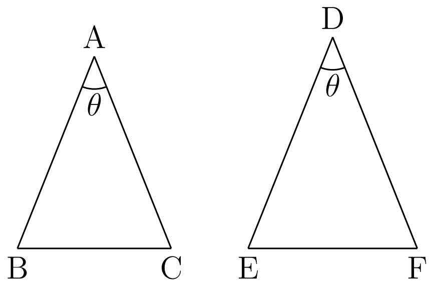
平成 28 年度　長崎大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
工学部　平成 28 年 3 月 12 日

問題 1 2

1 次の文章を読み，(1)〜(5) に答えよ．解答用紙には答えのみを記入することとし，二重根号があればはずし，有理化できるものは有理化すること．

図のように，頂点がともに θ の 2 つの二等辺三角形 ABC と DEF がある．三角形 ABC においては $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = r$ であり，三角形 DEF においては $\mathrm{DE} = \mathrm{DF}$ で，頂点 D から底辺 EF に下ろした垂線の長さが r に等しいとする．



(1) 三角形 ABC の底辺の長さを r と $\dfrac{\theta}{2}$ で表せ．

(2) 三角形 DEF の底辺の長さを r と $\dfrac{\theta}{2}$ で表せ．

(3) 三角形 ABC の面積を r と θ で表せ．

(4) 三角形 ABC において，$r = 1$，$\theta = 30^\circ$ とし，$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を用いて底辺 BC の長さを求めよ．

(5) 三角形 DEF において，$r = 1$，$\theta = 30^\circ$ とし，$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を用いて底辺 EF の長さを求めよ．

2 以下の (1)〜(4) の定積分 J_n $(n = 2, 3, 4, 5)$ の値を求めよ．(5) では (1)〜(4) の結果をふまえて解答せよ．

(1) $J_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta$

(2) $J_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta$

(3) $J_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\, d\theta$

(4) $J_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\, d\theta$

(5) n がさらに増加した場合の定積分 $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta$ の値の変化を述べ，その理由を答えよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\mathrm{BC}=\boldsymbol{2r\sin\frac{\theta}{2}}$

(2) $\mathrm{EF}=\boldsymbol{2r\tan\frac{\theta}{2}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\boldsymbol{\frac{1}{2}r^2\sin\theta}$

(4) 余弦定理により　$\mathrm{BC}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot\cos30^\circ=2-\sqrt{3}$

よって　$\mathrm{BC}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

(5) 半角の公式により　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

これに $\theta=30^\circ$ を代入すると

$$\tan^2 15^\circ=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})^2$$

$\tan15^\circ>0$ であるから　　$\tan15^\circ=2-\sqrt{3}$

$r=1$，$\theta=30^\circ$ および (4) の結果を (2) の結果に代入すると

$$\mathrm{EF}=2\cdot1(2-\sqrt{3})=\boldsymbol{2(2-\sqrt{3})}$$

■

$\boxed{2}$ $J_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}$，$J_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$\begin{aligned}J_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta(\cos\theta)'\,d\theta\\&=-\Big[\sin^{n-1}\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-1}\theta)'\cos\theta\,d\theta\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\cos^2\theta\,d\theta=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta\\&=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n\end{aligned}$$

したがって　　$J_n=\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$

(1) 漸化式により　$J_2 = \frac{1}{2}J_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(2) 漸化式により　$J_3 = \frac{2}{3}J_1 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(3) (1) の結果および漸化式により　$J_4 = \frac{3}{4}J_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{16}\pi}$

(4) (2) の結果および漸化式により　$J_5 = \frac{4}{5}J_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{8}{15}}$

(5) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\sin^{n-1}\theta(1-\sin\theta) \geqq 0 \qquad \left(\text{等号は } \theta = 0,\ \frac{\pi}{2} \text{ のとき}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} J_{n-1} - J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta(1-\sin\theta)\,d\theta > 0 \end{aligned}$$

したがって，**$\{J_n\}$ は単調減少列である．**

(i) n が偶数のとき

$$J_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}J_0 \qquad J_{n-1} = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdots\frac{2}{3}J_1$$

上の 2 式の辺々を掛けると　$J_{n-1}J_n = \frac{1}{n}J_0J_1$

(ii) n が奇数のとき

$$J_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}J_1 \qquad J_{n-1} = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdots\frac{1}{2}J_0$$

上の 2 式の辺々を掛けると　$J_{n-1}J_n = \frac{1}{n}J_0J_1$

(i),(ii) より，自然数 n について　$J_{n-1}J_n = \frac{\pi}{2n}$

$0 < J_n < J_{n-1}$ であるから　$0 < J_n < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} J_n = 0}$

補足

(i) n が偶数のとき

$$
\begin{aligned}
n(n-2)\cdots 2 &= 2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots 1 \\
&= 2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
J_n &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}J_0 = \frac{n!}{\{n(n-2)\cdots 2\}^2}J_0 \\
&= \frac{n!}{2^n\{\left(\frac{n}{2}\right)!\}^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{n!}{2^{n+1}\{\left(\frac{n}{2}\right)!\}^2}\pi = \frac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}}\pi
\end{aligned}
$$

(ii) n が奇数のとき

$$
\begin{aligned}
(n-1)(n-3)\cdots 2 &= 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\cdots 1 \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
J_n &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}J_1 = \frac{\{(n-1)(n-3)\cdots 2\}^2}{n!}J_1 \\
&= \frac{2^{n-1}\{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\}^2}{n!} = \frac{2^{n-1}}{n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}}
\end{aligned}
$$

■