

平成 28 年度 長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

平成 28 年 2 月 25 日

- 教育 A・経済・水産・環境科学部は, [1], [2] 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学部は, [3], [4], [5], [7] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は, [3], [4], [5], [6] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は, [3], [4], [7], [8] 数 I・II・III・A・B (120 分)

[1] 以下の問いに答えよ.

- (1) 放物線 $y = x^2 - x$ の頂点を P とする. 点 Q はこの放物線上の点であり, 原点 $O(0, 0)$ ととも点 P と異なるとする. $\angle OPQ$ が直角であるとき, 点 Q の座標を求めよ.
- (2) 関数 $f(x)$ は以下の条件 (イ), (ロ), (ハ) を満たす. そのような正の数 a の値と $f(x)$ を求めよ.
 - (イ) $f'(x) = x^2 + ax$
 - (ロ) $f(0) = -1$
 - (ハ) $f(x)$ の極大値と極小値の差が $\frac{4}{81}$
- (3) 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ を解け.
- (4) $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき, 不等式 $\sin 3x + \sin 2x < \sin x$ を解け.

[2] 空間において, 3 点 $A(5, 0, 1)$, $B(4, 2, 0)$, $C(0, 1, 5)$ を頂点とする三角形 ABC がある. 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 AB, BC, CA の長さを求めよ.
- (2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.
- (3) 原点 $O(0, 0, 0)$ から平面 ABC に垂線を下ろし, 平面 ABC との交点を H とする. $\overrightarrow{AH} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ とおくととき, 実数 l, m の値を求めよ.
- (4) 直線 AH と直線 BC の交点を M とする. $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AM}$ とおくととき, 実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ.
- (5) 原点 O を頂点, 四角形 ABHC を底面とする四角錐 O-ABHC の体積 V を求めよ.

- 3 半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある. その面積を S とする. D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる. さらに, D_1 の各辺の中点を結んで正十二角形 D_2 をつくる. このように, D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる ($n \geq 2$). D_n の面積を S_n とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) S と S_1 を求めよ.
- (2) S_n を n の式で表せ ($n \geq 1$).
- (3) $S_n \leq \frac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ. ただし,

$$1.89 < \log_2(2 + \sqrt{3}) < 1.9$$

である.

- 4 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある. 右の図 1 のように, 2 辺 BC, CD 上に, $BS = CT = x$ ($0 \leq x \leq 2$) を満たす点 S, T をとる. このとき, 三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい. 以下の問いに答えよ.

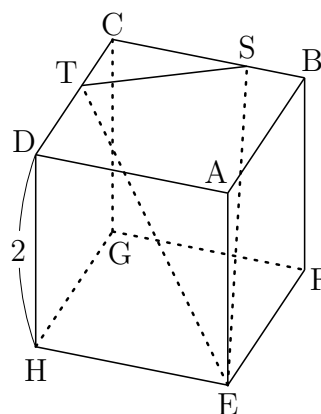


図 1

- (1) 右の図 2 を参考にして, 三角形 OPQ において $\vec{OP} = \vec{p}$, $\vec{OQ} = \vec{q}$ とおくと, 三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2}$$

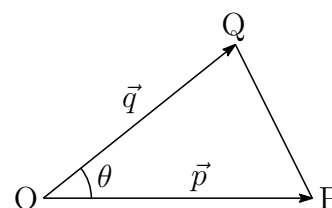


図 2

と表されることを証明せよ.

- (2) $\vec{EF} = \vec{a}$, $\vec{EH} = \vec{b}$, $\vec{EA} = \vec{c}$ とおく. 立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して, \vec{ES} , \vec{ET} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} および x を用いて表せ. また, $|\vec{ES}|^2$, $|\vec{ET}|^2$ を, それぞれ x の式として表せ. さらに, \vec{ES} と \vec{ET} の内積 $\vec{ES} \cdot \vec{ET}$ は, x によらない一定の値になることを示せ.
- (3) 上の (1) を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ.
- (4) $0 \leq x \leq 2$ の範囲で, $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの x の値も答えよ.

5 以下の問いに答えよ.

(1) 関数

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

の増減を調べ、 y のとり得る値の範囲を求めよ. また、この関数の逆関数を求めよ.

(2) 定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

について、 I_1 , I_2 , I_3 を求めよ.

