

平成 26 年度 長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

平成 26 年 2 月 25 日

- 教育・薬学部は, [4], [5], [6], [7] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は, [3], [5], [6], [7] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部は, [1], [2] 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は, [4], [5], [6], [8] 数 I・II・III・A・B (120 分)

[1] p を正の定数として, 放物線 $C: y = (x - p)^2 + p^2$ を考える. C の 2 本の接線 l, m を考え, 接点の x 座標を, それぞれ a, b とする. ただし, $a < 0, b > 0$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) l と m の方程式を求めよ.
- (2) l, m が原点を通るとき, a, b を p を用いて表せ.
- (3) l, m が原点を通るとき, 放物線 C と 2 本の接線 l および m によって囲まれた図形の面積を S とする. S を p を用いて表せ.

[2] $\triangle ABC$ において, $AB = 5, BC = 7, CA = 6$ とする. $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $\triangle ABC$ の内心を I とする. $\angle A$ の 2 等分線と $\angle B$ の 2 等分線は点 I で交わる. $\angle B$ の 2 等分線と辺 AC の交点を D とするとき, $AD : DC$ と $BI : ID$ を求めよ.
- (2) \overrightarrow{AI} を \vec{b} と \vec{c} を用いて表せ.
- (3) $\angle A = \theta$ とする. $\cos \theta$ と内積 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ.
- (4) 実数 x, y を用いて $\overrightarrow{AP} = x\vec{b} + y\vec{c}$ と表される点 P を考える. 点 P が辺 AB の垂直 2 等分線上にあるとき, x と y が満たす関係式を求めよ.
- (5) $\triangle ABC$ の外心を O とする. 辺 AB の垂直 2 等分線と辺 AC の垂直 2 等分線は点 O で交わる. \overrightarrow{AO} を \vec{b} と \vec{c} を用いて表せ.

3 次の問いに答えよ.

(1) 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ると余りが $2x-1$, $(x-2)(x-3)$ で割ると余りが $x+7$ であった. $P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ.

(2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき,

$$\cos 3\theta + 2 \cos \theta = 0$$

を満たす θ の値をすべて求めよ.

(3) 不等式

$$2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+2} + 9 < 0$$

を満たす x の範囲を求めよ.

4 k を実数とし, 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $x + 2y = k$ が異なる 2 点で交わるものとする. その 2 つの交点を P, Q とする. 次の問いに答えよ.

(1) k の値の範囲を求めよ.

(2) 2 点 P, Q を通る円の中心は直線 $y = 2x$ 上にあることを示せ.

(3) 上の (2) の円の中心を $(a, 2a)$, 半径を r とする. r^2 を a と k で表せ.

(4) 点 R の座標を $(2, 1)$ とする. k の値が (1) で求めた範囲を動くとき, 3 点 P, Q, R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ.

5 1 から $2n$ までの偶数の平方の和を a_n , 奇数の和を b_n とする. すなわち

$$a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2, \quad b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

である. なお, 1 から n までの自然数の平方の和については

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ. 次の問いに答えよ.

(1) 偶数の平方の和 $2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2$ と奇数の平方の和 $1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2$ を求めよ.

(2) a_n と b_n を求めよ.

(3) $\frac{1}{a_n} - \frac{3}{2n(2n+1)}$ および $\frac{1}{b_n} + \frac{3}{2n(2n+1)}$ を計算せよ.

(4) $c_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}$ とするとき, $S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ を求めよ.

6 曲線 $C: y = \log x$ 上の点 $P(t, \log t)$ における接線を l とする. ただし, $1 < t < e$ とする. e は自然対数の底である. 次の問いに答えよ.

- (1) 接線 l の方程式を求めよ.
- (2) 接線 l と y 軸との交点を Q とし, 接線 l と x 軸との交点を R とする. Q と R の座標を求めよ.
- (3) 接線 l と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D_1 , 接線 l と曲線 C および x 軸によって囲まれた図形を D_2 とする. D_1 の面積 $S_1(t)$ と D_2 の面積 $S_2(t)$ を求めよ.
- (4) $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく. このとき, $S(t)$ の増減を調べ, その最小値およびそのときの t の値を求めよ.

7 次の問いに答えよ.

- (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\tan x = t$ とおく. $\cos 2x$ と $\frac{dx}{dt}$ を t で表せ.
- (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2 - \cos 2x} dx$ を求めよ.
- (3) 関数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ.
- (4) $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくことにより, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ を求めよ.

8 区間 $0 \leq x \leq \pi$ において, 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos x$$

$$g(x) = \cos \frac{x}{2} + c$$

とする. c は定数である. 次の問いに答えよ.

