平成 27 年度　長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
平成 27 年 2 月 25 日

- 教育・薬学部は， $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は， $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部は， $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は， $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 2ax + 2a^2$ を考える．ただし，$a > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_2 の頂点の座標を a を用いて表せ．

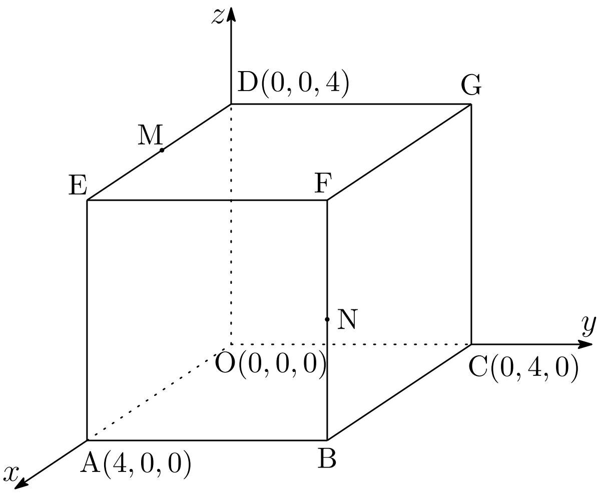
(2) 2 つの放物線 C_1，C_2 の共通接線を ℓ とし，C_1 と ℓ との接点の x 座標を p，C_2 と ℓ との接点の x 座標を q とする．p と q の値および ℓ の方程式を，それぞれ a を用いて表せ．

(3) 放物線 C_1，C_2 および接線 ℓ によって囲まれた図形の面積を S_1 とする．S_1 を a を用いて表せ．

(4) 点 $\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における C_1 の接線を m とする．このとき，m の方程式を a を用いて表せ．また，m と接線 ℓ との交点の x 座標を求めよ．

(5) 放物線 C_1 および接線 ℓ，m によって囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 を a を用いて表せ．さらに，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ．

2 4点 O(0, 0, 0)，A(4, 0, 0)，C(0, 4, 0)，D(0, 0, 4) をとり，下図のように線分 OA，OC，OD を3辺とする立方体 OABC-DEFG を考える．辺 DE，BF の中点を，それぞれ M，N とする．以下の問いに答えよ．



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{GN}}$ を成分で表せ．

(2) $\angle\mathrm{MGN} = \theta$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) 3点 G，M，N を頂点とする三角形 GMN の面積を求めよ．

(4) 三角錐(すい)FGMN において，三角形 GMN を底面としたときの高さを求めよ．

(5) 三角形 GMN を含む平面と線分 OF との交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を用いて表せ．

3 放物線 $C : y = x^2$ 上に異なる2点 P，Q をとる．P，Q の x 座標をそれぞれ p，q (ただし，$p < q$) とする．直線 PQ の傾きを a とおく．以下の問いに答えよ．

(1) a を p，q を用いて表せ．

(2) $a = 1$ とする．直線 PQ と x 軸の正の向きのとなす角 θ_1(ただし，$0 < \theta_1 < \pi$) を求めよ．

(3) $a = 1$ とする．放物線 C 上に点 R をとる．R の x 座標を r(ただし，$r < p$) とする．三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2(ただし，$0 < \theta_2 < \pi$) を求めよ．また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ．さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ．

(4) $a = 2$ とする．放物線 C 上に点 S(1, 1) をとる．三角形 PQS が $\angle\mathrm{S} = \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ．

4 ひし形の紙がある (図 1)．点線で半分に折ると正三角形になった (図 2)．これを少し開いて机の上に立てると，三角錐(すい)の形になる．その高さを次のようにして求めたい．

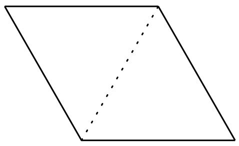


図 1

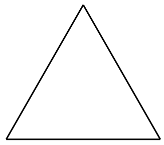


図 2

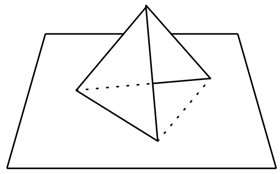


図 3

図 4 において，2 つの正三角形 OAB と OAC の 1 辺の長さを 1 とする．点 O と平面 ABC の距離が，三角錐 OABC の高さになる．

空間ベクトルを利用してこの高さを求める．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC} = \theta$ とおき，線分 BC の中点を M とする．以下の問いに答えよ．