(3) 関数

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x} \quad (x > 0)$$

がある. 曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点を $P(a, f(a))$ とする. 曲線 C と直線 $x = a$, および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

6 区間 $-1 \leq x \leq 1$ において、2つの関数 $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ を考える. 曲線 $C_1 : y = f(x)$ と曲線 $C_2 : y = g(x)$ で囲まれた図形を D とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、その最大値と最小値を求めよ.

(2) 曲線 C_1 は曲線 C_2 と原点に関して対称であることを示せ.

(3) 区間 $-1 \leq x \leq 1$ において、 $f(x)$ と $-g(x)$ の値の大小関係を調べよ. また、 $g(x) \geq 0$ が成り立つような x の範囲を求めよ.

(4) 図形 D の $x \geq 0$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

7 関数 $f(x) = xe^x$ で定まる曲線 $C: y = f(x)$ を考える. p を正の数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ. また, すべての x について

$$\{(ax + b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数 a, b の値を求めよ.

(2) 曲線 C 上の点 $P(p, f(p))$ における C の接線を $\ell: y = c(x - p) + d$ とする. c と d の値を p を用いて表せ. さらに, 区間 $x \geq 0$ において関数 $g(x) = f(x) - \{c(x - p) + d\}$ の増減を調べ, 不等式

$$f(x) \geq c(x - p) + d \quad (x \geq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(3) $x \geq 0$ の範囲で, 曲線 C と接線 ℓ , および y 軸で囲まれた図形を F とする. その面積 $S(p)$ を求めよ.

(4) 2辺が x 軸, y 軸に平行な長方形 R を考える. R が図形 F を囲んでいるとき, R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ. さらに, $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ.

8 楕円 $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > 0$) と y 軸の交点を $A(0, a)$, $B(0, -a)$ とする. θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 点 $P(\cos \theta, a \sin \theta)$ はこの楕円上を動く. 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 AP の長さを ℓ とする. $X = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) のとき, $Y = \ell^2$ となる関数を $Y = f(X)$ とする. $f(X)$ を X の式で表せ.

(2) $0 < a < 1$ の場合.

(1) の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し, そのときの X の値を求めよ.

(3) $a = 2$ の場合.

(1) の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を P_1 とする. $f(X)$ の最大値と P_1 の座標を求めよ. また, 点 $A(0, 2)$ を中心とし点 P_1 を通る円を, x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

正解

$$\boxed{1} \quad (1) \quad y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{直線 OP の傾きは} \quad \frac{-\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = -\frac{1}{2}$$

Q($t, t^2 - t$) とすると, 直線 OP と直線 PQ は垂直であるから

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 - t - (-\frac{1}{4})}{t - \frac{1}{2}} = -1 \quad \text{整理すると} \quad (2t - 1)(2t - 5) = 0$$

$$t \neq \frac{1}{2} \text{ であるから} \quad t = \frac{5}{2} \quad \text{よって} \quad Q\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$$

(2) $f'(x) = x^2 + ax = x(x+a)$ より ($a > 0$), 3次関数 $f(x)$ は, 極大値 $f(-a)$, 極小値 $f(0)$ をとる.

$$f(-a) - f(0) = \int_0^{-a} f'(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^{-a} = \frac{1}{6}a^3$$

条件から, $f(-a) - f(0) = \frac{4}{81}$ であるから

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{4}{81} \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = x^2 + \frac{2}{3}x \text{ であるから, } f(0) = -1 \text{ より} \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 1$$

(3) 与えられた方程式から $2|\log_2 x|^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$

ここで, $t = |\log_2 x|$ とおくと ($t \geq 0$)

$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t - 4)(2t + 1) = 0$$

$$t \geq 0 \text{ より} \quad t = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 x = \pm 4 \quad \text{よって} \quad x = 2^{\pm 4} = 16, \frac{1}{16}$$

(4) 与えられた不等式から $(\sin 3x - \sin x) + \sin 2x < 0$

$$2 \cos 2x \sin x + 2 \sin x \cos x < 0$$

$$\sin x (\cos 2x + \cos x) < 0$$

$$\sin x (2 \cos^2 x + \cos x - 1) < 0$$

$$\sin x (\cos x + 1)(2 \cos x - 1) < 0$$

$$\sin x > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x < \pi \text{ のとき} \quad \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\sin x < 0 \quad \text{すなわち} \quad \pi < x < 2\pi \text{ のとき} \quad \cos x > \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi, \quad \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$$