- (1) 区間 $0 \leq x \leq \pi$ において, 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = 0$ 以外の点で接するように c の値を定め, 接点 (p, q) を求めよ. また, そのとき, 区間 $0 \leq x \leq \pi$ における関数 $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係を調べよ.
- (2) 定数 c と接点 (p, q) は (1) で求めたものとする. そのとき, $0 \leq x \leq p$ において, y 軸および 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ によって囲まれた図形を D とする. D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

正解

- 1 (1) $f(x) = (x - p)^2 + p^2$ とおくと $f'(x) = 2(x - p)$
 C 上の x 座標が a である点における接線 l の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\text{ゆえに } y - \{(a - p)^2 + p^2\} = 2(a - p)(x - a)$$

$$\text{よって } y = 2(a - p)x - a^2 + 2p^2$$

同様に、 C 上の x 座標が b である点における接線 m の方程式は

$$y = 2(b - p)x - b^2 + 2p^2$$

- (2) l が原点を通るとき、(1) の結果から

$$0 = 2(a - p) \cdot 0 - a^2 + 2p^2 = 0 \quad \text{ゆえに } a^2 = 2p^2$$

$$a < 0, p > 0 \text{ であるから } a = -\sqrt{2}p$$

同様に、 m が原点を通るとき、(1) の結果から $b^2 = 2p^2$

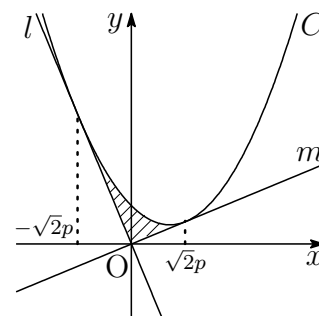
$$b > 0, p > 0 \text{ であるから } b = \sqrt{2}p$$

- (3) (1), (2) の結果から

$$l: y = -2(\sqrt{2} + 1)px$$

$$m: y = 2(\sqrt{2} - 1)px$$

よって、求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{2}p}^0 [(x - p)^2 + p^2 - \{-2(\sqrt{2} + 1)px\}] dx \\ &\quad + \int_0^{\sqrt{2}p} \{(x - p)^2 + p^2 - 2(\sqrt{2} - 1)px\} dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}p}^0 (x + \sqrt{2}p)^2 dx + \int_0^{\sqrt{2}p} (x - \sqrt{2}p)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + \sqrt{2}p)^3 \right]_{-\sqrt{2}p}^0 + \left[\frac{1}{3}(x - \sqrt{2}p)^3 \right]_0^{\sqrt{2}p} = \frac{4\sqrt{2}}{3}p^3 \end{aligned}$$

補足 九大 2009 年一般前期文系数学 4 の補足¹を参照.

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf

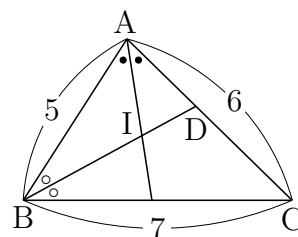
- 2 (1) BD は $\angle B$ の二等分線であるから

$$AD : DC = AB : BC = 5 : 7$$

$$\text{ゆえに } AD = \frac{5}{5+7}AC = \frac{5}{12} \times 6 = \frac{5}{2}$$

AI は $\angle A$ の二等分線であるから

$$BI : ID = AB : AD = 5 : \frac{5}{2} = 2 : 1$$



- (2) (1) の結果から $\vec{AD} = \frac{5}{12}\vec{AC}$, $\vec{AI} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 2\vec{AD})$

$$\text{よって } \vec{AI} = \frac{1}{3}\left(\vec{AB} + 2 \times \frac{5}{12}\vec{AC}\right) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{5}{18}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{18}\vec{c}$$

- (3) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると $\cos \theta = \cos A = \frac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$

$$\text{よって } \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos \theta = 5 \cdot 6 \times \frac{1}{5} = 6$$

- (4) AB の中点を M とすると $\vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = x\vec{b} + y\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$
- $$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + y\vec{c}$$

P が AB の垂直二等分線上にあるとき、 $\vec{MP} \perp \vec{b}$ であるから

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2 + y\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 5^2 + y \cdot 6 = 0$$

$$\text{よって } 25x + 6y = \frac{25}{2}$$

- (5) AC の中点を N とすると $\vec{NP} = \vec{AP} - \vec{AN} = x\vec{b} + y\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c}$
- $$= x\vec{b} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{c}$$

P が AC の垂直二等分線上にあるとき、 $\vec{NP} \perp \vec{c}$ であるから

$$x\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(y - \frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x \cdot 6 + \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 6^2 = 0$$

$$\text{よって } x + 6y = 3$$

O はこれと (4) の結果を満たす点であるから $\vec{AO} = \frac{19}{48}\vec{b} + \frac{125}{288}\vec{c}$

