平成 26 年度　長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
平成 26 年 2 月 25 日

- 教育・薬学部　$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部　$\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 p を正の定数として，放物線 $C : y = (x-p)^2 + p^2$ を考える．C の 2 本の接線 l，m を考え，接点の x 座標を，それぞれ a，b とする．ただし，$a < 0$，$b > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) l と m の方程式を求めよ．

(2) l，m が原点を通るとき，a，b を p を用いて表せ．

(3) l，m が原点を通るとき，放物線 C と 2 本の接線 l および m によって囲まれた図形の面積を S とする．S を p を用いて表せ．

2 $\triangle$ABC において，AB $= 5$，BC $= 7$，CA $= 6$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\triangle$ABC の内心を I とする．$\angle$A の 2 等分線と $\angle$B の 2 等分線は点 I で交わる．$\angle$B の 2 等分線と辺 AC の交点を D とするとき，AD : DC と BI : ID を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\angle\mathrm{A} = \theta$ とする．$\cos\theta$ と内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(4) 実数 x，y を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\vec{b} + y\vec{c}$ と表される点 P を考える．点 P が辺 AB の垂直 2 等分線上にあるとき，x と y が満たす関係式を求めよ．

(5) $\triangle$ABC の外心を O とする．辺 AB の垂直 2 等分線と辺 AC の垂直 2 等分線は点 O で交わる．$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

3 次の問いに答えよ．

(1) 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ると余りが $2x-1$，$(x-2)(x-3)$ で割ると余りが $x+7$ であった．$P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，

$$\cos 3\theta + 2\cos\theta = 0$$

を満たす θ の値をすべて求めよ．

(3) 不等式

$$2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+2} + 9 < 0$$

を満たす x の範囲を求めよ．

4 k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる 2 点で交わるものとする．その 2 つの交点を P，Q とする．次の問いに答えよ．

(1) k の値の範囲を求めよ．

(2) 2 点 P，Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ．

(3) 上の (2) の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする．r^2 を a と k で表せ．

(4) 点 R の座標を $(2,\ 1)$ とする．k の値が (1) で求めた範囲を動くとき，3 点 P，Q，R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ．

5 1 から $2n$ までの偶数の平方の和を a_n，奇数の和を b_n とする．すなわち

$$a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2, \quad b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

である．なお，1 から n までの自然数の平方の和については

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．

(1) 偶数の平方の和 $2^2+4^2+\cdots+20^2$ と奇数の平方の和 $1^2+3^2+\cdots+19^2$ を求めよ．

(2) a_n と b_n を求めよ．

(3) $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ および $\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ を計算せよ．

(4) $c_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$ とするとき，$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ を求めよ．

6 曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線を l とする．ただし，$1 < t < e$ とする．e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 接線 l と y 軸との交点を Q とし，接線 l と x 軸との交点を R とする．Q と R の座標を求めよ．

(3) 接線 l と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D_1，接線 l と曲線 C および x 軸によって囲まれた図形を D_2 とする．D_1 の面積 $S_1(t)$ と D_2 の面積 $S_2(t)$ を求めよ．

(4) $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく．このとき，$S(t)$ の増減を調べ，その最小値およびそのときの t の値を求めよ．

7 次の問いに答えよ．

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x = t$ とおく．$\cos 2x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2 - \cos 2x}\,dx$ を求めよ．

(3) 関数 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ．

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

8 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x$$
$$g(x) = \cos\frac{x}{2} + c$$

と定義する．c は定数である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = 0$ 以外の点で接するように c の値を定め，接点 $(p,\ q)$ を求めよ．また，そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係を調べよ．

(2) 定数 c と接点 $(p,\ q)$ は (1) で求めたものとする．そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq p$ において，y 軸および 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ によって囲まれた図形を D とする．D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=(x-p)^2+p^2$ とおくと　$f'(x)=2(x-p)$

C 上の x 座標が a である点における接線 l の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

ゆえに　$y-\{(a-p)^2+p^2\}=2(a-p)(x-a)$

よって　$\boldsymbol{y=2(a-p)x-a^2+2p^2}$

同様に，C 上の x 座標が b である点における接線 m の方程式は

$$\boldsymbol{y=2(b-p)x-b^2+2p^2}$$

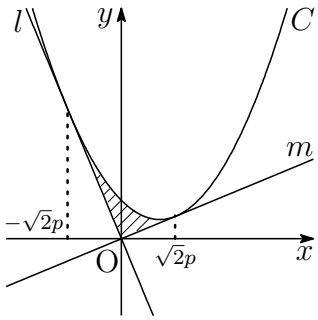
(2) l が原点を通るとき，(1) の結果から

$$0=2(a-p)\cdot 0-a^2+2p^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2=2p^2$$