- 2 (1) A(5, 0, 1), B(4, 2, 0), C(0, 1, 5) より

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1), \quad \overrightarrow{BC} = (-4, -1, 5), \quad \overrightarrow{CA} = (5, -1, -4)$$

$$\text{したがって } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{42}$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{42}$$

- (2) (1)の結果から、三角形ABCはBC = CAの二等辺三角形であるから、Cから辺ABに下した垂線の長さは

$$\sqrt{(\sqrt{42})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{9}{2}\sqrt{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

- (3) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-5, 1, 4)$, $\overrightarrow{AH} = \ell\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ より

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$$

$$= (5, 0, 1) + \ell(-1, 2, -1) + m(-5, 1, 4)$$

$$= (5 - \ell - 5m, 2\ell + m, 1 - \ell + 4m) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = -1(5 - \ell - 5m) + 2(2\ell + m) - 1(1 - \ell + 4m)$$

$$= 6\ell + 3m - 6$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OH} = -5(5 - \ell - 5m) + (2\ell + m) + 4(1 - \ell + 4m)$$

$$= 3\ell + 42m - 21$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OH}$ であるから, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$ より

$$\begin{cases} 6\ell + 3m - 6 = 0 \\ 3\ell + 42m - 21 = 0 \end{cases} \quad \text{これを解いて } \ell = \frac{7}{9}, m = \frac{4}{9}$$

- (4) (3)の結果から $\overrightarrow{AH} = \frac{7}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} = \frac{11}{9} \cdot \frac{7\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{11}$

$$\text{ゆえに } k = \frac{11}{9}, \text{ AM : MH} = 9 : 2 \quad \text{よって } T = \frac{2}{9}S = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

- (5) (3)の結果を①に代入すると $\overrightarrow{OH} = (2, 2, 2)$ ゆえに $|\overrightarrow{OH}| = 2\sqrt{3}$

$$(4) \text{の結果から, 四角形ABHCの面積は } \frac{11}{9}S = \frac{11}{9} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{11}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{よって } V = \frac{1}{3} \times \frac{11}{2}\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 11$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad S = 12 \times \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 30^\circ = 3$$

$$S \text{ と } S_1 \text{ の相似比は } 1 : \cos 15^\circ = 1 : \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$S \text{ と } S_1 \text{ の面積比は } 1 : \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = 1 : \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{したがって } S_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} S = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{4}$$

$$(2) \quad S_n = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4} \right)^n S = 3 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4} \right)^n$$

(3) (1), (2) の結果を $S_n \leq \frac{1}{2}$ に代入すると

$$3 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4} \right)^n \leq \frac{1}{2} \cdot 3 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{4}{2 + \sqrt{3}} \right)^n \geq 2$$

2を底とする対数をとると

$$n \log_2 \frac{4}{2 + \sqrt{3}} \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad n \geq \frac{1}{\log_2 \frac{4}{2 + \sqrt{3}}} \quad \dots (*)$$

$$1.89 < \log_2(2 + \sqrt{3}) < 1.9, \quad \log_2 \frac{4}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \log_2(2 + \sqrt{3}) \text{ より}$$

$$\frac{1}{10} = 0.1 < \log_2 \frac{4}{2 + \sqrt{3}} < 0.11 = \frac{11}{100}$$

$$\text{したがって} \quad 9 + \frac{1}{11} < \frac{1}{\log_2 \frac{4}{2 + \sqrt{3}}} < 10$$

よって, (*) を満たす最小の整数 n は **10**

$$\boxed{4} \quad (1) \quad \triangle OPQ = \frac{1}{2} |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{p}| |\vec{q}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 - (|\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2}$$

$$(2) \quad \vec{ES} = \vec{a} + \frac{x}{2} \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{ET} = \frac{2-x}{2} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ であるから

$$|\vec{ES}|^2 = |\vec{a}|^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 2^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2$$

$$= x^2 + 8$$

$$|\vec{ET}|^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2 + 2^2$$

$$= (2-x)^2 + 8$$

$$\vec{ES} \cdot \vec{ET} = \frac{2-x}{2} |\vec{a}|^2 + \frac{x}{2} |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \frac{2-x}{2} \cdot 2^2 + \frac{x}{2} \cdot 2^2 + 2^2$$

$$= 8$$

(3) (2) の結果を (1) に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 + 8)\{(2-x)^2 + 8\} - 8^2}$$

