してもよい．