平成 29 年度　長崎大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
工学部　平成 29 年 3 月 12 日

1 a，b を定数として，二次関数

$$f(x) = x^2 + 2(a + b - 1)x + a^2 + b^2 + a - b + 2ab$$

について，$y = f(x)$ のグラフを C とする．

(1) C の頂点の座標 $(x_c,\ y_c)$ を a と b を用いて表せ．

(2) C が y 軸に対して対称となるとき，b を a を用いて表せ．

(3) (2) において，C の直線 $y = 2x - 2$ と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を示せ．

(4) (3) において，異なる 2 つの交点の x 座標を x_1，x_2 とすると，$\dfrac{|x_2|}{|x_1|} = 2$ となる a をすべて求めよ．

2 (1) x についての整式 $P(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$ を $x - 5$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) 3 次方程式 $x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = 0$ のすべての解を求めよ．

(3) 関数 $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$ の極大値を求めよ．

(4) 関数 $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$ と y 軸との交点 A と，その関数の変曲点 B を通る直線の方程式を求めよ．

(5) 関数 $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$ と，(4) で求めた直線上の線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^2 + 2(a+b-1)x + a^2 + b^2 + a - b + 2ab$

$$= x^2 + 2(a+b-1)x + (a+b-1)^2 + 3a + b - 1$$
$$= (x+a+b-1)^2 + 3a + b - 1 \quad \cdots ①$$

$C : y = f(x)$ の頂点は　$\boldsymbol{(-a-b+1,\ 3a+b-1)}$

(2) C が y 軸に関して対称となるのは，頂点の x 座標が 0 であるから，(1) の結果より

$$-a-b+1 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = -a+1}$$

(3) (2) の結果から，C の方程式は　$y = x^2 + 2a$

これと $y = 2x - 2$ から y を消去すると

$$x^2 + 2a = 2x - 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2 = -2a - 1 \quad \cdots ①$$

この方程式の解が 2 個であるから

$$-2a - 1 > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a < -\frac{1}{2}}$$

(4) $k = \sqrt{-2a-1} \cdots ②$ とすると，① より，交点の x 座標は　$1 \pm k$

ここで，$k > 0$ とし

$$g(k) = \frac{1-k}{1+k} = \frac{2}{k+1} - 1$$

とおくと，$g(k)$ は単調減少で，$-1 < g(k) < 1$ であるから

$$|g(k)| = \frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{1}{3},\ 3$$

① より，$a = -\dfrac{k^2+1}{2}$ であるから　$\boldsymbol{a = -\frac{5}{9}, -5}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 剰余の定理により，整式 $P(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$ を $x-5$ で割った余りは

$$P(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 25 = 5^2(5-9+3+1) = \mathbf{0}$$

(2) (1) の結果から，$P(x)$ が $x-5$ を因数にもつことに注意して

$$P(x) = (x-5)(x^2-4x-5) = (x-5)^2(x+1)$$

よって，求める方程式の解は　$\boldsymbol{x = 5}$**(2 重解)，$\boldsymbol{-1}$**

(3) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$$

増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 32	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって，$x = 1$ で**極大値 32**

(4) 関数 $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$ のグラフと y 軸との交点 A の座標は　$(0,\ 25)$
$y'' = 6x - 18 = 6(x-3)$ より，$x = 3$ のとき，$y = 16$
ゆえに，変曲点 B の座標は　$(3,\ 16)$
したがって，2 点 A$(0,\ 25)$，B$(3,\ 16)$ を通る直線の方程式は

$$\boldsymbol{y = -3x + 25}$$

(5) $x < 3$ のとき，$y'' < 0$ であるから，$0 < x < 3$ において

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$$

のグラフは，直線 AB の上側にあるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{(x^3 - 9x^2 + 15x + 25) - (-3x + 25)\}\,dx \\ &= \int_0^3 (x^3 - 9x^2 + 18x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 9x^2\right]_0^3 = \frac{3^4}{4} - 3^4 + 3^4 = \boldsymbol{\frac{81}{4}} \end{aligned}$$