平成 29 年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成 29 年 2 月 25 日

- 教育 A・経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) △OAB において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を M とし，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を N とする．また，線分 AN と線分 BM の交点を P とし，直線 OP と辺 AB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 連立不等式

$$x + y \leqq 4, \quad y \leqq 2x + 4, \quad y \geqq 0$$

の表す領域と放物線 $y = x^2 - 6x + k$ が共有点をもつように，定数 k の値の範囲を求めよ．

(3) $a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\sin^4\theta + \cos^4\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2つの放物線 $C_1 : y = 2x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2mx + 1$ について考える．ただし，m を正の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) A，B を C_1 上の2点とし，その x 座標をそれぞれ α，β とする．ただし，$\alpha < \beta$ である．このとき，直線 AB の傾きおよび y 切片を，α と β で表せ．

(2) C_1 と C_2 は異なる2点で交わることを示せ．(1) の2点 A，B が C_1 と C_2 の交点であるとき，2次方程式の解と係数の関係を利用して，$\alpha + \beta$，$\alpha\beta$ を求めよ．さらに，$\beta - \alpha$ および直線 AB の方程式を m を用いて表せ．

(3) (2) の点 A，B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ D，E とする．このとき，四角形 ABED の面積 S を m を用いて表せ．

(4) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 T を m を用いて表せ．

(5) (3) と (4) で求めた S，T について，

$$S : T = 3 : 2$$

となるような定数 m の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ．

(2) e を自然対数の底とする．$x > e$ の範囲において，関数

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

を考える．この両辺の対数を x について微分することにより，y は減少関数であることを示せ．また，$e < a < b$ のとき，$a^b > b^a$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n n(n-1)$$

であるとき，$a_{n+1} - a_n$ を n の式で表し，a_n が最大となる整数 n をすべて求めよ．

(4) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ が，原点を中心とする半径3の円の周上を動くとき，

$$w = \frac{z + 3i}{z}$$

で表される点 $Q(w)$ はどのような図形を描くか．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 空間内の3点A，B，Cを頂点とする△ABCを考える．2辺BC，ACの中点をそれぞれM，Nとし，中線AMとBNの交点をGとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) 2点P，Qが $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たすとき，3点P，Q，Gは同一直線上にあることを示せ．

(3) △ABCの頂点の座標が A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(7,\ 0,\ 6)$，C$(2,\ 12,\ 5)$ であるとき，xy 平面上を動く点 P$(x,\ y,\ 0)$ を考える．このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ の最小値とそのときのPの座標を求めよ．

(4) (3)において，特に点 P$(x,\ y,\ 0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする．$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ の最大値とそのときのPの座標，および最小値とそのときのPの座標を，それぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2つの関数 $f(x)=\log x$，$g(x)=e^x$ がある．原点Oから曲線 $C_1: y=f(x)$ に引いた接線を ℓ_1，接点をAとし，原点Oから曲線 $C_2: y=g(x)$ に引いた接線を ℓ_2，接点をBとする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ_1 の方程式と接点Aの座標を求めよ．また，接線 ℓ_2 についても，その方程式と接点Bの座標を求めよ．

(2) C_1 と ℓ_1 および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) C_1，C_2，x 軸，y 軸および線分ABで囲まれた図形の面積 T を求めよ．

(4) 直線ABに平行な直線 m と曲線 C_1，C_2 の交点を，それぞれP，Qとする．Qの座標を $(t,\ e^t)$ とおくとき，線分PQの長さを t の式で表し，PQの長さの最小値と，そのときのP，Qの座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ xy 平面上に放物線 $C : y = x^2$ と直線 $\ell : y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ がある．$t > 0$ とし，ℓ 上を動く点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4}\right)$ から C に接線を引く．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P を通り，傾き m の直線が C に接するとき，m が満たす 2 次方程式を求めよ．さらに，この 2 次方程式は，常に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) で求めた 2 次方程式の解を m_1，m_2 $(m_1 < m_2)$ とする．このとき，$m_1 + m_2$，$m_1 m_2$，$m_2 - m_1$ を，それぞれ t の式で表せ．

