平成 28 年度　長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
平成 28 年 2 月 25 日

- 教育 A・経済・水産・環境科学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学部　$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部　$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2 - x$ の頂点を P とする．点 Q はこの放物線上の点であり，原点 O(0, 0) とも点 P とも異なるとする．∠OPQ が直角であるとき，点 Q の座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ は以下の条件 (イ)，(ロ)，(ハ) を満たす．そのような正の数 a の値と $f(x)$ を求めよ．

(イ) $f'(x) = x^2 + ax$

(ロ) $f(0) = -1$

(ハ) $f(x)$ の極大値と極小値の差が $\dfrac{4}{81}$

(3) 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ を解け．

(4) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\sin 3x + \sin 2x < \sin x$ を解け．

2 空間において，3 点 A(5, 0, 1)，B(4, 2, 0)，C(0, 1, 5) を頂点とする三角形 ABC がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 AB，BC，CA の長さを求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ．

(3) 原点 O(0, 0, 0) から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，実数 ℓ，m の値を求めよ．

(4) 直線 AH と直線 BC の交点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくとき，実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ．

(5) 原点 O を頂点，四角形 ABHC を底面とする四角錐(すい)O-ABHC の体積 V を求めよ．

3 半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある．その面積を S とする．D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる．さらに，D_1 の各辺の中点を結んで正十二角形 D_2 をつくる．このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n \geqq 2)$．D_n の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) S と S_1 を求めよ．

(2) S_n を n の式で表せ $(n \geqq 1)$．

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ．ただし，

$$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$$

である．

4 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある．右の図 1 のように，2 辺 BC，CD 上に，$\mathrm{BS} = \mathrm{CT} = x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を満たす点 S，T をとる．このとき，三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい．以下の問いに答えよ．

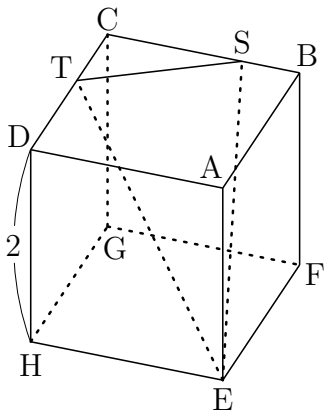


図 1

(1) 右の図 2 を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ．

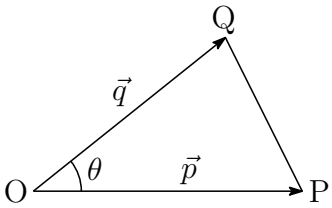


図 2

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \vec{c}$ とおく．立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ．

(3) 上の (1) を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値も答えよ．

5 以下の問いに答えよ．

(1) 関数

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

の増減を調べ，y のとり得る値の範囲を求めよ．また，この関数の逆関数を求めよ．

(2) 定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

について，I_1，I_2，I_3 を求めよ．

(3) 関数

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x} \quad (x > 0)$$

がある．曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点を $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ とする．曲線 C と直線 $x = a$，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

6 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，2 つの関数 $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$，$g(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ を考える．曲線 $C_1 : y = f(x)$ と曲線 $C_2 : y = g(x)$ で囲まれた図形を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最大値と最小値を求めよ．

(2) 曲線 C_1 は曲線 C_2 と原点に関して対称であることを示せ．

(3) 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)$ と $-g(x)$ の値の大小関係を調べよ．また，$g(x) \geqq 0$ が成り立つような x の範囲を求めよ．

(4) 図形 D の $x \geqq 0$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

7 関数 $f(x) = xe^x$ で定まる曲線 $C : y = f(x)$ を考える．p を正の数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，すべての x について

$$\{(ax+b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数 a，b の値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $\ell : y = c(x-p)+d$ とする．c と d の値を p を用いて表せ．さらに，区間 $x \geqq 0$ において関数 $g(x) = f(x) - \{c(x-p)+d\}$ の増減を調べ，不等式

$$f(x) \geqq c(x-p)+d \quad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形を F とする．その面積 $S(p)$ を求めよ．

(4) 2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える．R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ．

8 楕円(だえん) $x^2 + \dfrac{y^2}{a^2} = 1\ (a > 0)$ と y 軸の交点を $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(0, -a)$ とする．θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 AP の長さを ℓ とする．$X = \sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$Y = \ell^2$ となる関数を $Y = f(X)$ とする．$f(X)$ を X の式で表せ．

(2) $0 < a < 1$ の場合．

(1) の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し，そのときの X の値を求めよ．

(3) $a = 2$ の場合．

(1) の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を P_1 とする．$f(X)$ の最大値と P_1 の座標を求めよ．また，点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$ を中心とし点 P_1 を通る円を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y = x^2 - x = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ ゆえに $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