- 3** (1) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$, $(x-2)(x-3)$ でそれぞれ割った商を $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ とおくと

$$P(x) = (x-1)(x+2)Q_1(x) + 2x - 1$$

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q_2(x) + x + 7$$

第1式, 第2式にそれぞれ $x = -2$, $x = 3$ を代入すると

$$P(-2) = -5, \quad P(3) = 10 \quad \dots (*)$$

$P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax + b$ とおくと

$$P(x) = (x+2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

上式に $x = -2, 3$ を代入すると

$$P(-2) = -2a + b, \quad P(3) = 3a + b \quad \dots (**)$$

(*), (**) より $-2a + b = -5$, $3a + b = 10$

これを解いて $a = 3$, $b = 1$ よって, 求める余りは $3x + 1$

- (2)
$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin \theta \cos \theta \cdot \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \end{aligned}$$

したがって, 与えられた方程式は

$$(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + 2\cos \theta = 0$$

$$\text{すなわち} \quad \cos \theta(2\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1) = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ であるから} \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$$

- (3) $t = 3^x$ とおくと, 不等式 $2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+2} + 9 < 0$ は

$$2t^2 - 9t + 9 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-3)(2t-3) < 0$$

$$t > 0 \text{ に注意して} \quad \frac{3}{2} < t < 3 \quad \text{よって} \quad 1 - \log_3 2 < x < 1$$

- 4 (1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の中心は原点, 半径は 1
 円の中心 (原点) から直線 $x + 2y = k$ ($x + 2y - k = 0$) までの距離 d は

$$d = \frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

このとき $d < 1$ であるから $\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 1$ よって $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

- (2) 2点 P, Q を通る円は, 実数 t を用いて

$$x^2 + y^2 - 1 + t(x + 2y - k) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}t\right)^2 + (y + t)^2 = \frac{5}{4}t^2 + tk + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

この円の中心 $\left(-\frac{t}{2}, -t\right)$ について $-t = 2\left(-\frac{t}{2}\right)$

よって, P, Q を通る円の中心は直線 $y = 2x$ 上にある.

- (3) (2) で求めた円の中心 $\left(-\frac{t}{2}, -t\right)$ が $(a, 2a)$ であるから $t = -2a$
 これを ② の右辺に代入することにより

$$r^2 = \frac{5}{4}(-2a)^2 + (-2a)k + 1 = 5a^2 - 2ak + 1$$

- (4) $t = -2a$ であるから, ① は

$$x^2 + y^2 - 1 - 2a(x + 2y - k) = 0$$

R(2, 1) は, この円周上の点であるから

$$2^2 + 1^2 - 1 - 2a(2 + 2 \cdot 1 - k) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(4 - k) = 2$$

(1) の結果から, $4 - k \neq 0$ であることに注意して $a = \frac{2}{4 - k}$

ゆえに, (1) で求めた k の値の範囲により $\frac{2}{4 + \sqrt{5}} < a < \frac{2}{4 - \sqrt{5}}$

よって, 3点 P, Q, R を通る円の中心の x 座標の範囲は

$$\frac{2}{4 + \sqrt{5}} < x < \frac{2}{4 - \sqrt{5}}$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad 2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2 = 4(1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) \\ = 4 \times \frac{10(10+1)(2 \cdot 10 + 1)}{6} = \mathbf{1540}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2 = \frac{20(20+1)(2 \cdot 20 + 1)}{6} = 2870 \text{ より}$$

$$1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2 = (1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2) - (2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2) \\ = 2870 - 1540 = \mathbf{1330}$$

$$(2) \quad a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = 4(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ = 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ = \frac{\mathbf{2n(n+1)(2n+1)}}{\mathbf{3}}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(2 \cdot 2n + 1)}{6} = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$$

$$\text{よって} \quad b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 \\ = \{1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2\} - a_n \\ = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \\ = \frac{\mathbf{n(2n+1)(2n-1)}}{\mathbf{3}}$$

(3) (2)の結果により

$$\frac{1}{a_n} - \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3}{2n(n+1)(2n+1)} - \frac{3}{2n(2n+1)} \\ = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2(n+1)(2n+1)}} \\ \frac{1}{b_n} + \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3}{n(2n+1)(2n-1)} + \frac{3}{2n(2n+1)} \\ = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2n(2n-1)}}$$

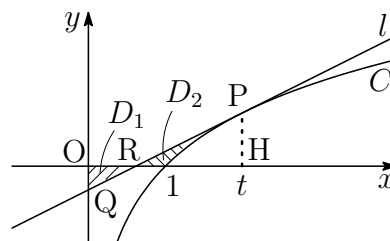
(4) (3)の2式の辺々を加えることにより

$$c_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = \frac{3}{2n(2n-1)} - \frac{3}{2(n+1)(2n+1)} \\ \text{よって} \quad S_n = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{3}{2k(2k-1)} - \frac{3}{2(k+1)(2k+1)} \right\} \\ = \frac{3}{2} - \frac{3}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{\mathbf{3n(2n+3)}}{\mathbf{2(n+1)(2n+1)}}$$

- 6 (1) $y = \log x$ を微分すると $y' = \frac{1}{x}$
 C 上の点 $P(t, \log t)$ における接線 l は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t)$$

よって $y = \frac{x}{t} + \log t - 1$



- (2) (1) で得た l の方程式に $x = 0$ を代入すると $y = \log t - 1$
 同様に, l の方程式に $y = 0$ を代入すると $x = t - t \log t$
 よって $Q(0, \log t - 1), R(t - t \log t, 0)$

- (3) P から x 軸に垂線 PH を引くと, $1 < t < e$ により

$$OQ = 1 - \log t, \quad OR = t - t \log t,$$

$$PH = \log t, \quad RH = t - (t - t \log t) = t \log t$$

よって $S_1(t) = \frac{1}{2} OQ \cdot OR = \frac{1}{2} (1 - \log t)(t - t \log t) = \frac{t}{2} (1 - \log t)^2$

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \frac{1}{2} RH \cdot PH - \int_1^t \log x \, dx \\ &= \frac{1}{2} t \log t \cdot \log t - \left[x(\log x - 1) \right]_1^t \\ &= \frac{1}{2} t (\log t)^2 - t(\log t - 1) - 1 \end{aligned}$$

- (4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) = \frac{t}{2} (1 - \log t)^2 + \frac{1}{2} t (\log t)^2 - t(\log t - 1) - 1 \\ &= t(\log t)^2 - 2t \log t + \frac{3}{2} t - 1 \end{aligned}$$

$S(t)$ を微分すると $S'(t) = (\log t)^2 - \frac{1}{2} = \left(\log t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\log t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

したがって, $S(t)$ の増減表は

t	(1)	...	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$...	(e)
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$		↘	極小	↗	

ゆえに, $t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ で $S(t)$ は最小となり, 最小値は

$$S(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1 = (2 - \sqrt{2}) e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1$$

7 (1) $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ であるから

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} - 1 = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$t = \tan x \text{ を } x \text{ について微分すると } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{よって } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$$

(2) $t = \tan x$ とおくと, (1) の結果により

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$0 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2 - \cos 2x} dx &= \int_0^1 \frac{t}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t}{1+3t^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{6} \log(1+3t^2) \right]_0^1 = \frac{1}{6} \log 4 = \frac{1}{3} \log 2 \end{aligned}$$

(3) 与えられた関数の x と y を入れ替えると

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

$$e^y > 0 \text{ に注意してこれを解くと } e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{よって, 求める逆関数は } y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(4) x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ より } \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

上式および (3) の結果により

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \int dt = t + C \\ &= \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

8 (1) $f(x)$, $g(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \sin x, \quad g'(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の接点が (p, q) であるから, $q = f(p) = g(p)$,
 $f'(p) = g'(p)$ より

$$q = \frac{1}{2} \cos p = \cos \frac{p}{2} + c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-\frac{1}{2} \sin p = -\frac{1}{2} \sin \frac{p}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

②より $\sin \frac{p}{2} \left(\cos \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$ $p \neq 0$ であるから $p = \frac{2}{3}\pi$

これを ①に代入すると $q = \frac{1}{2} \cos \frac{2}{3}\pi = \cos \frac{\pi}{3} + c$

ゆえに $q = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + c$ よって $(p, q) = \left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{4} \right)$, $c = -\frac{3}{4}$

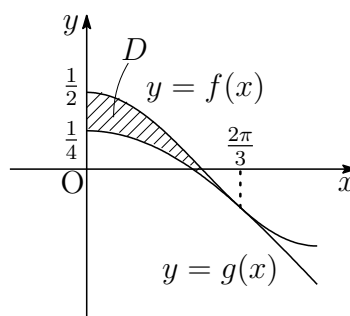
したがって $f(x) - g(x) = \frac{1}{2} \cos x - \left(\cos \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right) \quad \dots (*)$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) - \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \left(\cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

よって $f(x) \geq g(x)$ $\left(x = \frac{2\pi}{3} \text{ のとき等号が成り立つ} \right)$

(2) (1)の結果から, 図形 D は, 下の図の斜線部分である.



したがって, 求める回転体の体積 V は, (*)により

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} x\{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}x \cos x - x \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(x \sin x + \cos x) - 2 \left(x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \right) + \frac{3}{8}x^2 \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

よって
$$V = \pi \left(\frac{\pi^2}{3} - \sqrt{3}\pi + \frac{5}{2} \right)$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$