平成 27 年度　長崎大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
工学部　平成 27 年 3 月 12 日

$\boxed{1}$ 次の文章を読み，(1)〜(5) に答えよ．解答用紙には求めた値のみを記入すること．

初項が 28 で公差が整数である等差数列 $\{a_n\}$ があり，第 9 項が初めて負の数になるという．この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．また，$b_n = |a_n|$ とし，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする．

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の公差を求めよ．

(2) S_n の最大値を求めよ．

(3) S_n が正であるときの n の最大値を求めよ．

(4) T_{20} を求めよ．

(5) $T_n \leqq 3S_n$ が成り立つ n の最大値を求めよ．

$\boxed{2}$ 以下の (1)〜(5) に答えよ．答案用紙には求めた値のみを記入すること．

(1) $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$ を満たす θ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ である．

(2) 曲線 $y = f(\theta) = \cos 2\theta - 3\cos\theta + 2$ の接線の傾き $f'(\theta)$ を 0 とする $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) 関数 $f(\theta) = \cos 2\theta - 3\cos\theta + 2$ の最小値を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ である．

(4) 関数 $g(\theta) = (\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2)^2$ を次式のように変形するとき，a_0〜a_4 の値を求めよ．

$$g(\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_3\cos 3\theta + a_4\cos 4\theta$$

(5) 曲線 $y = \cos 2\theta - 3\cos\theta + 2$ と θ 軸，および 2 直線 $\theta = -\pi$，$\theta = \pi$ で囲まれた図形を θ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 公差を d とおくと　$a_n = 28 + (n-1)\cdot d$

第9項で初めて負の数になるから，$a_8 \geqq 0$，$a_9 < 0$ より

$$28 + 7d \geqq 0,\quad 28 + 9d < 0 \quad \text{ゆえに} \quad -4 \leqq d < -\frac{7}{2}$$

d は整数であるから　$d = \mathbf{-4}$

(2) (1) の結果から　$a_n = -4n + 32$

$a_8 = 0$ に注意して，$n = 7,\ 8$ のとき，S_n は最大となり，最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot 8(a_1 + a_8) = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 28 = \mathbf{112}$$

(3) $S_n = \dfrac{1}{2}n\{2\cdot 28 + (n-1)\cdot(-4)\} = 2n(15-n)$

$S_n > 0$ となるのは　$15 - n > 0$　すなわち　$1 \leqq n \leqq 14$

よって，求める n の最大値は　**14**

(4) $a_k \geqq 0\ (1 \leqq k \leqq 8)$，$a_k < 0\ (k > 9)$ であるから

$$\begin{aligned} T_{20} &= \sum_{k=1}^{20} b_k = \sum_{k=1}^{20} |a_k| = \sum_{k=1}^{8} a_k + \sum_{k=9}^{20}(-a_k) \\ &= S_8 + \frac{1}{2}\cdot 12\{(-a_9) + (-a_{20})\} = 112 + 6(4 + 48) = \mathbf{424} \end{aligned}$$

(5) $1 \leqq n \leqq 8$ のとき　$T_n = 2n(15-n) > 0$

$n \geqq 9$ のとき

$$\begin{aligned} T_n &= S_8 + \sum_{k=9}^{n} b_k = 112 + \frac{1}{2}(n-8)\{(-a_9) + (-a_n)\} \\ &= 112 + \frac{1}{2}(n-8)\{4 + (4n-32)\} \\ &= 2n^2 - 30n + 224 \end{aligned}$$

$1 \leqq n \leqq 8$ のとき，$T_n = S_n > 0$ であるから　$T_n = S_n < 3S_n$
このとき，常に $T_n \leqq 3S_n$ は成り立つ．

$n \geqq 9$ のとき，$T_n \leqq 3S_n$ より

$$2n^2 - 30n + 224 \leqq 3\cdot 2n(15-n) \quad \text{整理すると} \quad n(15-n) \geqq 28$$

$f(n) = n(15-n)\ (n \geqq 9)$ とおくと　$f(n) = -\left(n - \dfrac{15}{2}\right)^2 + \dfrac{225}{4}$

$f(n)$ は単調減少で，$f(12) = 36,\ f(13) = 26$ である．

よって，求める n の最大値は　**12**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$ より $\quad 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

$$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$$

したがって　$\cos\theta = 1,\ \dfrac{1}{2}$　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3}}$

(2) $f(\theta) = \cos 2\theta - 3\cos\theta + 2$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -2\sin 2\theta + 3\sin\theta = -4\sin\theta\cos\theta + 3\sin\theta \\ &= -\sin\theta(4\cos\theta - 3) \end{aligned}$$

$f'(\theta) = 0$ とすると　$\sin\theta = 0,\ \cos\theta = \dfrac{3}{4}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{(\sin\theta,\ \cos\theta) = (0,\ \pm 1),\ \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)}$

(3) $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}\ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f(\theta)$ の増減表は，(2) の結果から

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，最小値は

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \cos 2\alpha - 3\cos\alpha + 2 \\ &= 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 \\ &= 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{4} + 1 = \boldsymbol{-\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

別解 $f(\theta) = 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1$ であるから

$$f(\theta) = 2\left(\cos\theta - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

よって，$\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，最小値 $-\dfrac{1}{8}$

(4)
$$\begin{aligned} g(\theta) &= (\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2)^2 \\ &= \cos^2 2\theta + 9\cos^2\theta + 4 - 6\cos 2\theta\cos\theta + 4\cos 2\theta - 12\cos\theta \\ &= \frac{1 + \cos 4\theta}{2} + \frac{9(1 + \cos 2\theta)}{2} + 4 - 3(\cos 3\theta + \cos\theta) \\ &\qquad + 4\cos 2\theta - 12\cos\theta \\ &= 9 - 15\cos\theta + \frac{17}{2}\cos 2\theta - 3\cos 3\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_0 = 9,\ a_1 = -15,\ a_2 = \dfrac{17}{2},\ a_3 = -3,\ a_4 = \dfrac{1}{2}}$

(5) 求める回転体の体積を V とすると，$g(\theta)$ は偶関数であることから

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\theta)\}^2 d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} g(\theta)\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi}\left(9 - 15\cos\theta + \frac{17}{2}\cos 2\theta - 3\cos 3\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta \\ &= 2\pi\left[\,9\theta - 15\sin\theta + \frac{17}{4}\sin 2\theta - \sin 3\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\,\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{18\pi^2}\end{aligned}$$

別解 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{3}{16}\pi$$

これらを利用すると[1]

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^{\pi}(2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1)^2 d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1)^2 d\theta + 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1)^2 d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1)^2 d\theta + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1)^2 d\theta \\ &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(2\cos^2\theta + 1)^2 + (3\cos\theta)^2\}d\theta \\ &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^4\theta + 13\cos^2\theta + 1)d\theta \\ &= 4\pi\left(4\cdot\frac{3}{16}\pi + 13\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{18\pi^2}\end{aligned}$$

補足 $\displaystyle I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1)d\theta$ について，$\theta = \pi - t$ とおくと

$$\frac{d\theta}{dt} = -1 \qquad \begin{array}{c|c} \theta & \frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi \\ \hline t & \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\{2\cos^2(\pi - t) - 3\cos(\pi - t) + 1\}^2(-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 t + 3\cos t + 1)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1)d\theta\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2016_kouki.pdf $\boxed{2}$