直線 OP の傾きは $\dfrac{-\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = -\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{Q}(t,\ t^2 - t)$ とすると，直線 OP と直線 PQ は垂直であるから

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 - t - \left(-\frac{1}{4}\right)}{t - \frac{1}{2}} = -1 \quad \text{整理すると} \quad (2t-1)(2t-5) = 0$$

$t \neq \dfrac{1}{2}$ であるから $t = \dfrac{5}{2}$ よって $\mathbf{Q}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}, \dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}\right)$

(2) $f'(x) = x^2 + ax = x(x+a)$ より $(a > 0)$，3 次関数 $f(x)$ は，極大値 $f(-a)$，極小値 $f(0)$ をとる．

$$f(-a) - f(0) = \int_0^{-a} f'(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2\right]_0^{-a} = \frac{1}{6}a^3$$

条件から，$f(-a) - f(0) = \dfrac{4}{81}$ であるから

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{4}{81} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$$

$f'(x) = x^2 + \dfrac{2}{3}x$ であるから，$f(0) = -1$ より $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 1}$

(3) 与えられた方程式から $2|\log_2 x|^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$

ここで，$t = |\log_2 x|$ とおくと $(t \geqq 0)$

$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-4)(2t+1) = 0$$

$t \geqq 0$ より $t = 4$ ゆえに $\log_2 x = \pm 4$ よって $x = 2^{\pm 4} = \mathbf{16,\ \frac{1}{16}}$

(4) 与えられた不等式から

$$\begin{aligned}(\sin 3x - \sin x) + \sin 2x &< 0\\ 2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x &< 0\\ \sin x(\cos 2x + \cos x) &< 0\\ \sin x(2\cos^2 x + \cos x - 1) &< 0\\ \sin x(\cos x + 1)(2\cos x - 1) &< 0\end{aligned}$$

$\sin x > 0$ すなわち $0 < x < \pi$ のとき $\cos x < \dfrac{1}{2}$

$\sin x < 0$ すなわち $\pi < x < 2\pi$ のとき $\cos x > \dfrac{1}{2}$

よって $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < x < \pi,\ \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi}$ ■

2 (1) A(5, 0, 1)，B(4, 2, 0)，C(0, 1, 5) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-4,-1,5),\quad \overrightarrow{\mathrm{CA}}=(5,-1,-4)$$

したがって　$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

$\mathrm{BC}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+5^2}=\boldsymbol{\sqrt{42}}$

$\mathrm{CA}=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-4)^2}=\boldsymbol{\sqrt{42}}$

(2) (1) の結果から，三角形 ABC は BC = CA の二等辺三角形であるから，C から辺 AB に下した垂線の長さは

$$\sqrt{(\sqrt{42})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{9}{2}\sqrt{2}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}\sqrt{3}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-5,1,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=(5,\ 0,\ 1)+\ell(-1,\ 2,-1)+m(-5,\ 1,\ 4)\\&=(5-\ell-5m,\ 2\ell+m,\ 1-\ell+4m)\quad\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=-1(5-\ell-5m)+2(2\ell+m)-1(1-\ell+4m)\\&=6\ell+3m-6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=-5(5-\ell-5m)+(2\ell+m)+4(1-\ell+4m)\\&=3\ell+42m-21\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$ より

$$\begin{cases}6\ell+3m-6=0\\3\ell+42m-21=0\end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{\ell=\dfrac{7}{9},\ m=\dfrac{4}{9}}$

(4) (3) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{11}{9}\cdot\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{11}$

ゆえに　$\boldsymbol{k=\dfrac{11}{9}}$，AM : MH = 9 : 2　よって　$T=\dfrac{2}{9}S=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(5) (3) の結果を ① に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 2,\ 2)$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=2\sqrt{3}$

(4) の結果から，四角形 ABHC の面積は　$\dfrac{11}{9}S=\dfrac{11}{9}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{3}=\dfrac{11}{2}\sqrt{3}$

よって　$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{11}{2}\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=\boldsymbol{11}$　■

3 (1) $S = 12 \times \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 30^\circ = \mathbf{3}$

S と S_1 の相似比は　$1 : \cos 15^\circ = 1 : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

S と S_1 の面積比は　$1 : \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 : \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

したがって　$S_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} S = \boldsymbol{\frac{3(2+\sqrt{3})}{4}}$

(2) $S_n = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n S = \mathbf{3}\left(\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