ここで, $y = 2 - x$ とおくと, $x + y = 2$ であるから

$$\begin{aligned} (x^2 + 8)\{(2-x)^2 + 8\} - 8^2 &= (x^2 + 8)(y^2 + 8) - 8^2 \\ &= x^2 y^2 + 8(x^2 + y^2) \\ &= x^2 y^2 + 8\{(x+y)^2 - 2xy\} \\ &= x^2 y^2 + 8(4 - 2xy) = x^2 y^2 - 16xy + 32 \\ &= (8 - xy)^2 - 32 = \{8 - x(2-x)\}^2 - 32 \\ &= \{(x-1)^2 + 7\}^2 - 32 \end{aligned}$$

よって $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\{(x-1)^2 + 7\}^2 - 32}$

(4) $0 \leq x \leq 2$ であるから, (3) の結果から

$x = 0, 2$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとり, $x = 1$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{17}}{2}$ をとる.

$$\boxed{5} \quad (1) \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \quad \text{よ} \text{り} \quad y' = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \right) = 1$$

y は単調増加 ゆえに $-1 < y < 1$

$$y = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \quad \text{よ} \text{り} \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \quad \text{ゆ} \text{え} \text{に} \quad x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$$

$$\text{よ} \text{つ} \text{て} \text{, 求} \text{め} \text{る} \text{逆} \text{関} \text{数} \text{は} \quad y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(2) \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \left[-\log \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)' \tan x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \left[\frac{1}{2} \tan^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1 + \log x}{x} = x^{-1} + x^{-1} \log x \quad \text{よ} \text{り}$$

$$f'(x) = -x^{-2} - x^{-2} \log x + x^{-1} x^{-1} = -x^{-2} \log x$$

$$f''(x) = 2x^{-3} \log x - x^{-2} x^{-1} = \frac{2 \log x - 1}{x^3}$$

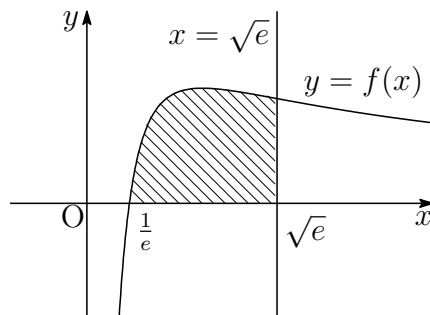
$$f(x) = 0 \quad \text{と} \text{す} \text{る} \text{と} \quad 1 + \log x = 0 \quad \text{す} \text{な} \text{わ} \text{ち} \quad x = \frac{1}{e},$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{と} \text{す} \text{る} \text{と} \quad 2 \log x - 1 = 0 \quad \text{す} \text{な} \text{わ} \text{ち} \quad x = \sqrt{e}$$

x	(0)	...	1	...	\sqrt{e}	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	変曲点	↘

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} \frac{1 + \log x}{x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} (1 + \log x)(\log x)' dx \\ &= \left[\log x + \frac{1}{2}(\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$



6 (1) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ を微分すると

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}(\sqrt{1 - x^2} + x)}$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-1	↗	極大 $\sqrt{2}$	↘	1

よって、最大値 $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ 、最小値 $f(-1) = -1$

(2) $f(-x) = -x + \sqrt{1 - (-x)^2} = -(x - \sqrt{1 - x^2}) = -g(x)$

よって、 $C_1: y = f(x)$ と $C_2: y = g(x)$ は原点に関して対称である。

(3) $f(x) - \{-g(x)\} = f(x) + g(x) = 2x$ であるから

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき } f(x) \leq -g(x),$$

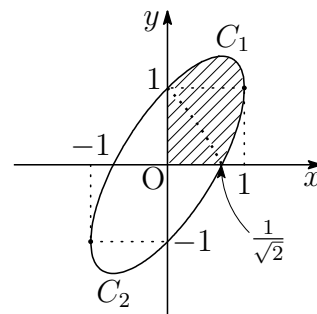
$$0 \leq x \leq 1 \text{ のとき } f(x) \geq -g(x)$$

$g(x) \geq 0$ のとき

$$x - \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad x \geq \sqrt{1 - x^2} \geq 0$$

両辺を平方して $x^2 \geq 1 - x^2$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ に注意して解くと } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$$