$a<0$，$p>0$ であるから　$\boldsymbol{a=-\sqrt{2}p}$

同様に，m が原点を通るとき，(1) の結果から　$b^2=2p^2$

$b>0$，$p>0$ であるから　$\boldsymbol{b=\sqrt{2}p}$



(3) (1)，(2) の結果から

$$l: y=-2(\sqrt{2}+1)px$$
$$m: y=2(\sqrt{2}-1)px$$

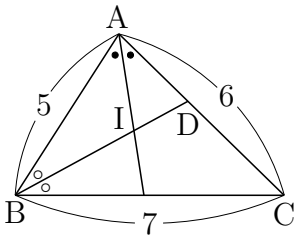
よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\sqrt{2}p}^{0}[(x-p)^2+p^2-\{-2(\sqrt{2}+1)px\}]dx\\&\qquad+\int_{0}^{\sqrt{2}p}\{(x-p)^2+p^2-2(\sqrt{2}-1)px\}dx\\&=\int_{-\sqrt{2}p}^{0}(x+\sqrt{2}p)^2dx+\int_{0}^{\sqrt{2}p}(x-\sqrt{2}p)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x+\sqrt{2}p)^3\right]_{-\sqrt{2}p}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-\sqrt{2}p)^3\right]_{0}^{\sqrt{2}p}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}p^3}\end{aligned}$$

補足 九大 2009 年一般前期文系数学 $\boxed{\mathbf{4}}$ の補足 [1] を参照. ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf

2 (1) BD は ∠B の二等分線であるから



$$\mathrm{AD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathbf{5 : 7}$$

ゆえに　$\mathrm{AD} = \dfrac{5}{5+7}\mathrm{AC} = \dfrac{5}{12} \times 6 = \dfrac{5}{2}$

AI は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{AD} = 5 : \frac{5}{2} = \mathbf{2 : 1}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2 \times \dfrac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{5}{18}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{5}{18}\vec{c}}$

(3) △ABC に余弦定理を適用すると　$\cos\theta = \cos A = \dfrac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

よって　$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = 5 \cdot 6 \times \dfrac{1}{5} = \mathbf{6}$

(4) AB の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\vec{b} + y\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + y\vec{c}$$

P が AB の垂直二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{MP}} \perp \vec{b}$ であるから

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2 + y\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 5^2 + y \cdot 6 = 0$$

よって　$\boldsymbol{25x + 6y = \dfrac{25}{2}}$

(5) AC の中点を N とすると　$\overrightarrow{\mathrm{NP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AN}} = x\vec{b} + y\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$

$$= x\vec{b} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{c}$$

P が AC の垂直二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{NP}} \perp \vec{c}$ であるから

$$x\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(y - \frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x \cdot 6 + \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 6^2 = 0$$

よって　$x + 6y = 3$

O はこれと (4) の結果を満たす点であるから　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \dfrac{19}{48}\vec{b} + \dfrac{125}{288}\vec{c}}$ ■

3 (1) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$，$(x-2)(x-3)$ でそれぞれ割った商を $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とおくと

$$P(x) = (x-1)(x+2)Q_1(x) + 2x - 1$$
$$P(x) = (x-2)(x-3)Q_2(x) + x + 7$$

第 1 式，第 2 式にそれぞれ $x = -2$，$x = 3$ を代入すると

$$P(-2) = -5, \quad P(3) = 10 \quad \cdots (*)$$

$P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x) = (x+2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

上式に $x = -2,\ 3$ を代入すると

$$P(-2) = -2a + b, \quad P(3) = 3a + b \quad \cdots (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$-2a + b = -5$，$3a + b = 10$
これを解いて　$a = 3$，$b = 1$　よって，求める余りは　$\boldsymbol{3x + 1}$

(2)
$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta \cdot \sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

したがって，与えらえた方程式は

$$(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 2\cos\theta = 0$$

すなわち　$\cos\theta(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2\pi}{3}}$

(3) $t = 3^x$ とおくと，不等式 $2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+2} + 9 < 0$ は

$$2t^2 - 9t + 9 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-3)(2t-3) < 0$$

$t > 0$ に注意して　$\dfrac{3}{2} < t < 3$　よって　$\boldsymbol{1 - \log_3 2 < x < 1}$　■

4 (1) 円 $x^2+y^2=1$ の中心は原点，半径は 1

円の中心 (原点) から直線 $x+2y=k$ $(x+2y-k=0)$ までの距離 d は

$$d=\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

このとき $d<1$ であるから　$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}<1$　よって　$\boldsymbol{-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}}$

(2) 2 点 P，Q を通る円は，実数 t を用いて

$$x^2+y^2-1+t(x+2y-k)=0 \qquad \cdots ①$$

$$\left(x+\frac{1}{2}t\right)^2+(y+t)^2=\frac{5}{4}t^2+tk+1 \qquad \cdots ②$$

この円の中心 $\left(-\dfrac{t}{2},-t\right)$ について　$-t=2\left(-\dfrac{t}{2}\right)$

よって，P，Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にある．

(3) (2) で求めた円の中心 $\left(-\dfrac{t}{2},-t\right)$ が $(a,\ 2a)$ であるから　$t=-2a$

これを ② の右辺に代入することにより

$$r^2=\frac{5}{4}(-2a)^2+(-2a)k+1=\boldsymbol{5a^2-2ak+1}$$

(4) $t=-2a$ であるから，① は

$$x^2+y^2-1-2a(x+2y-k)=0$$

R(2, 1) は，この円周上の点であるから

$$2^2+1^2-1-2a(2+2\cdot 1-k)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a(4-k)=2$$

(1) の結果から，$4-k\neq 0$ であることに注意して　$a=\dfrac{2}{4-k}$

ゆえに，(1) で求めた k の値の範囲により　$\dfrac{2}{4+\sqrt{5}}<a<\dfrac{2}{4-\sqrt{5}}$

よって，3 点 P，Q，R を通る円の中心の x 座標の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2}{4+\sqrt{5}}<x<\frac{2}{4-\sqrt{5}}}$$

■

5 (1)

$$2^2+4^2+\cdots+20^2=4(1^2+2^2+\cdots+10^2)$$
$$=4\times\frac{10(10+1)(2\cdot10+1)}{6}=\mathbf{1540}$$

$$1^2+2^2+\cdots+20^2=\frac{20(20+1)(2\cdot20+1)}{6}=2870 \text{ より}$$

$$1^2+3^2+\cdots+19^2=(1^2+2^2+\cdots+20^2)-(2^2+4^2+\cdots+20^2)$$
$$=2870-1540=\mathbf{1330}$$

(2)

$$a_n=2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=4(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}}$$

$$1^2+2^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(2\cdot2n+1)}{6}=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$$

よって

$$b_n=1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$$
$$=\{1^2+2^2+\cdots+(2n)^2\}-a_n$$
$$=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}}$$

(3) (2) の結果により

$$\frac{1}{a_n}-\frac{3}{2n(2n+1)}=\frac{3}{2n(n+1)(2n+1)}-\frac{3}{2n(2n+1)}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{3}{2(n+1)(2n+1)}}$$

$$\frac{1}{b_n}+\frac{3}{2n(2n+1)}=\frac{3}{n(2n+1)(2n-1)}+\frac{3}{2n(2n+1)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{2n(2n-1)}}$$

(4) (3) の 2 式の辺々を加えることにより

$$c_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{3}{2n(2n-1)}-\frac{3}{2(n+1)(2n+1)}$$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2k(2k-1)}-\frac{3}{2(k+1)(2k+1)}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2(n+1)(2n+1)}=\boldsymbol{\frac{3n(2n+3)}{2(n+1)(2n+1)}}$$

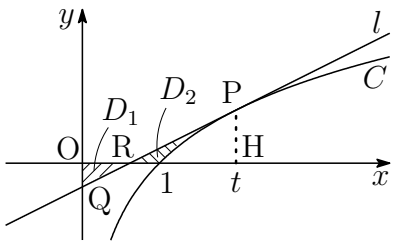
■

6 (1) $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線 l は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$$

よって　$\boldsymbol{y=\dfrac{x}{t}+\log t-1}$



(2) (1) で得た l の方程式に $x=0$ を代入すると　$y=\log t-1$

同様に，l の方程式に $y=0$ を代入すると　$x=t-t\log t$

よって　$\mathbf{Q(0,\ \log t-1)}$，$\mathbf{R(t-t\log t,\ 0)}$

(3) P から x 軸に垂線 PH を引くと，$1<t<e$ により

$$\mathrm{OQ}=1-\log t,\quad \mathrm{OR}=t-t\log t,$$
$$\mathrm{PH}=\log t,\qquad \mathrm{RH}=t-(t-t\log t)=t\log t$$

よって　$S_1(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=\dfrac{1}{2}(1-\log t)(t-t\log t)=\boldsymbol{\dfrac{t}{2}(1-\log t)^2}$

$$\begin{aligned}S_2(t)&=\frac{1}{2}\mathrm{RH}\cdot\mathrm{PH}-\int_1^t\log x\,dx\\&=\frac{1}{2}t\log t\cdot\log t-\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^t\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}t(\log t)^2-t(\log t-1)-1}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}S(t)=S_1(t)+S_2(t)&=\frac{t}{2}(1-\log t)^2+\frac{1}{2}t(\log t)^2-t(\log t-1)-1\\&=t(\log t)^2-2t\log t+\frac{3}{2}t-1\end{aligned}$$

$S(t)$ を微分すると　$S'(t)=(\log t)^2-\dfrac{1}{2}=\left(\log t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\log t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

したがって，$S(t)$ の増減表は

t	(1)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	(e)
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ゆえに，$\boldsymbol{t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$ で $S(t)$ は最小となり，最小値は

$$S(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}})=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1=\boldsymbol{(2-\sqrt{2})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1}$$

■

7 (1) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ であるから

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$t = \tan x$ を x について微分すると　$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

よって　$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\dfrac{dt}{dx}} = \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \boldsymbol{\dfrac{1}{1+t^2}}$

(2) $t = \tan x$ とおくと，(1) の結果により

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\cos 2x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t}{1+3t^2}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{6}\log(1+3t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{6}\log 4 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\log 2}$$

(3) 与えられた関数の x と y を入れ替えると

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

$e^y > 0$ に注意してこれを解くと　$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y = \log(x + \sqrt{x^2+1})}$

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ より　$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sqrt{x^2+1}$$

上式および (3) の結果により

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int dt = t + C$$

$$= \boldsymbol{\log(x + \sqrt{x^2+1}) + C} \quad (\boldsymbol{C}\ \text{は積分定数})$$

■

8 (1) $f(x)$，$g(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x, \quad g'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の接点が $(p,\ q)$ であるから，$q = f(p) = g(p)$，$f'(p) = g'(p)$ より

$$q = \frac{1}{2}\cos p = \cos\frac{p}{2} + c \qquad \cdots ①$$
$$-\frac{1}{2}\sin p = -\frac{1}{2}\sin\frac{p}{2} \qquad \cdots ②$$

② より　$\sin\frac{p}{2}\left(\cos\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$　$0 < p \leqq \pi$ であるから　$p = \frac{2}{3}\pi$

これを ① に代入すると　$q = \frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\pi = \cos\frac{\pi}{3} + c$

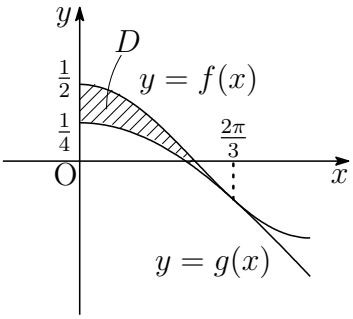
ゆえに　$q = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + c$　よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = \left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{4}\right)}$，　$\boldsymbol{c = -\frac{3}{4}}$

したがって　$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}\cos x - \left(\cos\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) \qquad \cdots (*)$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) - \cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$
$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

よって　$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)}$　$\left(\boldsymbol{x = \frac{2\pi}{3}}\text{のとき等号が成り立つ}\right)$

(2) (1) の結果から，図形 D は，下の図の斜線部分である．



したがって，求める回転体の体積 V は，$(*)$ により

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} x\{f(x)-g(x)\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}x\cos x - x\cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(x\sin x+\cos x) - 2\left(x\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{3}{8}x^2\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \pi\left(\frac{\pi^2}{3} - \sqrt{3}\pi + \frac{5}{2}\right)}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■