(3) (1)，(2) の結果を $S_n \leqq \frac{1}{2} S$ に代入すると

$$3\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \frac{1}{2} \cdot 3 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{4}{2+\sqrt{3}}\right)^n \geqq 2$$

2 を底とする対数をとると

$$n \log_2 \frac{4}{2+\sqrt{3}} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{1}{\log_2 \frac{4}{2+\sqrt{3}}} \quad \cdots (*)$$

$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$，$\log_2 \frac{4}{2+\sqrt{3}} = 2 - \log_2(2+\sqrt{3})$ より

$$\frac{1}{10} = 0.1 < \log_2 \frac{4}{2+\sqrt{3}} < 0.11 = \frac{11}{100}$$

したがって　$9 + \frac{1}{11} < \frac{1}{\log_2 \frac{4}{2+\sqrt{3}}} < 10$

よって，$(*)$ を満たす最小の整数 n は　**10**　■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta = \dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ES}} = \vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{ET}} = \frac{2-x}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2 = |\vec{a}|^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 2^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2$$
$$= \boldsymbol{x^2 + 8}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2 + 2^2$$
$$= \boldsymbol{(2-x)^2 + 8}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}} = \frac{2-x}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{x}{2}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \frac{2-x}{2}\cdot 2^2 + \frac{x}{2}\cdot 2^2 + 2^2$$
$$= \boldsymbol{8}$$

(3) (2) の結果を (1) に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)\{(2-x)^2+8\} - 8^2}$$

ここで，$y = 2 - x$ とおくと，$x + y = 2$ であるから

$$\begin{aligned}(x^2+8)\{(2-x)^2+8\} - 8^2 &= (x^2+8)(y^2+8) - 8^2\\ &= x^2y^2 + 8(x^2+y^2)\\ &= x^2y^2 + 8\{(x+y)^2 - 2xy\}\\ &= x^2y^2 + 8(4-2xy) = x^2y^2 - 16xy + 32\\ &= (8-xy)^2 - 32 = \{8 - x(2-x)\}^2 - 32\\ &= \{(x-1)^2+7\}^2 - 32\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\{(x-1)^2+7\}^2 - 32}}$

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ であるから，(3) の結果から

$\boldsymbol{x = 0,\ 2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ をとり，$\boldsymbol{x = 1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{17}}{2}}$ をとる．

■

5 (1) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より　$y'=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)=-1$$
$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)=1$$

y は単調増加　ゆえに　$\boldsymbol{-1<y<1}$

$y=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より　$e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$　ゆえに　$x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}\ \ (-1<x<1)}$

(2) $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\Big[-\log\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{1-\frac{\pi}{4}}$

$I_3=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan x\,dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)'\tan x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\Big[\frac{1}{2}\tan^2 x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_1=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2}$

(3) $f(x)=\dfrac{1+\log x}{x}=x^{-1}+x^{-1}\log x$ より

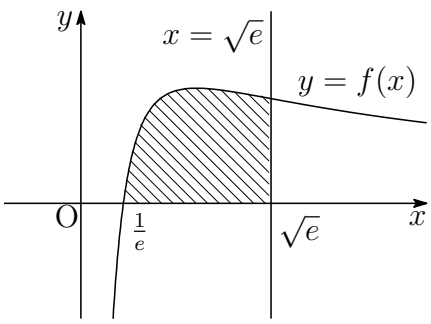
$$f'(x)=-x^{-2}-x^{-2}\log x+x^{-1}x^{-1}=-x^{-2}\log x$$
$$f''(x)=2x^{-3}\log x-x^{-2}x^{-1}=\frac{2\log x-1}{x^3}$$

$f(x)=0$ とすると　$1+\log x=0$　すなわち　$x=\dfrac{1}{e}$,
$f''(x)=0$ とすると　$2\log x-1=0$　すなわち　$x=\sqrt{e}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	極大	↘	変曲点	↘

求める面積を S とすると

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} \frac{1+\log x}{x}\,dx$$
$$= \int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} (1+\log x)(\log x)'\,dx$$
$$= \left[\ \log x + \frac{1}{2}(\log x)^2\ \right]_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{9}{8}}$$



■

6 (1) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ を微分すると

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	極大 $\sqrt{2}$	$\searrow$	1

よって，最大値 $\boldsymbol{f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{f(-1) = -1}$

(2) $f(-x) = -x + \sqrt{1-(-x)^2} = -(x - \sqrt{1-x^2}) = -g(x)$

よって，$C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ は原点に関して対称である．

(3) $f(x) - \{-g(x)\} = f(x) + g(x) = 2x$ であるから

$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 0}$ **のとき** $\boldsymbol{f(x) \leqq -g(x)}$,