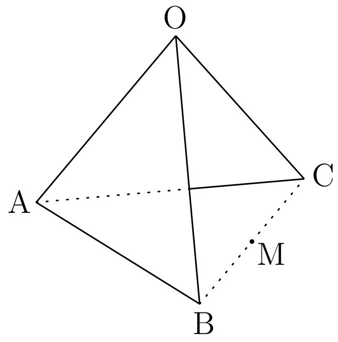


図 4(図 3 の拡大図)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．また，$|\vec{b}+\vec{c}|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) 実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおくと，点 H は直線 AM 上にある．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つことを示せ．さらに，H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす点であるとき，t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(4) 三角錐 OABC の高さを h とする．h を $\cos\theta$ を用いて表せ．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立つとき，θ と h の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の問いに答えよ．

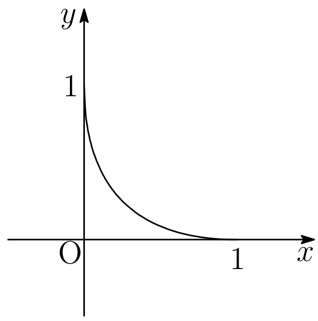
(1) 次の関係式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n と $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(3) 曲線 $C : \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸および y 軸で囲まれた下図の図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．



$\boxed{\mathbf{6}}$ 実数 $x \neq 1$ について定義される関数

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$，$\lim_{x\to1-0} f(x)$，$\lim_{x\to1+0} f(x)$，$\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(3) x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．曲線 $y = f(x)$ 上の格子点の座標をすべて求めよ．

(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(5) $x \leqq 0$ かつ $y \geqq 0$ で表される領域において，x 軸と y 軸および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\textbf{7}}$ 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ 上で定義される関数

$$f(x) = \cos 2x - 4\sin^3 x$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\textbf{8}}$ 自然対数の底を e とする．区間 $x \geqq 0$ 上で定義される関数

$$f(x) = e^{-x}\sin x$$

を考え，曲線 $y = f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる．それらを，P_0，P_1，P_2，$\cdots$ とする．点 P_0 は原点である．

自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ．

(2) 面積 S_n を求めよ．

(3) $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ とする．このとき，I_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_2 : y = (x-a)^2 + a^2$ であるから，C_2 の頂点の座標は　$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a^2})$

(2) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

$y = x^2 - 2ax + 2a^2$ を微分すると　$y' = 2(x-a)$

C_1 上の点 $(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2 \qquad \cdots ①$$

C_2 上の点 $(q,\ q^2 - 2aq + 2a^2)$ における接線の方程式は

$$y - (q^2 - 2aq + 2a^2) = 2(q-a)(x-q)$$

すなわち　$y = 2(q-a)x - q^2 + 2a^2 \qquad \cdots ②$

①，② の直線は一致するから

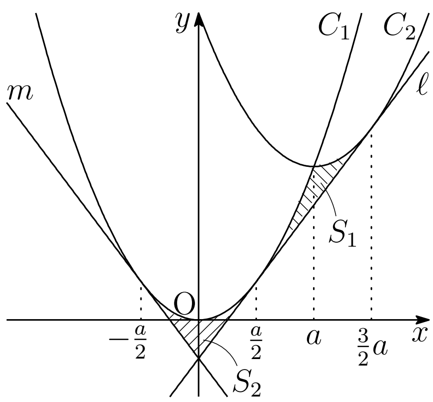
$$2p = 2(q-a), \quad -p^2 = -q^2 + 2a^2$$

ゆえに　$q - p = a, \quad (q+p)(q-p) = 2a^2$

よって　$\boldsymbol{p = \dfrac{a}{2},\ q = \dfrac{3}{2}a}$

また，① から ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{y = ax - \frac{a^2}{4}}$$



(3) C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$x^2 = x^2 - 2ax + 2a^2 \quad \text{ゆえに} \quad x = a$$

よって
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\frac{a}{2}}^{a} \left\{ x^2 - \left(ax - \frac{a^2}{4} \right) \right\} dx \\ &\quad + \int_{a}^{\frac{3}{2}a} \left\{ (x^2 - 2ax + 2a^2) - \left(ax - \frac{a^2}{4} \right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^{a} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 dx + \int_{a}^{\frac{3}{2}a} \left(x - \frac{3}{2}a \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{a}{2} \right)^3 \right]_{\frac{a}{2}}^{a} + \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{2}a \right)^3 \right]_{a}^{\frac{3}{2}a} = \boldsymbol{\frac{a^3}{12}} \end{aligned}$$