(3) 傾き m_1，m_2 の 2 本の接線が x 軸の正の向きとなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．このとき，$m_1 = \tan\theta_1$，$m_2 = \tan\theta_2$ を利用して $\tan(\theta_2 - \theta_1)$ を t の式で表せ．さらに，この式を $f(t)$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ．

(4) $t > 0$ であることに注意して，(3) の関数 $f(t)$ の最小値と，そのときの t の値および $\theta_2 - \theta_1$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 放物線 $C : y = x^2$ と定点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ および C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_1(2,\ 4)$ が与えられている．自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ について，以下の操作を繰り返す．

> C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ {p_n}^2)$ に対し，
>
> **手順 1** 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ と C との交点のうち，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$ とし，
>
> **手順 2** 直線 $\mathrm{Q}_n\mathrm{B}$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ {p_{n+1}}^2)$ とする．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を定数とする．直線 $y = ax + 1$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とする．このとき，$pq = -1$ が成り立つことを示せ．また，点 Q_1 の座標を求めよ．

(2) 点 P_2，Q_2 および P_3 の座標を求めよ．

(3) 数列 $\{p_n\}$ および数列 $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(4) $x \geqq 0$ の範囲において，C と直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ．さらに，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円がある．この円の周上に 2 点 $\mathrm{A}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ と $\mathrm{B}(\cos\beta, \sin\beta)$ をとる．ただし，$0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．さらに，2 点 A, B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ C, D とする．扇形 OAB の面積を S_1，弧 AB と線分 BD，DC，CA で囲まれた図形 F の面積を S_2 とするとき，以下の問いに答えよ．
<u>ただし，扇形 OAB と図形 F は，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の範囲にあるものとする．</u>

(1) S_1 を α と β で表せ．

(2) S_2 を α と β で表せ．

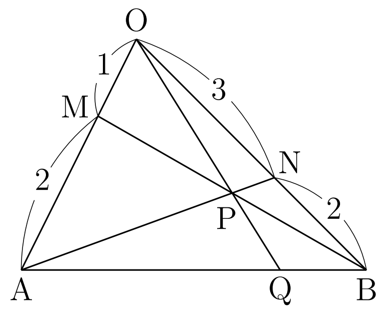
(3) $S_1 = S_2$ のとき，β を α の式で表せ．また，このとき $t = \cos\alpha - \cos\beta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) (3) のとき，扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とする．さらに，$V = V_1 - V_2$ とする．V を t の式で表せ．

(5) (4) において，V の最大値，およびそのときの A，B の座標を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) チェバの定理 $\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NO}}=1$ により



$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\dfrac{2}{3}=1$ ゆえに $\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=3:1$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}}$

$\triangle$OQB と直線 AN について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PQ}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NO}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PQ}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=1$$

これから，$\mathrm{OP}:\mathrm{PQ}=2:1$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}=\boldsymbol{\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{6}}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと，$\vec{a}=3\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\vec{b}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{3}y\overrightarrow{\mathrm{ON}}=3x\overrightarrow{\mathrm{OM}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

P は 2 直線 AN，BM 上の点であるから $x+\dfrac{5}{3}y=3x+y=1$

これを解いて $x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{1}{2}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

また，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおけるから

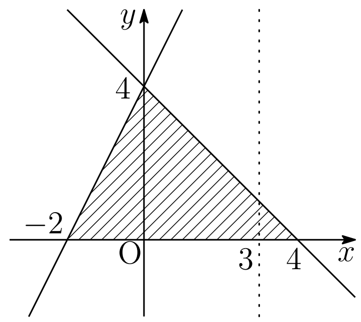
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$$

Q は線分 AB 上の点であるから

$$\frac{k}{6}+\frac{k}{2}=1 \quad \text{これを解いて} \quad k=\frac{3}{2}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

(2) 連立不等式



$$x + y \leqq 4, \quad y \leqq 2x + 4, \quad y \geqq 0$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．放物線 $y = x^2 - 6x + k \cdots ①$ は

$$y = (x-3)^2 + k - 9$$

放物線の軸 $x = 3$ に注意すると，k が最大となるのは，直線 $x + y = 4$ 上の点であるから $(0 \leqq x \leqq 4)$，① に $y = 4 - x$ を代入すると

$$4 - x = x^2 - 6x + k \quad \text{ゆえに} \quad k = -x^2 + 5x + 4 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{41}{4}$$