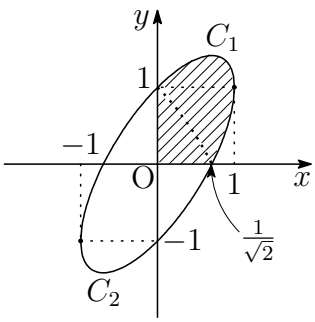
$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1}$ **のとき** $\boldsymbol{f(x) \geqq -g(x)}$

$g(x) \geqq 0$ のとき

$x - \sqrt{1-x^2} \geqq 0$　ゆえに　$x \geqq \sqrt{1-x^2} \geqq 0$

両辺を平方して　$x^2 \geqq 1 - x^2$

$0 \leqq x \leqq 1$ に注意して解くと　$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1}$



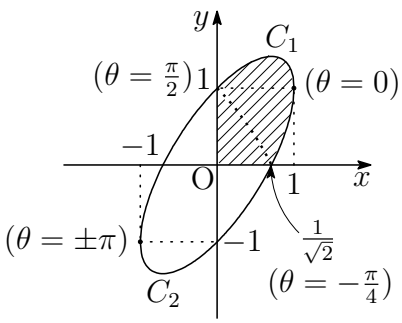
(4) (3) の結果から，求める体積は，上の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転

したものであるから

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (x+\sqrt{1-x^2}\,)^2 dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (x-\sqrt{1-x^2}\,)^2 dx \\ &= \int_0^1 (2x\sqrt{1-x^2}+1)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2x\sqrt{1-x^2}-1)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\pi}$

別解 $C(\theta) = (\cos\theta,\ \cos\theta+\sin\theta)$ とおくと，C_1，C_2 は，それぞれ $C(\theta)$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ および $-\pi \leqq \theta \leqq 0$ の部分である．



$x=\cos\theta$，$y=\cos\theta+\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}y^2\,dx = y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta &= (\cos\theta+\sin\theta)^2(-\sin\theta)\,d\theta \\ &= (-\sin\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \{g(x)\}^2\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (-\sin\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} (-\sin\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= \left[\cos\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\pi}$ ■

7 (1) $f(x)=xe^x$ より

$$f'(x)=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=\boldsymbol{(x+1)e^x}$$
$$f''(x)=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=e^x+(x+1)e^x=\boldsymbol{(x+2)e^x}$$

また　$\{(ax+b)e^x\}'=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ であるとき　$(ax+a+b)e^x=xe^x$

したがって　$a=1,\ a+b=0$　よって　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1}$

(2) C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-f(p)=f'(p)(x-p)\quad \text{ゆえに}\quad y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

上式および (1) の結果から　$c=f'(p)=\boldsymbol{(p+1)e^p}$，$d=f(p)=\boldsymbol{pe^p}$

$g(x)=f(x)-\{c(x-p)+d\}$ より

$$g(x)=f(x)-\{(p+1)e^p(x-p)+pe^p\}=f(x)-(p+1)e^px+p^2e^p$$
$$g'(x)=f'(x)-(p+1)e^p=f'(x)-f'(p)$$

(1) の結果から，$x\geqq 0$ において，$f''(x)>0$ であるから，$f'(x)$ は単調増加.
したがって，$g(x)$ の増減表は，次のようになる.

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

$x\geqq 0$ において $g(x)\geqq 0$ であるから　$f(x)-\{c(x-p)+d\}\geqq 0$

よって　$f(x)\geqq c(x-p)+d\quad (x\geqq 0)$

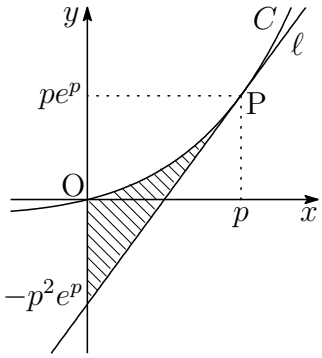
補足 $f''(x)>0$ である曲線 $y=f(x)$ とその曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を $y=h(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
f(x)-h(x)&=f(x)-\{f'(p)(x-p)+f(p)\}=\int_p^x f'(t)\,dt-f'(p)(x-p)\\
&=-\int_p^x (x-t)'f'(t)\,dt-f'(p)(x-p)\\
&=-\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_p^x+\int_p^x (x-t)f''(t)\,dx-f'(p)(x-p)\\
&=\int_p^x (x-t)f''(t)\,dt=\int_x^p (t-x)f''(t)\,dt
\end{aligned}$$