(4) C_1 は y 軸に関して対称である．C_1 上の 2 点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ は y 軸に関して対称であるから，C_1 上のそれぞれ点における接線 ℓ，m は y 軸に関して対称である．よって，m の方程式は

$$\boldsymbol{y = -ax - \frac{a^2}{4}}$$

したがって，ℓ と m の交点の x 座標は　　$\boldsymbol{x = 0}$

(5) C_1 および ℓ，m によって囲まれた図形は，y 軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= 2\int_0^{\frac{a}{2}} \left\{x^2 - \left(ax - \frac{a^2}{4}\right)\right\} dx \\ &= 2\int_0^{\frac{a}{2}} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 dx = 2\Big[\ \frac{1}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3\ \Big]_0^{a} = \boldsymbol{\frac{a^3}{12}} \end{aligned}$$

これと (3) の結果から　　$\boldsymbol{\dfrac{S_2}{S_1} = 1}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) G(0, 4, 4)，M(2, 0, 4)，N(4, 4, 2) であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{GM}} &= (2,\ 0,\ 4) - (0,\ 4,\ 4) = \boldsymbol{(2, -4,\ 0)} \\ \overrightarrow{\mathrm{GN}} &= (4,\ 4,\ 2) - (0,\ 4,\ 4) = \boldsymbol{(4,\ 0, -2)} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GN}} &= 2 \times 4 + (-4) \times 0 + 0 \times (-2) = 8 \\ |\overrightarrow{\mathrm{GM}}| &= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 0^2} = 2\sqrt{5} \\ |\overrightarrow{\mathrm{GN}}| &= \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GN}}|} = \dfrac{8}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(3) (2) の結果から　　$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

よって　　$\begin{aligned} \triangle\mathrm{GMN} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GN}}|\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \boldsymbol{2\sqrt{21}} \end{aligned}$

(4) 三角錐 FGMN において $\triangle$GMN を底辺とする高さを h とすると，三角錐 FGMN の体積により

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{GMN}\times h=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{MFG}\times\mathrm{FN}$$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{3}\times 2\sqrt{21}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\times 2$

これを解いて　$\displaystyle h=\frac{8}{\sqrt{21}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{21}}{21}}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおくと (α，β，γ は実数)

$$\begin{aligned}(4,\ 4,\ 4)&=\alpha(0,\ 4,\ 4)+\beta(2,\ 0,\ 4)+\gamma(4,\ 4,\ 2)\\&=(2\beta+4\gamma,\ 4\alpha+4\gamma,\ 4\alpha+4\beta+2\gamma)\end{aligned}$$

成分を比較して　$\beta+2\gamma=2,\quad \alpha+\gamma=1,\quad 2\alpha+2\beta+\gamma=2$

ゆえに　$\displaystyle\alpha=\frac{1}{5}$，$\displaystyle\beta=\frac{2}{5}$，$\displaystyle\gamma=\frac{4}{5}$　すなわち　$\displaystyle\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とおくと (k は実数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=k\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)\\&=\frac{k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{2k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{4k}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\end{aligned}$$

このとき，P は平面 GMN 上の点であるから

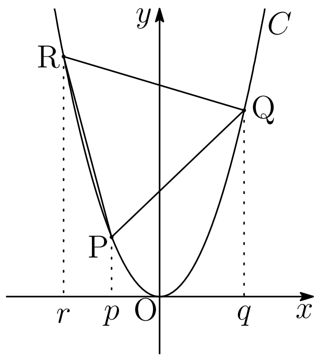
$$\frac{k}{5}+\frac{2k}{5}+\frac{4k}{5}=1\quad\text{ゆえに}\quad k=\frac{5}{7}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OF}}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ であるから，直線 PQ の傾き a は

$$a = \frac{q^2 - p^2}{q - p} = \boldsymbol{p + q}$$

(2) $a = 1$ より　$\tan\theta_1 = 1$　これをみたす θ_1 $(0 < \theta_1 < \pi)$ は　$\boldsymbol{\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}}$

(3) (2) 結果から，直線 PR と x 軸の正の向きとなす角 θ_2 $(0 < \theta_2 < \pi)$ は，$r < p$ に注意して



$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{12}\pi}$$

また，直線 PR，QR の傾きは，(1) と同様にして

$$p + r = \tan\theta_2 = \tan\frac{7}{12}\pi = \boldsymbol{-2 - \sqrt{3}}$$

$$q + r = \tan\left(\theta_1 - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \boldsymbol{-2 + \sqrt{3}}$$