したがって，$x = \dfrac{5}{2}$，すなわち，$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき，k は最大値 $\dfrac{41}{4}$ をとる．

また，k が最小となるのは，点 $(-2,\ 0)$ のときであるから，① により

$$0 = (-2)^2 - 6\cdot(-2) + k \quad \text{すなわち} \quad k = -16$$

よって，求める定数 k の値の範囲は　　$\boldsymbol{-16 \leqq k \leqq \dfrac{41}{4}}$

(3) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$ より　$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 1$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ であるから　$b_1 = a_2 - a_1 = 0$，$b_{n+1} = b_n + 1$

したがって，$\{b_n\}$ は初項 0，公差 1 の等差数列であるから

$$b_n = 0 + 1(n-1) = \boldsymbol{n - 1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}(k-1) \\ a_n - 1 &= \frac{1}{2}(n-1)(0 + n - 2) \\ a_n &= \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4) \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するので　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)}$

(4) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$0\leqq 2\theta\leqq 2\pi$ であるから

$\sin 2\theta=0$　すなわち　$2\theta=0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき　最大値 1

$\sin 2\theta=\pm 1$　すなわち　$2\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　最小値 $\dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$ **のとき最大値 1，**　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $C_1: y=2x^2$ 上の 2 点 A，B の x 座標がそれぞれ α，β であるから，
2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ 2\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 2\beta^2)$ を通る直線の方程式は

$$y-\alpha^2=\frac{2\beta^2-2\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\quad\text{すなわち}\quad y=2(\alpha+\beta)x-2\alpha\beta$$

よって　傾き $\boldsymbol{2(\alpha+\beta)}$，　y 切片 $\boldsymbol{-2\alpha\beta}$

(2) C_1，C_2 の方程式から，y を消去すると

$$2x^2=-x^2+2mx+1\quad\text{整理すると}\quad 3x^2-2mx-1=0\quad\cdots(*)$$

$(*)$ の係数について　$D/4=(-m)^2-3\cdot(-1)=m^2+3>0$

したがって，C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わる．

$(*)$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\boldsymbol{\frac{2m}{3}},\qquad \alpha\beta=\boldsymbol{-\frac{1}{3}}\qquad\cdots(**)$$

上の 2 式から，$\alpha<\beta$ により

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\left(\frac{2m}{3}\right)^2-4\left(-\frac{1}{3}\right)}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{m^2+3}}$$

直線 AB の方程式は，(1) の結果により　$\boldsymbol{y=\dfrac{4m}{3}x+\dfrac{2}{3}}$

(3) $\mathrm{A}(\alpha,\ 2\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 2\beta^2)$，$\mathrm{D}(\alpha,\ 0)$，$\mathrm{E}(\beta,\ 0)$ を頂点とする四角形 ABED の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2)(\beta-\alpha)=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}(\beta-\alpha)\\&=\left\{\left(\frac{2m}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}\times\frac{2}{3}\sqrt{m^2+3}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{27}(2m^2+3)\sqrt{m^2+3}}\end{aligned}$$

(4) $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$-x^2+2mx+1 \geqq 2x^2$ であるから，(∗∗) により

$$\begin{aligned} T &= \int_\alpha^\beta \{(-x^2+2mx+1)-2x^2\}\,dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta \left(x^2-\frac{2m}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{m^2+3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{27}(m^2+3)\sqrt{m^2+3}} \end{aligned}$$

(5) (3),(4) の結果から

$$\begin{aligned} S:T &= \frac{4}{47}(2m^2+3)\sqrt{m^2+3} : \frac{4}{27}(m^2+3)\sqrt{m^2+3} \\ &= (2m^2+3):(m^2+3) \end{aligned}$$

$S:T=3:2$ であるから

$$(2m^2+3):(m^2+3)=3:2 \quad \text{ゆえに} \quad m^2=3$$

$m>0$ であるから　　$\boldsymbol{m=\sqrt{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $4\sin^3\theta+3\cos^2\theta = 4\sin^3\theta+3(1-\sin^2\theta) = 4\sin^3\theta-3\sin^2\theta+3$