$x\geqq p$ のとき $\displaystyle\int_p^x (x-t)f''(t)\,dt\geqq 0$，　$x\leqq p$ のとき $\displaystyle\int_x^p (t-x)f''(t)\,dt\geqq 0$

したがって　$f(x)-h(x)\geqq 0$　よって　$f(x)\geqq h(x)$

(3) 図形 F は，下の図の斜線部分である．



よって，F の面積 $S(p)$ は，(1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^p g(x)\,dx = \int_0^p \{f(x) - (p+1)e^p x + p^2 e^p\}\,dx \\ &= \left[\ (x-1)e^x - \frac{1}{2}(p+1)e^p x^2 + p^2 e^p x\ \right]_0^p \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^p(p-1)(p^2+2)+1} \end{aligned}$$

(4) R は，P および点 $(0, -p^2e^p)$ を含む x 軸および y 軸に平行な長方形であるから，その面積の最小値 $T(p)$ は

$$T(p) = p\{pe^p - (-p^2e^p)\} = \boldsymbol{p^2(p+1)e^p}$$

よって
$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)} &= \lim_{p\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^p(p-1)(p^2+2)+1}{p^2(p+1)e^p} \\ &= \lim_{p\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{2}{p^2}\right)+\frac{2}{p^3e^p}}{2\left(1+\frac{1}{p}\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

8 (1) A$(0,\ a)$，P$(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \cos^2\theta + (a\sin\theta - a)^2\\ &= 1-\sin^2\theta + a^2(\sin\theta-1)^2\\ &= 1-X^2+a^2(X-1)^2\\ &= (a^2-1)X^2-2a^2X+a^2+1\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{f(X)=(a^2-1)X^2-2a^2X+a^2+1}$

(2) (1) の結果から　$f(X)=(a^2-1)\left(X-\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)^2+\dfrac{1}{1-a^2}$

$0<a<1$ より，$a^2-1<0$，$\dfrac{a^2}{a^2-1}<0$ であることに注意すると

$\dfrac{a^2}{a^2-1}<-1$　すなわち　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<1$ のとき　最大値 $\boldsymbol{f(-1)=4a^2}$

$\dfrac{a^2}{a^2-1}\geqq -1$　すなわち　$0<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)=\dfrac{1}{1-a^2}}$

(3) $a=2$ のとき

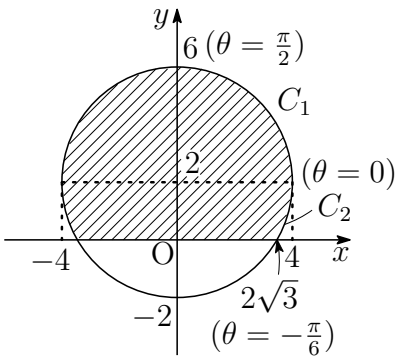
$$f(X)=3X^2-8X+5=3\left(X-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\quad(-1\leqq X\leqq 1)$$

したがって，$f(X)$ は $X=-1$，すなわち，$\mathbf{P_1(0,-2)}$ で最大値 **16** をとる．

A を中心とし，P_1 を通る円を

$$C(\theta)=(4\cos\theta,\ 4\sin\theta+2)$$

とおく．この円の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ および $-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq 0$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とすると，求める回転体の体積 V は



$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_{C_1} y^2\,dx-\int_{C_2} y^2\,dx\\ &= \int_0^4 y^2\,dx-\int_{2\sqrt{3}}^4 y^2\,dx\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}y^2\,dx = y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta &= (4\sin\theta+2)^2(4\cos\theta)'d\theta\\ &= -16(4\sin^3\theta+4\sin^2\theta+\sin\theta)\,d\theta\\ &= 16(\sin 3\theta+2\cos 2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= 16\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin 3\theta + 2\cos 2\theta - 4\sin\theta - 2)\,d\theta \\ &\qquad\qquad - 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(\sin 3\theta + 2\cos 2\theta - 4\sin\theta - 2)\,d\theta \\ &= 16\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(\sin 3\theta + 2\cos 2\theta - 4\sin\theta - 2)\,d\theta \\ &= 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin 3\theta - 2\cos 2\theta + 4\sin\theta + 2)\,d\theta \\ &= 16\left[\frac{1}{3}\cos 3\theta - \sin 2\theta - 4\cos\theta + 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{3}\pi + 24\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{\frac{128}{3}\pi^2 + 48\sqrt{3}\pi}$

参照 九大 2012 年一般前期理系数学 $\boxed{1}$ の解答 [1] を参照. ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf