平成 25 年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成 25 年 2 月 25 日

- 工・歯・教育・薬学部は，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 円 $C_1 : x^2 - 4x + y^2 = 0$ と直線 $l : y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ がある．次の問いに答えよ．

(1) 円 C_1 と直線 l の交点のうち，原点 O と異なるものを A とする．点 A の座標を求めよ．さらに，原点 O を頂点とし，点 A を通る放物線 C_2 の方程式を $y = ax^2$ とする．a の値を求めよ．

(2) 直線 l の傾きを $\tan\theta$ と表す．そのときの θ を求めよ．ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) 円 C_1 と直線 l で囲まれた図形のうち，直線 l の上側にある部分の面積 S_1 を求めよ．

(4) 円 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形のうち，放物線 C_2 の上側にある部分の面積 S_2 を求めよ．

(5) 放物線 C_2 の接線で，直線 l とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるものを考える．そのすべてについて，接点の x 座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a_1 = \dfrac{3}{2}$，$a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n - 3a_n = 0\ (n \geqq 1)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 の値を求めよ．また，一般項 a_n を推測し，その推測の結果を数学的帰納法で証明せよ．

(2) $\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ であることを利用して $\sin\dfrac{7}{12}\pi$ を求め，$1 \leqq x \leqq 4$ のとき，次の方程式を解け．

$$\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(3) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき，$X = \log_2 \cos x$ の範囲を求め，次の不等式を解け．

$$2(\log_2 \cos x)^2 + (4 - \log_2 3)\log_2 \cos x + 2 - \log_2 3 \leqq 0$$

注意 $\log_2 \cos x$ は $\log_2(\cos x)$ を表す．

3 n を 2 以上の整数とする．n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n が与えられたとき，

$$P_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \quad Q_n = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2$$

とおく．次に，$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する $a_i a_j$ の和を R_n とする．たとえば，$R_2 = a_1 a_2$，$R_3 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$ である．同様に，$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する $(a_i - a_j)^2$ の和を S_n とする．たとえば，$S_2 = (a_1 - a_2)^2$，$S_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2$ である．次の問いに答えよ．

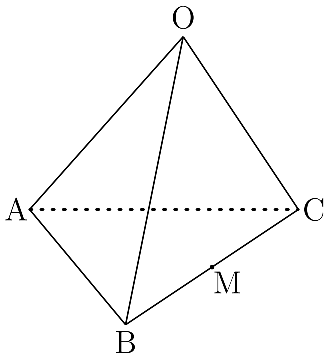
(1) P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ．

(2) すべての $n \geqq 2$ に対して $S_n = (n-1)Q_n - 2R_n$ と表されることを，数学的帰納法で証明せよ．

(3) Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ．

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ のとき，Q_4 の最小値と，そのときの a_1，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ．

4 右図のような四面体 OABC がある．各面 ABC，OBC，OCA，OAB の重心を，それぞれ P，Q，R，S とし，辺 BC の中点を M とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{m}$ とおく．次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{m}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ．

(2) 線分 OP と線分 AQ の交点を G とする．線分 OP 上の点 U は，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

と表され，線分 AQ 上の点 V は，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OV}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

と表される．このことを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ．

(3) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を表せ．

(4) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中から必要なものを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ をそれぞれ表せ．また，点 G が線分 BR および線分 CS 上にあることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 曲線 $C : y = e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線を l とする．次の問いに答えよ．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 接線 l と x 軸の交点，接線 l と y 軸の交点の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 曲線 C，接線 l，y 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ．

(4) $0 \leqq t \leqq 1$ とする．このとき，$S(t)$ の最大値およびそのときの t の値，$S(t)$ の最小値およびそのときの t の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = -x + 2 - \sqrt{1 - x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の増減およびグラフの凹凸を調べよ．また，y の最大値およびそのときの x の値，y の最小値およびそのときの x の値を求めよ．