$a = 1$ であるから，(1) の結果および上の 2 式から

$$p + q = 1,\quad p + r = -2 - \sqrt{3},\quad q + r = -2 + \sqrt{3}$$

これを解くと　$p = \dfrac{1}{2} - \sqrt{3}$，$q = \dfrac{1}{2} + \sqrt{3}$，$r = -\dfrac{5}{2}$

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ より　$\mathrm{PQ} = \sqrt{2}(q - p) = \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{6})^2 \sin 60^\circ = \boldsymbol{6\sqrt{3}}$

(4) $a = 2$ より，(1) の結果から　$p + q = 2$　$\cdots$ ①

$\mathrm{S}(1,\ 1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{SP}} = (p - 1,\ p^2 - 1) = (p - 1)(1,\ p + 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = (q - 1,\ q^2 - 1) = (q - 1)(1,\ q + 1)$

$\angle\mathrm{S} = \dfrac{\pi}{2}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = 0$ であるから

$$1\cdot 1 + (p + 1)(q + 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad pq + p + q + 2 = 0$$

① を上式に代入すると　$pq = -4$

よって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQS} &= \frac{1}{2}|(p - 1)(q - 1)||1(q + 1) - 1(p + 1)| \\ &= \frac{1}{2}|pq - (p + q) + 1|(q - p) = \frac{1}{2}|-4 - 2 + 1|(q - p) \\ &= \frac{5}{2}(q - p) = \frac{5}{2}\sqrt{(p + q)^2 - 4pq} = \frac{5}{2}\sqrt{2^2 - 4\cdot(-4)} = \boldsymbol{5\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})}$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) - \vec{a}}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$, $\quad \vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

また
$$
\begin{aligned}
|\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 \\
&= 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1\cos\theta + 1^2 = \boldsymbol{2+2\cos\theta}
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\
&= \left\{(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) \\
&= (1-t)(\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b}) + \frac{t}{2}(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2) \\
&= (1-t)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{t}{2}(1-1) = 0
\end{aligned}
$$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(2) の結果に注意して

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} &= \left\{(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\}\cdot\left\{-\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} \\
&= (t-1)|\vec{a}|^2 + \left\{\frac{1}{2}(1-t) - \frac{t}{2}\right\}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \frac{t}{4}|\vec{b}+\vec{c}|^2 \\
&= (t-1) + \left(\frac{1}{2} - t\right) + \frac{t}{4}(2+2\cos\theta) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}(1+\cos\theta)
\end{aligned}
$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ であるから

$$
-\frac{1}{2} + \frac{t}{2}(1+\cos\theta) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \frac{1}{1+\cos\theta}}
$$

(4) (2)，(3) の結果を用いると

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \left|(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right|^2 \\
&= (1-t)^2|\vec{a}|^2 + t(1-t)\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \frac{t^2}{4}|\vec{b}+\vec{c}|^2 \\
&= (1-t)^2 + t(1-t) + \frac{t^2}{4}(2+2\cos\theta) \\
&= 1 - t + \frac{1}{2}t^2(1+\cos\theta) = 1 - \frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{2(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}
\end{aligned}
$$

よって　　$h = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ であるから

$$(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad (1-t)\left\{\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \vec{0}$$

したがって　　$(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \vec{0}$

A と M は異なる点であるから　$1-t=0$　よって　$t=1$

これを (3) の結果に代入すると

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}} \quad \text{このとき} \quad h = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

上の漸化式およびその補助方程式は

$$\begin{cases} a_{n+1} = (\sqrt{2}+1)a_n + 1 & \cdots ① \\ c = (\sqrt{2}+1)c + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② から　$a_{n+1} - c = (\sqrt{2}+1)(a_n - c)$

② を解いて　$c = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$a_{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)\left(a_n + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

数列 $\left\{a_n + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ は，初項 $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，公比 $\sqrt{2}+1$ の等比数列であるから

$$a_n + \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^n - 1}{\sqrt{2}}}$

$\sqrt{2}+1 > 1$ であるから　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$

(2) 求める極限値は

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\,\frac{1}{2}\log(1+x^2)\,\right]_0^1 = \frac{\mathbf{log\,2}}{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ より　$S = \pi\displaystyle\int_0^1 y^2\,dx = \pi\int_0^1 (1-\sqrt{x})^4\,dx$

$t = 1 - \sqrt{x}$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$x = (1-t)^2$ より　$\dfrac{dx}{dt} = 2(t-1)$