$t=\sin\theta$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき　$0 \leqq t \leqq 1$

また，$f(t)=4t^3-3t^2+3\ (0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと

$$f'(t)=12t^2-6t=6t(2t-1)$$

$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	↘	極小 $\frac{11}{4}$	↗	4

よって　$t=1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{2}}$ のとき　最大値 **4**

$t=\frac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\frac{11}{4}}$

(2) $y=x^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると　$\log y=\dfrac{1}{x}\log x$

これを x について微分すると

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad y'=\frac{1}{x^2}(1-\log x)x^{\frac{1}{x}}$$

$x>e$ において，$y'<0$ であるから，$x>e$ において，y は減少関数.

したがって，$e<a<b$ のとき　　$a^{\frac{1}{a}}>b^{\frac{1}{b}}$

この両辺を ab 乗すると　$\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^{ab}>\left(b^{\frac{1}{b}}\right)^{ab}$　よって　$a^b>b^a$

(3) $a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$ より

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}(n+1)n-\left(\frac{3}{4}\right)^n n(n-1)\\&=\left(\frac{3}{4}\right)^n n\left\{\frac{3}{4}(n+1)-(n-1)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n n(7-n)\end{aligned}$$

したがって　$a_1<a_2<\cdots<a_6<a_7=a_8>a_9>\cdots$

よって，a_n が最大となる正の整数 n は　　$\boldsymbol{n=7,\ 8}$

別解 $a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$，$a_{n+1}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}(n+1)n$ より

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}\cdot\frac{n+1}{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}-1=\frac{3(n-1)}{4(n-1)}-1=\frac{7-n}{4(n-1)}$$

したがって　$a_1=0<a_2<\cdots<a_6<a_7=a_8>a_9>\cdots$

よって，a_n が最大となる正の整数 n は　　$n=7,\ 8$

(4) 点 $\mathrm{P}(z)$ は，原点を中心とする半径 3 の円の周上にあるから　$|z|=3$

$w=\dfrac{z+3i}{z}$ より，$z(w-1)=3i$ であるから

$$|z(w-1)|=|3i| \quad \text{ゆえに} \quad |z||w-1|=3 \quad \text{よって} \quad |w-1|=1$$

したがって，$\mathrm{Q}(w)$ は，**点 1 を中心とする半径 1 の円を描く.**

4 (1) △ABC の 2 本の中線の交点 G は，△ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathbf{AG}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}})$$

(2) (1) の結果から，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} &= \overrightarrow{\mathrm{PA}} + (\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + (\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= 3\overrightarrow{\mathrm{PA}} + (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= 3\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AG}} = 3\overrightarrow{\mathrm{PG}} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たすとき　　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 3\overrightarrow{\mathrm{PG}}$

よって，3 点 P，Q，G は同一直線上にある．

(3) 3 点 A(0, 0, 1)，B(7, 0, 6)，C(2, 12, 5) を頂点とする △ABC の重心 G は

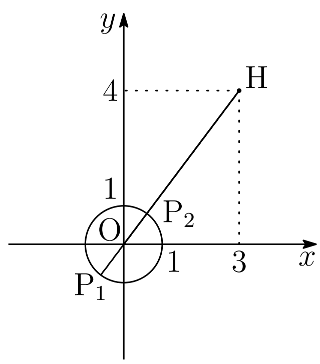
$$\left(\frac{0+7+2}{3},\ \frac{0+0+12}{3},\ \frac{1+6+5}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3,\ 4,\ 4)$$

① より，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}}| = 3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}| \cdots ②$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}}| = 3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}| = 3\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2 + 16}$$

よって，P**(3, 4, 0)** のとき，最小値 **12** をとる．

(4) G から xy 平面に垂線 GH を引くと　H(3, 4, 0)



$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{GH}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{HP}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{HP}}|^2 + 16 \quad \cdots ③\end{aligned}$$

xy 平面上において，直線 OH と円 $x^2 + y^2 = 1$ の 2 つの交点を

$$\mathrm{P_1}\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \quad \mathrm{P_2}\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