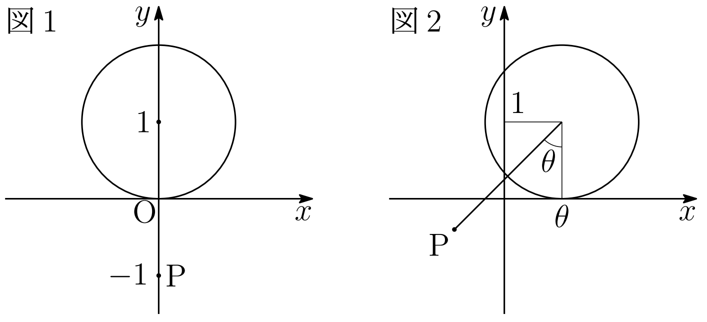
(2) 2 つの曲線

$$y = -x+2-\sqrt{1 - x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1) \quad \text{と} \quad y = -x+2+\sqrt{1 - x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$$

によって囲まれた図形 D を座標平面上に描け．なお，D の境界が座標軸との共有点をもつならば，その座標も記入せよ．

(3) 上の図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 半径 1 の円と長さ 2 の線分がある．この線分の一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える．線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする．この図形を下の図 1 のように xy 平面上に置く．すなわち，中心が点 $(0,\ 1)$，P が点 $(0, -1)$ と一致するように置く．



次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる．上の図 2 は円が θ だけ回転したときの状態を表している．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，点 P が描く曲線 C について考察する．次の問いに答えよ．

(1) 図 2 における点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ．

(2) 曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 直線 $y = -1$ および $x = \pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^2-4x+y^2=0\cdots$① と $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\cdots$② から y を消去すると

$$x^2-4x+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2=0 \quad \text{整理すると} \quad x^2-3x=0$$

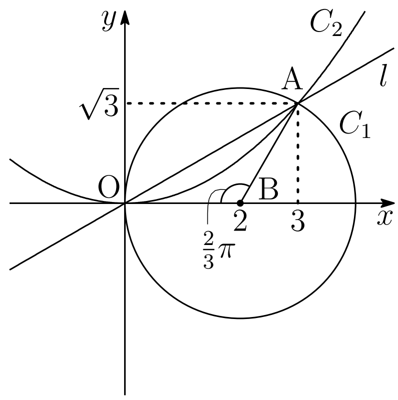
ゆえに　$x=0,\ 3$　② より，点 A の座標は　$\mathbf{(3,\ \sqrt{3})}$

$y=ax^2$ が点 A を通るから　$\sqrt{3}=a\cdot 3^2$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$

(3) $x^2-4x+y^2=0$ より　$(x-2)^2+y^2=2^2$

C_1 の中心を $\mathrm{B}(2,\ 0)$ とすると



$$\angle\mathrm{OBA}=\frac{2}{3}\pi$$

半径 2，中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$$

$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\sin\dfrac{2}{3}\pi=\sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{S_1=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}}$

(4) l と C_2 によって囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_0^3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{9}x^2\right)dx$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^3 x(x-3)dx=-\frac{\sqrt{3}}{9}\times\left(-\frac{1}{6}\right)(3-0)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$S_2=S_1+S$ であるから　$S_2=\left(\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(5) l とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線の傾きは

$$\tan\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \pm 2 \qquad (\text{複号同順})$$

$y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^2$ を微分すると $\qquad y' = \frac{2\sqrt{3}}{9}x$

したがって，求める接点の x 座標は

$$\frac{2\sqrt{3}}{9}x = \sqrt{3} \pm 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{9 \pm 6\sqrt{3}}{2}}$$

2 (1) $a_1 = \frac{3}{2}$ を $a_2 + 2a_2a_1 - 3a_1 = 0$ に代入すると

$$a_2 + 2a_2 \times \frac{3}{2} - 3 \times \frac{3}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{9}{8}}$$

$a_2 = \frac{9}{8}$ を $a_3 + 2a_3a_2 - 3a_2 = 0$ に代入すると

$$a_3 + 2a_3 \times \frac{9}{8} - 3 \times \frac{9}{8} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{27}{26}}$$