よって　$S = \pi\displaystyle\int_1^0 t^4\cdot 2(t-1)\,dt$

$$= \pi\int_0^1 (-2t^5 + 2t^4)\,dt = \pi\left[-\frac{1}{3}t^6 + \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} = -\dfrac{2}{x-1} - 1 = -2(x-1)^{-1} - 1$ より

$$f'(x) = 2(x-1)^{-2} = \frac{2}{(x-1)^2} \qquad f''(x) = -4(x-1)^{-3} = -\frac{4}{(x-1)^3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right) = \mathbf{-1}$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1-0}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right) = \boldsymbol{\infty}$

$\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to1+0}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right) = \boldsymbol{-\infty}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right) = \mathbf{-1}$

(3) $f(x) = -\dfrac{2}{x-1} - 1$ より，格子点の x 座標は

$$x - 1 = \pm1,\ \pm2 \quad すなわち \quad x = -1,\ 0,\ 2,\ 3$$

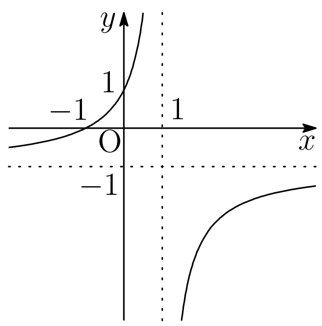
よって，求める格子点の座標は

$$\mathbf{(-1,\ 0,),\ (0,\ 1),\ (2,-3),\ (3,-2)}$$

(4) $y = -\dfrac{2}{x-1} - 1$ より漸近線の方程式は

$$x = 1, \quad y = -1$$

したがって，求めるグラフの概形は，
右のようになる．



(5) 求める図形の面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right)dx$$
$$= \Big[-2\log|\,x-1\,| - x\Big]_{-1}^{0} = \mathbf{2\log 2 - 1}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より　$f(x) = 1 - 2\sin^2 x - 4\sin^3 x$

$t = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$，$g(t) = f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(t) &= -4t^3 - 2t^2 + 1 \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \\ g'(t) &= -12t^2 - 4t \\ &= -4t(3t+1) \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において，$g'(t) < 0$ であるから，$g(t)$ は単調減少.

よって　$t = 0$　すなわち　$x = 0,\ \pi$ のとき　最大値 **1**

$t = 1$　すなわち　$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　最小値 $\mathbf{-5}$

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 2x - 4\sin^3 x = \cos 2x - 4(1 - \cos^2 x)\sin x \\ &= \cos 2x - 4\sin x + 4\cos^2 x \sin x \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + 4\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x + C}$　**(C は積分定数)**

別解 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ より　$f(x) = \cos 2x + \sin 3x - 3\sin x$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x + 3\cos x + C}$　**(C は積分定数)**

(補足) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(3)
$$\begin{aligned} g(t) &= -4t^3 - 2t^2 + 1 = -(2t-1)(2t^2 + 2t + 1) \\ &= -(2t-1)\left\{2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

上式から，$g(t) = 0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の解は　$t = \dfrac{1}{2}$

よって　$f(x) = 0$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の解は　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

(4) (3) の結果から，$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$　すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ において　$g(t) \leqq 0$

よって，(2)，(3) の結果から，求める面積を S とすると

$$S = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} f(x)\,dx = -\left[\,\frac{1}{2}\sin 2x + 4\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x\,\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f(x)=e^{-x}\sin x\ (x \geqq 0)$ について，$f(x)=0$ となる x の値であるから

$$\sin x=0 \quad これを解いて \quad x=n\pi \ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

よって，求める点 P_n の x 座標は　　$\boldsymbol{x=n\pi}$

(2) (1) の結果から　　$S_n=\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|e^{-x}\sin x|\,dx$

ここで，$x=t+(n-1)\pi$ とおくと

x	$(n-1)\pi \longrightarrow n\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$\dfrac{dx}{dt}=1$

よって

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^{\pi}|e^{-t-(n-1)\pi}\sin\{t+(n-1)\pi\}|\,dt\\&=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt\\&=e^{-(n-1)\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}\\&=e^{-(n-1)\pi}\times\frac{e^{-\pi}+1}{2}=\boldsymbol{\frac{(e^{-\pi}+1)e^{-(n-1)\pi}}{2}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}I_n&=\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}\\&=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\times\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}=\boldsymbol{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}}\end{aligned}$$

また，$0<e^{-\pi}<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-n\pi}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}=\boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$$