とおくと，P が $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ にあるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|$ は，それぞれ 6，4 となる．

$4 \leqq |\overrightarrow{\mathrm{HP}}| \leqq 6$ であるから，②，③ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ は

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}, -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}},\ \mathbf{0}\right) \text{のとき，最大値 } 3\sqrt{6^2+16} = \mathbf{6\sqrt{13}}$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}},\ \mathbf{0}\right) \text{のとき，最小値 } 3\sqrt{4^2+16} = \mathbf{12\sqrt{2}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=\log x$ を微分すると　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$C_1: y=\log x$ と ℓ_1 の接点Aを $(a,\ \log a)$ とすると，ℓ_1 の方程式は

$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a)\quad すなわち\quad y=\frac{x}{a}+\log a-1$$

この直線は原点を通るから　$0=\log a-1$　ゆえに　$a=e$

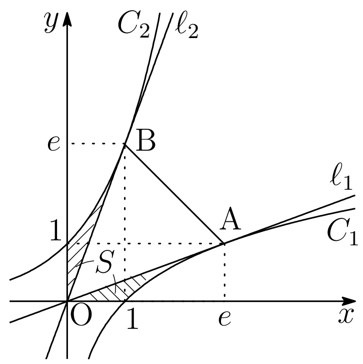
よって　　$\mathbf{A}(\boldsymbol{e},\ \mathbf{1})$，$\boldsymbol{\ell_1 : y=\dfrac{x}{e}}$

C_1 と C_2 は直線 $y=x$ に関して対称であるから，点B，接線 ℓ_2 は，それぞれ点A，接線 ℓ_1 と直線 $y=x$ に関して対称である．

よって　　$\mathbf{B}(\mathbf{1},\ \boldsymbol{e})$，$\boldsymbol{\ell_2 : y=ex}$

(2) C_1 と ℓ_1 および x 軸で囲まれた図形の面積 S は，(1) で述べた対称性により，C_2 と ℓ_2 および y 軸で囲まれた図形の面積に等しいので

$$S=\int_0^1 (e^x-ex)\,dx$$
$$=\left[\ e^x-\frac{e}{2}x^2\ \right]_0^1=\boldsymbol{\frac{e}{2}-1}$$



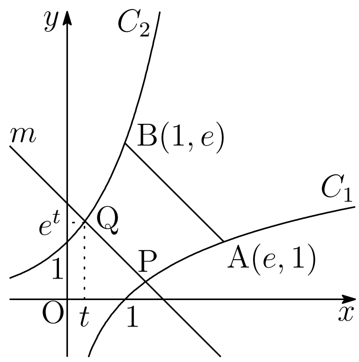
(3) 3点O(0, 0)，A(e, 1)，B(1, e) を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|e\cdot e-1\cdot 1|=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

したがって，(2) の図から，面積 T は

$$T=2S+\triangle\mathrm{OAB}=2\left(\frac{e}{2}-1\right)+\frac{1}{2}(e^2-1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^2+2e-5)}$$

(4) 直線 AB に平行な直線 m 上にある 2 点 P，Q は直線 $y=x$ に関して対称である．点 $\mathrm{Q}(t,\ e^t)$ のとき，点 P の座標は $(e^t,\ t)$ であるから



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{(t-e^t)^2+(e^t-t)^2}\\ &= \sqrt{2}|e^t-t|\end{aligned}$$

$h(t)=e^t-t$ とおくと　$h'(t)=e^t-1$

右の $h(t)$ の増減表より

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$$\mathbf{PQ}=\boldsymbol{\sqrt{2}(e^t-t)}$$

また，$t=0$，すなわち，**P(1, 0)**，**Q(0, 1)** のとき，PQ は最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ をとる．

6 (1) $y=x^2$ を微分すると，$y'=2x$ であるから，$C: y=x^2$ 上の点における接線の傾きが m となるとき，接点の x 座標は

$$2x=m \quad ゆえに \quad x=\frac{m}{2}$$

したがって，C 上の点 $\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m^2}{4}\right)$ を通り，傾き m の直線は

$$y-\frac{m^2}{4}=m\left(x-\frac{m}{2}\right) \quad すなわち \quad y=mx-\frac{m^2}{4}$$

この直線が点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}\right)$ を通るから，m が満たす 2 次方程式は

$$\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}=mt-\frac{m^2}{4} \quad すなわち \quad \boldsymbol{m^2-4tm+2t-1=0} \quad \cdots(*)$$

この m に関する 2 次方程式 $(*)$ の係数について

$$D/4=(-2t)^2-1(2t-1)=4t^2-2t+1=4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって，方程式 $(*)$ は，常に異なる 2 つの実数解をもつ．

(2) 2次方程式 $(*)$ の解が m_1，m_2 であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{m_1+m_2=4t,\quad m_1m_2=2t-1}$$

また，$m_1<m_2$ であるから，上の2式から

$$\begin{aligned} m_2-m_1 &= \sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2} \\ &= \sqrt{(4t)^2-4(2t-1)} = \boldsymbol{2\sqrt{4t^2-2t+1}} \end{aligned}$$

(3) $m_1=\tan\theta_1$，$m_2=\tan\theta_2$ であるから，(2) の結果により

$$\begin{aligned} \tan(\theta_2-\theta_1) &= \frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} \\ &= \frac{2\sqrt{4t^2-2t+1}}{1+(2t-1)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{4t^2-2t+1}}{t}} \end{aligned}$$

$f(t)=\dfrac{\sqrt{4t^2-2t+1}}{t}$ であるから

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^2-2t+1}}{t} = \lim_{t\to\infty}\sqrt{4-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}} = \boldsymbol{2}$$

(4) $t>0$ より　$f(t)=\sqrt{4-\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2+3}$

したがって，$f(t)$ は，$\boldsymbol{t=1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ をとる.

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta_1<\theta_2<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\theta_2-\theta_1<\pi$ であるから

$$\tan(\theta_2-\theta_1)=\sqrt{3}\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\theta_2-\theta_1=\frac{\pi}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ を通る直線の方程式は $(q<0<p)$

$$y-p^2=\frac{q^2-p^2}{q-p}(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y=(p+q)x-pq \quad \cdots(*)$$

直線 $(*)$ が $y=ax+1$ に一致するから　$pq=-1$

2 点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ {p_n}^2)$，$\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$ を通る直線は，$(*)$ より

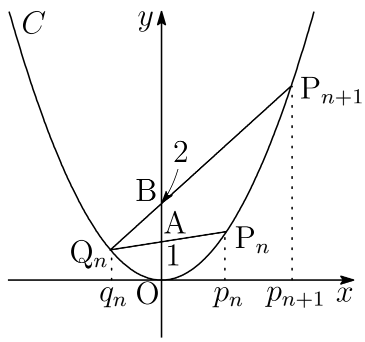
$$y=(p_n+q_n)x-p_nq_n$$

これが，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通るから　$p_nq_n=-1 \quad \cdots①$

$p_1=2$ のとき，① より　$q_1=-\dfrac{1}{2}$

よって，C 上の点 Q_1 の座標は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)}$

(2) 2 点 $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ {p_{n+1}}^2)$，$\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$ を通る直線は，$(*)$ より



$$y=(p_{n+1}+q_n)x-p_{n+1}q_n$$

これが，点 $\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通るから

$$p_{n+1}q_n=-2 \quad \cdots②$$

① に $n=2$，② に $n=1,\ 2$ を代入すると

$$p_2q_2=-1, \quad p_2q_1=-2. \quad p_3q_2=-2$$

これに (1) の結果の $q_1=-\dfrac{1}{2}$ を代入することにより

$$p_2=4, \quad q_2=-\frac{1}{4}, \quad p_3=8$$

P_2，Q_2，P_3 は，C 上の点であるから

$$\mathbf{P_2(4,\ 16)}, \quad \mathbf{Q_2}\boldsymbol{\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{16}\right)}, \quad \mathbf{P_3(8,\ 64)}$$

(3) ①，② から，q_n を消去すると　　$p_{n+1} = 2p_n$

$p_1 = 2$ より，数列 $\{p_n\}$ は，初項 2，公比 2 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{p_n = 2^n} \quad \text{これを①に代入して} \quad \boldsymbol{q_n = -\frac{1}{2^n}}$$

(4) (1) の結果から直線 PQ の方程式が $y = (p_n + q_n)x + 1$ であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{p_n} \left\{(p_n + q_n)x + 1 - x^2\right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(p_n + q_n)x^2 + x \right]_0^{p_n} \\ &= \frac{1}{6}{p_n}^3 + \frac{1}{2}{p_n}^2 q_n + p_n \qquad (p_n q_n = -1) \\ &= \frac{1}{6}{p_n}^3 + \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{6}(2^n)^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^n = \boldsymbol{\frac{1}{6}(8^n + 3\cdot 2^n)} \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1} + 3\cdot 2^{n+1}}{8^n + 3\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 + 6\cdot 2^{-2n}}{1 + 3\cdot 2^{-2n}} = \boldsymbol{8}$

8 (1) $\angle\mathrm{AOB} = \beta - \alpha$ より　$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2(\beta - \alpha) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(\beta - \alpha)}$

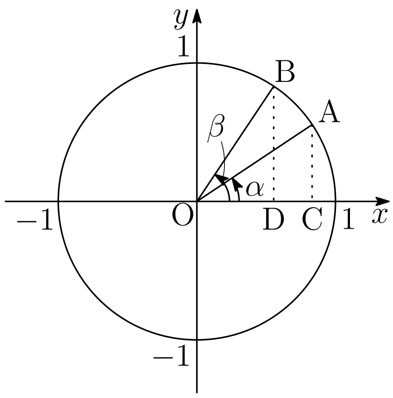
(2) $\displaystyle \triangle\mathrm{OAC} = \frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$

$\displaystyle \qquad = \frac{1}{4}\sin 2\alpha$

同様に　$\displaystyle \triangle\mathrm{OBD} = \frac{1}{4}\sin 2\beta$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= (\triangle\mathrm{OAC} + S_1) - \triangle\mathrm{OBD} \\ &= (\triangle\mathrm{OAC} - \triangle\mathrm{OBD}) + \mathrm{S}_1 \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + S_1 \qquad \cdots ① \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)} \end{aligned}$$



(3) $S_1 = S_2$ のとき，① より

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 0 \quad \text{すなわち} \quad \cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = 0$$

$0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \beta + \alpha < \pi$，$0 < \beta - \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\beta + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha}$$

したがって
$$\begin{aligned} t &= \cos\alpha - \cos\beta = \cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \cos\alpha - \sin\alpha \quad \cdots ② \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

このとき，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} - \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{0 < t < 1}$

(4) $\triangle$OAC を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を V_α とすると

$$V_\alpha = \frac{\pi}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$$

同様に，$\triangle$OBD を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を V_β とすると，$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ であるから

$$V_\beta = \frac{\pi}{3}\sin^2\beta\cos\beta = \frac{\pi}{3}\cos^2\alpha\sin\alpha$$

このとき，$V_1 + V_\alpha = V_2 + V_\beta$ であるから

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = V_\beta - V_\alpha \\ &= \frac{\pi}{3}\cos^2\alpha\sin\alpha - \frac{\pi}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= \frac{\pi}{3}\cos\alpha\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) \end{aligned}$$

② より　$t^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$　ゆえに　$\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{1-t^2}{2}$

よって　　$V = \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{1-t^2}{2} \times t = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}(t - t^3)}$

(5) $f(t)=\dfrac{\pi}{6}(t-t^3)$ $(0<t<1)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{\pi}{6}(1-3t^2)=\frac{\pi}{6}(1+\sqrt{3}\,t)(1-\sqrt{3}\,t)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大 $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi$	$\searrow$	

したがって，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{27}\pi}$ **をとる．**

このとき，② より　　$\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　$\cdots$③

③ を等式 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=2$ に代入することにより

$$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\frac{5}{3}$$

このとき，$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$ より　$\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$　　$\cdots$④

③，④ を解いて

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$$

また，(3) の結果 $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ により　　$\cos\beta=\sin\alpha,\quad \sin\beta=\cos\alpha$

よって，2 点 A，B の座標は

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}}\right),\quad \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}}\right)$$