$a_3 = \frac{27}{26}$ を $a_4 + 2a_4a_3 - 3a_3 = 0$ に代入すると

$$a_4 + 2a_4 \times \frac{27}{26} - 3 \times \frac{27}{26} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_4 = \frac{81}{80}}$$

$a_4 = \frac{81}{80}$ を $a_5 + 2a_5a_4 - 3a_4 = 0$ に代入すると

$$a_5 + 2a_5 \times \frac{81}{80} - 3 \times \frac{81}{80} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_5 = \frac{243}{242}}$$

以上の結果から，自然数 n に対して

$$a_n = \frac{3^n}{3^n - 1} \quad \cdots (*)$$

と推測する．

i) $n = 1$ のとき　$a_1 = \frac{3^1}{3^1 - 1} = \frac{3}{2}$

よって，$n = 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n = k$ のとき

$$a_k = \frac{3^k}{3^k - 1}$$

が成り立つと仮定すると，$a_{k+1} + 2a_{k+1}a_k - 3a_k = 0$ より

$$a_{k+1} + 2a_{k+1} \times \frac{3^k}{3^k - 1} - 3 \times \frac{3^k}{3^k - 1} = 0$$

$$(3^k - 1)a_{k+1} + 2\cdot 3^k a_{k+1} - 3^{k+1} = 0$$

整理すると　$(3^{k+1} - 1)a_{k+1} = 3^{k+1}$　ゆえに　$a_{k+1} = \frac{3^{k+1}}{3^{k+1} - 1}$

よって，$n = k + 1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

解説 $(1 + 2a_n)a_{n+1} = 3a_n$ であるから，$a_n \neq 0$ のとき　$a_{n+1} \neq 0$

$a_1 \neq 0$ であるから，すべての自然数 n に対して　$a_n \neq 0$

$a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n - 3a_n = 0$ を $a_{n+1}a_n$ で割ると

$$\frac{1}{a_n} + 2 - \frac{3}{a_{n+1}} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{3^n}{a_n} = 2\cdot 3^n$$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3^{k+1}}{a_{k+1}} - \frac{3^k}{a_k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^k$ より

$$\frac{3^n}{a_n} - \frac{3}{a_1} = 2\cdot 3 \times \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3^n}{a_n} = 3^n - 1$$

よって　$a_n = \dfrac{3^n}{3^n - 1}$

(2) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin\frac{7}{12}\pi &= \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{4} < 1 < \dfrac{\pi}{3}$，$\pi < 4 < \dfrac{4}{3}\pi$ より

$\sin x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　$(1 \leqq x \leqq 4)$　これを解くと　$\boldsymbol{x = \frac{5}{12}\pi,\ \frac{7}{12}\pi}$

(3) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より　$0 < \cos x \leqq 1$

ゆえに　$\log_2 \cos x \leqq 0$　よって　$\boldsymbol{X \leqq 0}$

$X = \log_2 \cos x$ より，与式は　$2X^2 + (4-\log_2 3)X + 2 - \log_2 3 \leqq 0$

したがって　　$(X+1)(2X+2-\log_2 3) \leqq 0$

$-1 < \dfrac{\log_2 3 - 2}{2} < 0$ に注意して　$-1 \leqq X \leqq \dfrac{\log_2 3 - 2}{2}$

ゆえに　　$\log_2 \dfrac{1}{2} \leqq \log_2 \cos x \leqq \log_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{2} \leqq \cos x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $P_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$
$= {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)$
$= \boldsymbol{Q_4 + 2R_4}$

(2) $S_n = (n-1)Q_n - 2R_n \cdots (*)$ とする．

i) $n = 2$ のとき

$$S_2 = (a_1 - a_2)^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 - 2a_1a_2$$
$$= (2-1)Q_2 - 2R_2$$