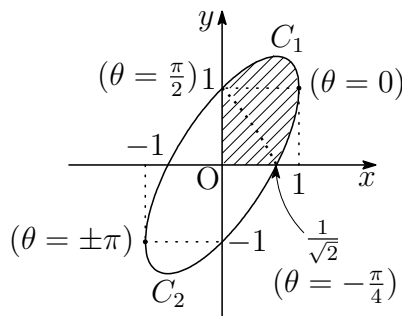
(4) (3) の結果から、求める体積は、上の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転

したものであるから

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (x - \sqrt{1-x^2})^2 dx \\ &= \int_0^1 (2x\sqrt{1-x^2} + 1) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2x\sqrt{1-x^2} - 1) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - x \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

よって $V = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{2})\pi$

別解 $C(\theta) = (\cos \theta, \cos \theta + \sin \theta)$ とおくと, C_1, C_2 は, それぞれ $C(\theta)$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ および $-\pi \leq \theta \leq 0$ の部分である.



$x = \cos \theta, y = \cos \theta + \sin \theta$ であるから

$$\begin{aligned} y^2 dx &= y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta = (\cos \theta + \sin \theta)^2 (-\sin \theta) d\theta \\ &= (-\sin \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \{g(x)\}^2 dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (-\sin \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} (-\sin \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \left[\cos \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

よって $V = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{2})\pi$

7 (1) $f(x) = xe^x$ より

$$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (\mathbf{x + 1})e^x$$

$$f''(x) = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = e^x + (x+1)e^x = (\mathbf{x + 2})e^x$$

$$\text{また } \{(ax+b)e^x\}' = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$$

$$\{(ax+b)e^x\}' = f(x) \text{ であるとき } (ax+a+b)e^x = xe^x$$

$$\text{したがって } a=1, a+b=0 \text{ よって } \mathbf{a=1, b=-1}$$

(2) C 上の点 $P(p, f(p))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \quad \text{ゆえに} \quad y = f'(p)(x - p) + f(p)$$

$$\text{上式および (1) の結果から } c = f'(p) = (\mathbf{p + 1})e^p, \quad d = f(p) = \mathbf{pe^p}$$

$$g(x) = f(x) - \{c(x - p) + d\} \text{ より}$$

$$g(x) = f(x) - \{(p+1)e^p(x-p) + pe^p\} = f(x) - (p+1)e^p x + p^2 e^p$$

$$g'(x) = f'(x) - (p+1)e^p = f'(x) - f'(p)$$

(1) の結果から, $x \geq 0$ において, $f''(x) > 0$ であるから, $f'(x)$ は単調増加. したがって, $g(x)$ の増減表は, 次のようになる.

x	0	...	p	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		↘	極小 0	↗

$$x \geq 0 \text{ において } g(x) \geq 0 \text{ であるから } f(x) - \{c(x-p) + d\} \geq 0$$

$$\text{よって } f(x) \geq c(x-p) + d \quad (x \geq 0)$$

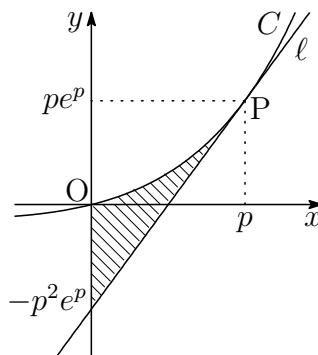
補足 $f''(x) > 0$ である曲線 $y = f(x)$ とその曲線上の点 $P(p, f(p))$ における接線を $y = h(x)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) - h(x) &= f(x) - \{f'(p)(x-p) + f(p)\} = \int_p^x f'(t) dt - f'(p)(x-p) \\ &= - \int_p^x (x-t)' f'(t) dt - f'(p)(x-p) \\ &= - \left[(x-t)f'(t) \right]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t) dx - f'(p)(x-p) \\ &= \int_p^x (x-t)f''(t) dt = \int_x^p (t-x)f''(t) dt \end{aligned}$$

$$x \geq p \text{ のとき } \int_p^x (x-t)f''(t) dt \geq 0, \quad x \leq p \text{ のとき } \int_x^p (t-x)f''(t) dt \geq 0$$

$$\text{したがって } f(x) - h(x) \geq 0 \text{ よって } f(x) \geq h(x)$$

(3) 図形 F は、下の図の斜線部分である。



よって、 F の面積 $S(p)$ は、(1), (2) の結果から

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^p g(x) dx = \int_0^p \{f(x) - (p+1)e^p x + p^2 e^p\} dx \\ &= \left[(x-1)e^x - \frac{1}{2}(p+1)e^p x^2 + p^2 e^p x \right]_0^p \\ &= \frac{1}{2} e^p (p-1)(p^2+2) + 1 \end{aligned}$$

