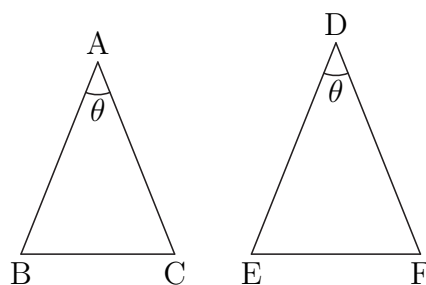


平成 28 年度 長崎大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
工学部 平成 28 年 3 月 12 日

- 1 次の文章を読み, (1) ~ (5) に答えよ. 解答用紙には答えのみを記入することとし, 二重根号があればはずし, 有理化できるものは有理化すること.

図のように, 頂点がともに θ の 2 つの二等辺三角形 ABC と DEF がある. 三角形 ABC においては $AB = AC = r$ であり, 三角形 DEF においては $DE = DF = r$ で, 頂点 D から底辺 EF に下ろした垂線の長さが r に等しいとする.



- (1) 三角形 ABC の底辺の長さを r と $\frac{\theta}{2}$ で表せ.
- (2) 三角形 DEF の底辺の長さを r と $\frac{\theta}{2}$ で表せ.
- (3) 三角形 ABC の面積を r と θ で表せ.
- (4) 三角形 ABC において, $r = 1$, $\theta = 30^\circ$ とし, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を用いて底辺 BC の長さを求めよ.
- (5) 三角形 DEF において, $r = 1$, $\theta = 30^\circ$ とし, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を用いて底辺 EF の長さを求めよ.
- 2 以下の (1) ~ (4) の定積分 J_n ($n = 2, 3, 4, 5$) の値を求めよ. (5) では (1) ~ (4) の結果をふまえて解答せよ.

(1) $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$

(2) $J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta$

(3) $J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta$

(4) $J_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta$

- (5) n がさらに増加した場合の定積分 $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ の値の変化を述べ, その理由を答えよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad BC = 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

$$(2) \quad EF = 2r \tan \frac{\theta}{2}$$

$$(3) \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$(4) \quad \text{余弦定理により} \quad BC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad BC = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$(5) \quad \text{半角の公式により} \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

これに $\theta = 30^\circ$ を代入すると

$$\tan^2 15^\circ = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$\tan 15^\circ > 0 \text{ であるから} \quad \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$r = 1$, $\theta = 30^\circ$ および (4) の結果を (2) の結果に代入すると

$$EF = 2 \cdot 1(2 - \sqrt{3}) = 2(2 - \sqrt{3})$$

$$\boxed{2} \quad J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta (\cos \theta)' d\theta \\ &= - \left[\sin^{n-1} \theta \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} \theta)' \cos \theta d\theta \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta d\theta = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

$$(1) \text{ 漸化式により } J_2 = \frac{1}{2}J_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \text{ 漸化式により } J_3 = \frac{2}{3}J_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$(3) (1) \text{ の結果および漸化式により } J_4 = \frac{3}{4}J_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{16}\pi$$

$$(4) (2) \text{ の結果および漸化式により } J_5 = \frac{4}{5}J_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

$$(5) 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$\sin^{n-1} \theta (1 - \sin \theta) \geq 0 \quad \left(\text{等号は } \theta = 0, \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} J_{n-1} - J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta (1 - \sin \theta) \, d\theta > 0 \end{aligned}$$

したがって, $\{J_n\}$ は単調減少列である.

(i) n が偶数のとき

$$J_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} J_0 \quad J_{n-1} = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdots \frac{2}{3} J_1$$

$$\text{上の2式の辺々を掛けると} \quad J_{n-1} J_n = \frac{1}{n} J_0 J_1$$

(ii) n が奇数のとき

$$J_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} J_1 \quad J_{n-1} = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdots \frac{1}{2} J_0$$

$$\text{上の2式の辺々を掛けると} \quad J_{n-1} J_n = \frac{1}{n} J_0 J_1$$

$$(i), (ii) \text{ より, 自然数 } n \text{ について} \quad J_{n-1} J_n = \frac{\pi}{2n}$$

$$0 < J_n < J_{n-1} \text{ であるから} \quad 0 < J_n < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理により} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$$

補足

(i) n が偶数のとき

$$\begin{aligned} n(n-2)\cdots 2 &= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdots 1 \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)! \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} J_0 = \frac{n!}{\{n(n-2)\cdots 2\}^2} J_0 \\ &= \frac{n!}{2^n \left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{n!}{2^{n+1} \left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2} \pi = \frac{{}_n C_{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}} \pi \end{aligned}$$

(ii) n が奇数のとき

$$\begin{aligned} (n-1)(n-3)\cdots 2 &= 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) \cdots 1 \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)! \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} J_1 = \frac{\{(n-1)(n-3)\cdots 2\}^2}{n!} J_1 \\ &= \frac{2^{n-1} \left\{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right\}^2}{n!} = \frac{2^{n-1}}{n \cdot {}_{n-1} C_{\frac{n-1}{2}}} \end{aligned}$$