よって，$n = 2$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n = k$ のとき

$$S_k = (k-1)Q_k - 2R_k$$

が成り立つと仮定し，両辺に $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(a_j - a_{k+1})^2$ を加えると

$$S_k + \sum_{j=1}^{k}(a_j - a_{k+1})^2 = (k-1)Q_k - 2R_k + \sum_{j=1}^{k}(a_j - a_{k+1})^2$$
$$S_{k+1} = (k-1)Q_k - 2R_k + \sum_{j=1}^{k}({a_j}^2 + {a_{k+1}}^2 - 2a_ja_{k+1})$$
$$= (k-1)Q_k - 2R_k + Q_k + k{a_{k+1}}^2 - 2\sum_{j=1}^{k}a_ja_{k+1}$$
$$= k(Q_k + {a_{k+1}}^2) - 2\left(R_k + \sum_{j=1}^{k}a_ja_{k+1}\right)$$
$$= kQ_{k+1} - 2R_{k+1}$$

よって，$n = k + 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，$n \geqq 2$ に対して，$(*)$ が成り立つ．

(3) (2) の結果から　$S_4 = 3Q_4 - 2R_4$

上式と (1) の結果から R_4 を消去すると　$\boldsymbol{Q_4 = \dfrac{1}{4}(P_4 + S_4)}$

(4) $a_1+a_2+a_3+a_4=1$ より　$P_4=1$

これを (3) の結果に代入すると　$Q_4=\dfrac{1}{4}(1+S_4)$

S_4 が最小となるとき，Q_4 は最小となる．

$$\begin{aligned}S_4=&(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_1-a_4)^2\\&+(a_2-a_3)^2+(a_2-a_4)^2+(a_3-a_4)^2\end{aligned}$$

したがって，$a_1=a_2=a_3=a_4$ のとき，S_4 は最小値 0 をとる．

よって，$\boldsymbol{a_1=a_2=a_3=a_4=\dfrac{1}{4}}$ のとき，Q_4 は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

補足　2 次方程式

$$\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2=0 \quad \text{すなわち} \quad nx^2-2x\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=0$$

の判別式 D は，$D \leqq 0$ であるから

$$D/4=\left(-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2-n\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2 \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2 \geqq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$$

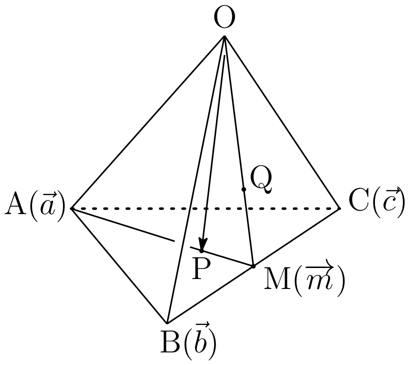
上式で等号が成り立つのは，$D=0$，すなわち

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$$

のときである．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) Q は △OBC の重心であるから，

OQ : QM = 2 : 1 より



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{2}{3}\vec{m}}$$

P は △ABC の重心であるから，

AP : PM = 2 : 1 より

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{m}}$$

(2) G は線分 OP 上の点であるから，実数 s を用いて $(0 \leqq s \leqq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{m}\right) = \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{2s}{3}\vec{m} \quad \cdots ①$$

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，および (1) の結果から $\vec{m} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2s}{3}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad \cdots ②$$

G は線分 AQ 上の点であるから，実数 t を用いて $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad \cdots ③$$

と表される．②，③ より

$$\frac{s}{3} = 1 - t,\quad s = t \quad \text{これを解いて} \quad s = t = \frac{3}{4}$$

$s = \dfrac{3}{4}$ を ① に代入して　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{m}}$

(3) M は BC の中点であるから　　$\vec{m} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

これを (2) の結果に代入して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}}$

(4) R，S はそれぞれ △OCA，△OAB の重心であるから，(1) と同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}}$$

上式および (3) の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \\ &= \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \\ &= \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OS}}\end{aligned}$$

よって，G は線分 BR および線分 CS 上にある．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y = e^x$ を微分すると　$y' = e^x$

ゆえに，点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$$y - e^t = e^t(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = e^t x - te^t + e^t}$$

(2) (1) の結果に $y = 0$ とすると

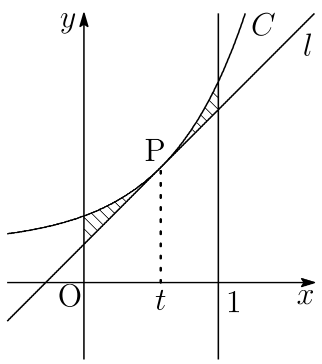
$$0 = e^t(x - t + 1) \quad \text{ゆえに} \quad x = t - 1$$

よって，l と x 軸との交点は　$\boldsymbol{(t-1,\ 0)}$

(1) の結果に $x = 0$ を代入すると　$y = -te^t + e^t$

よって，l と y 軸との交点は　$\boldsymbol{(0,\ (1-t)e^t)}$

(3) $S(t)$ は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$\begin{aligned}S(t) &= \int_0^1 \{e^x - (e^t x - te^t + e^t)\}dx \\ &= \left[\ e^x - \frac{e^t}{2}x^2 + (te^t - e^t)x\ \right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\left(t - \frac{3}{2}\right)e^t + e - 1}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　　$S'(t)=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)e^t$

$S(t)$ の増減は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$e-\frac{5}{2}$	$\searrow$	極小 $e-\sqrt{e}-1$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}-1$

$$S(1)-S(0)=\left(\frac{e}{2}-1\right)-\left(e-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}(3-e)>0$$

よって　　$\boldsymbol{t=1}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{e}{2}-1}$**，**

$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{e-\sqrt{e}-1}$

6 (1) $y=-x+2-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqq x\leqq 1)\cdots$① より

$$y'=-1-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}>0$$

$y'=0$ とすると　$x-\sqrt{1-x^2}=0$　これを解いて　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，関数 ① の増減および凹凸は次のようなる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y''		$+$	$+$	$+$	
y	3	⤷	極小 $2-\sqrt{2}$	⤴	1

よって　　$\boldsymbol{x=-1}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{3}$**，**

$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

(2) $y=-x+2+\sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1) \cdots$ ② より

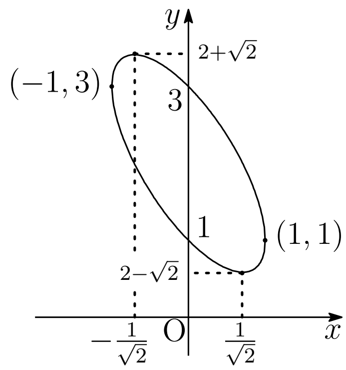
$$y'=-1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''=-\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=-\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}<0$$

$y'=0$ とすると　$x+\sqrt{1-x^2}=0$　これを解いて　$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，関数 ② の増減および凹凸は次のようなる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	3	↗	極大 $2+\sqrt{2}$	↘	1



① と ② によって囲まれた図形 D は右の図のようになる．また，

① より $x=0$ のとき　$y=1$

② より $x=0$ のとき　$y=3$

よって，D は，y 軸と **(0, 1)，(0, 3)** で交わる．

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-1}^{1}\{(-x+2+\sqrt{1-x^2})^2-(-x+2-\sqrt{1-x^2})^2\}dx\\&=4\pi\int_{-1}^{1}(-x+2)\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=-4\pi\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx+8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=8\pi\times\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{4\pi^2}\end{aligned}$$

解説　$f(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2+2px+2q+r$ とする．

2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ は，$ac-b^2>0$ のとき楕円型，$ac-b^2<0$ のとき双曲型，$ac-b^2=0$ のとき放物型という．

$ac-b^2\neq 0$ のとき，2 次曲線の中心 $(\alpha,\ \beta)$ は

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0\quad\text{すなわち}\quad\begin{cases}ax+by+p=0\\bx+cy+q=0\end{cases}$$

の解である．このとき

$$f(x,\ y)=a(x-\alpha)^2+2b(x-\alpha)(y-\beta)+c(y-\beta)^2+f(\alpha,\ \beta)$$

が成り立つ．したがって，2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ は

$$a(x-\alpha)^2+2b(x-\alpha)(y-\beta)+c(y-\beta)^2+f(\alpha,\ \beta)=0 \quad \cdots(*)$$

となる．行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1，λ_2 は，固有方程式

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$$

の解で，それぞれに対する単位固有ベクトルを $\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とし，

$$\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}=x'\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}+y'\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすると，$(*)$ は

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+f(\alpha,\ \beta)=0 \quad \cdots(**)$$

となる (計算の詳細は，九大 2010 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{5}}$ の解説を参照[1])．
D は，①，② から

$$x+y-2=\pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2+2xy+y^2-4x-4y+3=0$$

$f(x,\ y)=2x^2+2xy+y^2-4x-4y+3$ とすると，$a=2$，$b=1$，$c=1$

$$(\alpha,\ \beta)=(0,\ 2), \quad f(0,\ 2)=-1$$

固有方程式は　　$\lambda^2-3\lambda+1=0 \quad (\lambda_1\lambda_2=1)$

D の表す方程式は　　$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2-1=0$

ゆえに，楕円 D の面積 S は　　$S=\pi\sqrt{\dfrac{1}{\lambda_1}}\sqrt{\dfrac{1}{\lambda_2}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}=\pi$

求める回転体の体積 V は，パップス・ギュルダンの定理により (九大 2012 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{1}}$ の解説を参照[2])

$$V=2\pi\beta S=2\pi\cdot 2\times\pi=4\pi^2$$

---

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf
[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 円の中心を A とする．

動径 AP の x 軸の正の向きとなす角は，$\dfrac{3}{2}\pi-\theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sin\theta\\ -2\cos\theta\end{pmatrix}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}\theta\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\sin\theta\\ -2\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta-2\sin\theta\\ 1-2\cos\theta\end{pmatrix}$

よって　　$\boldsymbol{x=\theta-2\sin\theta,\ y=1-2\cos\theta}$

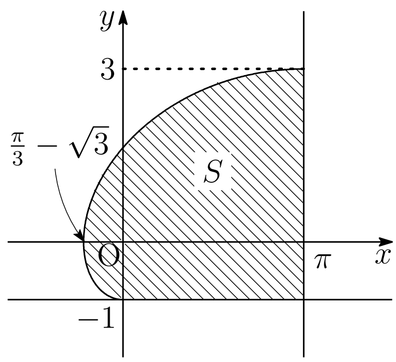
(2) (1) の結果から　$\dfrac{dx}{d\theta}=1-2\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\sin\theta$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	0	$\searrow$	極小 $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	π

θ	0	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	3

x 座標が最小となる点は $\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0\right)}$　$(\theta=\frac{\pi}{3})$
x 座標が最大となる点は $\boldsymbol{(\pi,\ 3)}$　$(\theta=\pi)$
y 座標が最小となる点は $\boldsymbol{(0,-1)}$　$(\theta=0)$
y 座標が最大となる点は $\boldsymbol{(\pi,\ 3)}$　$(\theta=\pi)$

(3) 求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{3}(\pi-x)dy\\
&=\int_{0}^{\pi}\{\pi-(\theta-2\sin\theta)\}\cdot 2\sin\theta\,d\theta\\
&=2\int_{0}^{\pi}(\pi\sin\theta-\theta\sin\theta+2\sin^2\theta)\,d\theta\\
&=2\int_{0}^{\pi}(\pi\sin\theta-\theta\sin\theta+1-\cos 2\theta)\,d\theta\\
&=2\Big[-\pi\cos\theta+\theta\cos\theta-\sin\theta+\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi}\\
&=2\times 2\pi=\boldsymbol{4\pi}
\end{aligned}$$