(4) R は、 P および点 $(0, -p^2 e^p)$ を含む x 軸および y 軸に平行な長方形であるから、その面積の最小値 $T(p)$ は

$$T(p) = p\{pe^p - (-p^2 e^p)\} = p^2(p+1)e^p$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S(p)}{T(p)} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} e^p (p-1)(p^2+2) + 1}{p^2(p+1)e^p} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{2}{p^2}\right) + \frac{2}{p^3 e^p}}{2 \left(1 + \frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8 (1) A(0, a), P(cos θ, a sin θ) より

$$\begin{aligned} AP^2 &= \cos^2 \theta + (a \sin \theta - a)^2 \\ &= 1 - \sin^2 \theta + a^2(\sin \theta - 1)^2 \\ &= 1 - X^2 + a^2(X - 1)^2 \\ &= (a^2 - 1)X^2 - 2a^2X + a^2 + 1 \end{aligned}$$

よって $f(X) = (a^2 - 1)X^2 - 2a^2X + a^2 + 1$

(2) (1)の結果から $f(X) = (a^2 - 1)\left(X - \frac{a^2}{a^2 - 1}\right)^2 + \frac{1}{1 - a^2}$

$0 < a < 1$ より, $a^2 - 1 < 0$, $\frac{a^2}{a^2 - 1} < 0$ であることに注意すると

$\frac{a^2}{a^2 - 1} < -1$ すなわち $\frac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$ のとき 最大値 $f(-1) = 4a^2$

$\frac{a^2}{a^2 - 1} \geq -1$ すなわち $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき 最大値 $f\left(\frac{a^2}{a^2 - 1}\right) = \frac{1}{1 - a^2}$

(3) $a = 2$ のとき

$$f(X) = 3X^2 - 8X + 5 = 3\left(X - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \quad (-1 \leq X \leq 1)$$

したがって, $f(X)$ は $X = -1$, すなわち, $P_1(0, -2)$ で最大値 **16** をとる.

A を中心とし, P_1 を通る円を

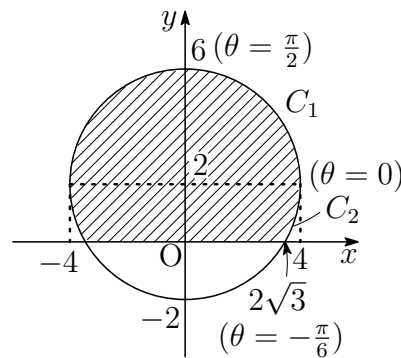
$$C(\theta) = (4 \cos \theta, 4 \sin \theta + 2)$$

とおく. この円の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ および $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq 0$ の部分をそれぞれ C_1, C_2 とすると, 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_{C_1} y^2 dx - \int_{C_2} y^2 dx \\ &= \int_0^4 y^2 dx - \int_{2\sqrt{3}}^4 y^2 dx \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} y^2 dx &= y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta = (4 \sin \theta + 2)^2 (4 \cos \theta)' d\theta \\ &= -16(4 \sin^3 \theta + 4 \sin^2 \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= 16(\sin 3\theta + 2 \cos 2\theta - 4 \sin \theta - 2) d\theta \end{aligned}$$



したがって

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{2\pi} &= 16 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin 3\theta + 2 \cos 2\theta - 4 \sin \theta - 2) d\theta \\
 &\quad - 16 \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (\sin 3\theta + 2 \cos 2\theta - 4 \sin \theta - 2) d\theta \\
 &= 16 \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} (\sin 3\theta + 2 \cos 2\theta - 4 \sin \theta - 2) d\theta \\
 &= 16 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin 3\theta - 2 \cos 2\theta + 4 \sin \theta + 2) d\theta \\
 &= 16 \left[\frac{1}{3} \cos 3\theta - \sin 2\theta - 4 \cos \theta + 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{3}\pi + 24\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

よって $V = \frac{128}{3}\pi^2 + 48\sqrt{3}\pi$

参照 九大 2012 年一般前期理系数学 **1** の解答 ¹ を参照.

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf