

平成 24 年度 長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

平成 24 年 2 月 25 日

- 教育・薬学部は, [1], [2], [4], [5] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は, [1], [4], [5], [6] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部は, [2], [3] 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は, [1], [6], [7], [8] 数 I・II・III・A・B (120 分)

[1] 四面体 OABC において

$$OA = 1, \quad OB = 3, \quad OC = 2, \quad \angle AOB = 90^\circ, \quad \angle AOC = \angle BOC = 120^\circ$$

とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) 平面 ABC 上に点 H をとり, s, t, u を実数として $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ とおく. このとき, $s + t + u = 1$ となることを示せ.
- (2) (1) の \overrightarrow{OH} が平面 ABC に垂直であるとき, s, t, u の値をそれぞれ求めよ.
- (3) 平面 OAB 上に点 K をとり, \overrightarrow{CK} が平面 OAB に垂直であるとする. このとき, \overrightarrow{OK} を \vec{a}, \vec{b} で表し, CK の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ.

[2] 次の問いに答えよ.

- (1) m を 5 以上の自然数とする. 次の不等式が成り立つことを, 数学的帰納法によって証明せよ.

$$m! > 2^m > m^2$$

- (2) 自然数 n に対する次の和を求めよ.

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

- (3) (2) で求めた S_n について, $S_n < \frac{3}{4}$ が成り立つことを示せ.
- (4) (2) で求めた S_n について, $S_n > \frac{2}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

3 3点 $P(4, -5)$, $Q(0, 3)$, $R(7, 4)$ を通る円を C とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 円 C の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおいて, a, b, c の値を求めよ.
- (2) 点 $S(-4, 0)$ を通り, 傾き m の直線を l とする. 直線 l が円 C と2つの交点をもつような傾き m の範囲を求めよ.
- (3) 傾き m が(2)の範囲にあるとき, 直線 l と円 C の2つの交点の中点の軌跡はある円の一部であることを示し, その軌跡を求めよ.

4 a を正の定数とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 半径 a の球面に内接する円柱の高さを g , 底面の半径を r とする. r を a と g を用いて表せ.
- (2) (1)の円柱で, 体積が最大になるときの高さ, およびそのときの底面の半径と体積をそれぞれ a を用いて表せ.
- (3) 半径 a の球面に内接する円錐がある. ただし, 円錐の頂点と底面の中心を結ぶ線分は球の中心を通るものとする. 円錐の高さを h , 底面の半径を s とする. s を a と h を用いて表せ.
- (4) (3)の円錐で, 体積が最大になるときの高さ, およびそのときの底面の半径と体積をそれぞれ a を用いて表せ.

5 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $y = f(x)$ の増減, 極値, グラフの凹凸, および変曲点を調べて, そのグラフをかけ. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2} = 0$ を用いてよい.
- (2) $y = f(x)$ の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ.
- (3) $t > 0$ とする. 曲線 $y = f(x)$, x 軸, および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めよ.
- (4) (3)で求めた $S(t)$ について, $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ を求めよ.

6 次の問いに答えよ.

- (1) $I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$ とする. $x = \tan \theta$ とおくことにより, $I_1 = \frac{\pi}{3}$ を示せ.
- (2) (1) の I_1 を部分積分して, I_1 と $I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ の関係式を導き, I_2 の値を求めよ.
- (3) $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ とおくことにより, 不定積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ を求めよ.
- (4) 合成関数の微分法を用いて, 関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数を求めよ.
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right\}$ を求めよ.

7 原点 O を中心とし, 半径 1 の円を C とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 直線 $y = 2$ 上の点 $P(t, 2)$ から円 C に 2 本の接線を引き, その接点を M, N とする. 直線 OP と弦 MN の交点を Q とする. 点 Q の座標を t を用いて表せ. ただし, t は実数とする.
- (2) 点 P が直線 $y = 2$ 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.

8 実数 x, y が連立不等式

$$\begin{cases} 10^{10} < 2^x 3^y < 10^{11} & \cdots (A) \\ 10^9 < 3^x 2^y < 10^{10} & \cdots (B) \end{cases}$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 連立不等式 (A), (B) が表す xy 平面上の領域は, どのような図形であるか答えよ. また, その理由を述べよ.
- (2) 連立不等式 (A), (B) が満たす実数 x, y において, $x + y$ がとりうる値の範囲, および $y - x$ がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ.
- (3) 連立不等式 (A), (B) を満たす整数 x, y を考える. このとき, $y - x$ が最大となる整数 x, y を求めよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい.

正解

1 (1) H は平面 ABC 上の点であるから、実数 α, β を用いて

$$\overrightarrow{AH} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

ゆえに $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \alpha(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \beta(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

整理すると $\overrightarrow{OH} = (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC}$
 $= (1 - \alpha - \beta)\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

$s = 1 - \alpha - \beta, t = \alpha, u = \beta$ とおくと $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$

このとき $s + t + u = (1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta = 1$

(2) 条件から $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 2$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 3 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}| \cos 120^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos 120^\circ = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ より

$$\begin{aligned} (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ (\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2)s + (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})t + (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c})u &= 0 \\ -s + 9t - 2u &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ であるから $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ より

$$\begin{aligned} (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) &= 0 \\ (\vec{a} \cdot \vec{c} - |\vec{a}|^2)s + (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b})t + (|\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c})u &= 0 \\ -2s - 3t + 5u &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② および $s + t + u = 1$ から $s = \frac{13}{23}, t = \frac{3}{23}, u = \frac{7}{23}$

(3) K は平面 OAB 上の点であるから、実数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{OK} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}$$

$\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{OA}$ であるから $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ より

$$\begin{aligned} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ x \cdot 1^2 + y \cdot 0 - (-1) &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{OB}$ であるから $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ より

$$\begin{aligned} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} &= 0 \\ x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ x \cdot 0 + y \cdot 3^2 - (-3) &= 0 \\ y &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{OK} = -\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{CK} = -\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{CK} \cdot \vec{a} = 0$, $\overrightarrow{CK} \cdot \vec{b} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CK}|^2 &= \overrightarrow{CK} \cdot \left(-\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) = \left(-\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot (-\vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = -1 + \frac{1}{3} \cdot (-3) + 2^2 = 2 \end{aligned}$$

ゆえに $|\overrightarrow{CK}| = \sqrt{2}$

$\triangle OAB$ の面積は $\triangle OAB = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$

よって、四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle OAB \cdot |\overrightarrow{CK}| = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad m! > 2^m > m^2 \quad \dots (*)$$

(i) $m = 5$ のとき

$$5! = 120, \quad 2^5 = 32, \quad 5^2 = 25$$

よって, $(*)$ が成り立つ.

(ii) $m = k$ ($k \geq 5$) のとき, $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1) \cdot k! > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \\ 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &> 2k^2 = (k+1)^2 + k^2 - 2k - 1 \\ &> (k+1)^2 + k^2 - 3k = (k+1)^2 + k(k-3) \\ &> (k+1)^2 \end{aligned}$$

よって, $m = k+1$ のときも, $(*)$ が成り立つ.

(i), (ii) より, 5以上の自然数 m について, $(*)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned} (2) \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} < \frac{3}{4}$$

(4) (2) の結果から

$$\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} > \frac{2}{3} \quad \text{整理すると} \quad n(n-9) > 16 \quad \dots (*)$$

自然数 n について, $n(n-9)$ が正となるのは $n > 9$

$$n = 10 \text{ のとき} \quad n(n-9) = 10 \cdot 1 = 10$$

$$n = 11 \text{ のとき} \quad n(n-9) = 11 \cdot 2 = 22$$

よって, $(*)$ を満たす最小の自然数 n は **11**

3 (1) 円 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ が 3 点 P(4, -5), Q(0, 3), R(7, 4) を通るから

$$4^2 + (-5)^2 + a \cdot 4 + b \cdot (-5) + c = 0,$$

$$0^2 + 3^2 + a \cdot 0 + b \cdot 3 + c = 0,$$

$$7^2 + 4^2 + a \cdot 7 + b \cdot 4 + c = 0$$

$$\text{整理すると} \quad \begin{cases} 4a - 5b + c = -41 \\ 3b + c = -9 \\ 7a + 4b + c = -65 \end{cases}$$

$$\text{これを解いて} \quad a = -8, b = 0, c = -9$$

(2) (1) の結果から $C: x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$

点 S(-4, 0) を通り、傾き m の直線 l の方程式は $y = m(x + 4)$

C と l の方程式から y を消去すると $x^2 + \{m(x + 4)\}^2 - 8x - 9 = 0$

すなわち $(m^2 + 1)x^2 + 2(4m^2 - 4)x + 16m^2 - 9 = 0 \quad \dots (*)$

方程式 (*) の判別式を D とすると

$$D/4 = (4m^2 - 4)^2 - (m^2 + 1)(16m^2 - 9) = -39m^2 + 25$$

l と C が 2 つの交点をもつとき、 $D > 0$ であるから

$$-39m^2 + 25 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad -\frac{5}{\sqrt{39}} < m < \frac{5}{\sqrt{39}}$$

別解 (1) の結果から $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$ すなわち $(x - 4)^2 + y^2 = 5^2$

ゆえに、 C は中心 (4, 0), 半径 5 の円.

点 S(-4, 0) を通り、傾き m の直線 l の方程式は

$$y = m(x + 4) \quad \text{ゆえに} \quad mx - y + 4m = 0$$

C の中心 (4, 0) から直線 l までの距離 d は

$$d = \frac{|m \cdot 4 - 0 + 4m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|8m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

C の半径 5 より、 l と C が 2 つの交点をもつとき、 $d < 5$ であるから

$$\frac{|8m|}{\sqrt{m^2 + 1}} < 5 \quad \text{整理すると} \quad 39m^2 - 25 < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -\frac{5}{\sqrt{39}} < m < \frac{5}{\sqrt{39}}$$

- (3) C と l の 2 つの交点の x 座標を α , β とすると, 方程式 (*) の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{2(4m^2 - 4)}{m^2 + 1} = \frac{8(1 - m^2)}{1 + m^2}$$

2 つの交点は l 上の点であるから, それらの点の座標は

$$(\alpha, m(\alpha + 4)), \quad (\beta, m(\beta + 4))$$

この中点 $P(x, y)$ は

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{4(1 - m^2)}{1 + m^2} = \frac{8}{1 + m^2} - 4$$

$$y = \frac{m(\alpha + 4) + m(\beta + 4)}{2} = m \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + 4 \right) = \frac{8m}{1 + m^2}$$

上の 2 式から $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{1 + m^2}\right)^2 = 1$

(2) の結果より, $m^2 < \frac{25}{39}$ であるから $1 \leq 1 + m^2 < \frac{64}{39}$

したがって $\frac{39}{8} < \frac{8}{1 + m^2} \leq 8$ ゆえに $\frac{7}{8} < \frac{8}{1 + m^2} - 4 \leq 4$

よって, 求める軌跡の方程式は

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \left(\frac{7}{8} < x \leq 4\right)$$

補足 m を媒介変数とする曲線

$$x = \frac{4(1 - m^2)}{1 + m^2}, \quad y = \frac{8m}{1 + m^2}$$

の表す図形は, m が実数全体であっても, 完全な円にはならない.

実際, $m = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$x = 4 \cos 2\theta, \quad y = 4 \sin 2\theta$$

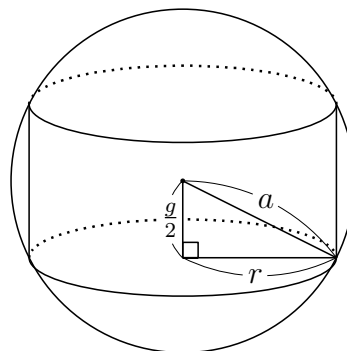
よって, 描く図形は $x^2 + y^2 = 16, (x, y) \neq (-4, 0)$

- 4 (1) 右の図の直角三角形に三平方の定理を適用すると

$$r^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 = a^2$$

ゆえに $r^2 = a^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2$

よって $r = \sqrt{a^2 - \frac{g^2}{4}}$



- (2) (1) の円柱の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi r^2 g = \pi \left(a^2 - \frac{g^2}{4} \right) g = \pi \left(a^2 g - \frac{g^3}{4} \right)$$

$$\frac{dV_1}{dg} = \pi \left(a^2 - \frac{3}{4}g^2 \right)$$

V_1 の増減表は、次のようになる。

g	(0)	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}a$...	(2a)
$\frac{dV_1}{dg}$		+	0	-	
V_1		↗	極大	↘	

よって、 V_1 は、 $g = \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$ のとき最大となる。このとき

$$r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}a \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

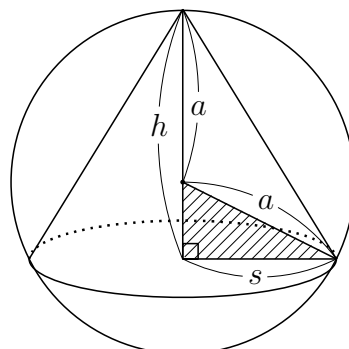
$$V_1 = \pi r^2 g = \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a \right)^2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$$

- (3) 右の図の斜線部の直角三角形に三平方の定理を適用すると

$$s^2 + (h - a)^2 = a^2$$

ゆえに $s^2 = 2ah - h^2$

よって $s = \sqrt{2ah - h^2}$



補足 図は、 $a < h < 2a$ のときで、斜線部の直角三角形の高さは $h - a$ である。
 $0 < h < a$ のとき、斜線部の直角三角形の高さは $a - h$ である。
 $h = a$ のとき、 $s = a$ である。したがって、 $0 < h < 2a$ において、

$$s^2 + (h - a)^2 = a^2 \quad \text{すなわち} \quad s = \sqrt{2ah - h^2}$$

- (4) (3) の円錐の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{\pi}{3}s^2h = \frac{\pi}{3}(2ah - h^2)h = \frac{\pi}{3}(2ah^2 - h^3)$$

$$\frac{dV_2}{dh} = \frac{\pi}{3}(4ah - 3h^2)$$

V_2 の増減表は、次のようになる。

h	(0)	...	$\frac{4}{3}a$...	(2a)
$\frac{dV_2}{dh}$		+	0	-	
V_2		↗	極大	↘	

よって、 V_2 は、 $h = \frac{4}{3}a$ のとき最大となる。このとき

$$s = \sqrt{2a \cdot \frac{4}{3}a - \left(\frac{4}{3}a\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3}s^2h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}a\right)^2 \cdot \frac{4}{3}a = \frac{32}{81}\pi a^3$$

補足 3 正数 $2(2a - h)$, h , h の相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\frac{2(2a - h) + h + h}{3} \geq \sqrt[3]{2(2a - h) \cdot h \cdot h} \quad \text{ゆえに} \quad (2a - h)h^2 \leq \frac{32}{27}a^3$$

よって $V_2 = \frac{\pi}{3}(2a - h)h^2 \leq \frac{32}{81}\pi a^3$

上式で等号が成立するとき $2(2a - h) = h$ すなわち $h = \frac{4}{3}a$

5 (1) $f(x) = xe^{-x^2}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-x^2)' \\ &= (1 - 2x^2)e^{-x^2} \\ f''(x) &= -4xe^{-x^2} + (1 - 2x^2)e^{-x^2}(-x^2)' \\ &= (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2} \end{aligned}$$

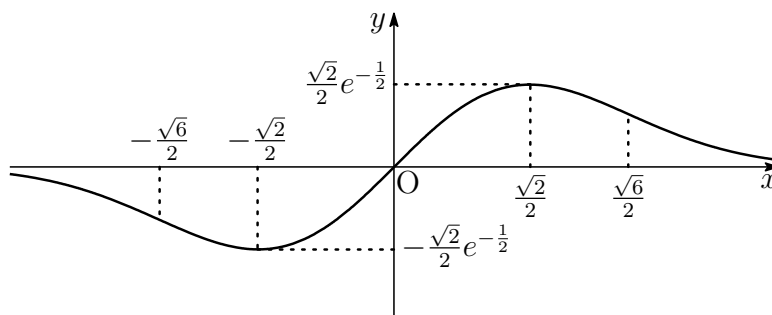
したがって、 $f(x)$ の増減、凹凸は次のようになる。

x	...	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき極大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

変曲点は $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

また、グラフの概形は次のようになる。



補足 $y = f(x)$ は、奇関数であるから、原点对称の曲線である。したがって、 $x \geq 0$ のグラフを元に $x \leq 0$ のグラフをかくことができる。

(2) (1) の増減表から

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

(3) $S(t) = \int_0^t xe^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^t = \frac{1}{2}(1 - e^{-t^2})$

(4) (3) の結果から $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-t^2}) = \frac{1}{2}$

6 (1) $x = \tan \theta$ とおくと $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

x と θ の対応は右のようになる.

x	$0 \rightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad I_1 &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

(2) I_1 に部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\sqrt{3}} (x)' \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \left[\frac{x}{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x \left\{ -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \right\} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2 + 1) - 1}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \left\{ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2(I_1 - I_2) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(3) $t = x + \sqrt{x^2 + 1} \dots \textcircled{1}$ より

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{t}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C \\ &= \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

- (4) ①より $y = \log t$ ゆえに $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$
 上式および②により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- (5) 求める極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \left[\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 = \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

- 7** (1) 直線 OP の方程式は $2x - ty = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
 直線 MN は P(t, 2) を極とする C の極線であるから

$$tx + 2y = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

Q は, ①, ② の交点であるから

$$x = \frac{t}{t^2 + 4}, \quad y = \frac{2}{t^2 + 4} \quad \text{よって} \quad Q\left(\frac{t}{t^2 + 4}, \frac{2}{t^2 + 4}\right)$$

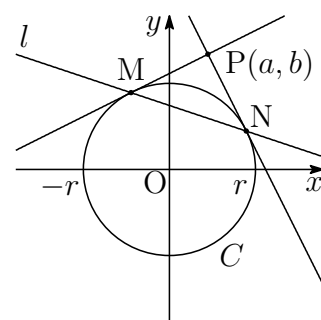
円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $P(a, b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ とする. 2 本の接線

$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $P(a, b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の 2 式から直線 $l : ax + by = r^2$ は 2 点 M, N を通る.
 このとき, l を P を極とする C の極線という.



(2) (1)の結果から $t = 2 \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$x = \frac{t}{t^2 + 4} = \frac{2 \tan \theta}{(2 \tan \theta)^2 + 4} = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

$$y = \frac{2}{t^2 + 4} = \frac{2}{(2 \tan \theta)^2 + 4} = \frac{1}{2} \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4}$$

よって、求める点 Q の軌跡の方程式は

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

8 (1) $a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$ とおき, (A), (B) の常用対数をとると

$$10 < ax + by < 11, \quad 9 < bx + ay < 10$$

したがって $0 < ax + by - 10 < 1$, $0 < bx + ay - 9 < 1$

ここで, $s = ax + by - 10$, $t = bx + ay - 9$ とおくと $0 < s < 1$, $0 < t < 1$

上の 2 式から
$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + s \\ 9 + t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 + s \\ 9 + t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} 10a - 9b + sa - tb \\ 9a - 10b - sb + ta \end{pmatrix} \quad \dots (*) \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} 10a - 9b \\ 9a - 10b \end{pmatrix} + \frac{s}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} + \frac{t}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} 10a - 9b \\ 9a - 10b \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

とおくと
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\alpha} + s\vec{u} + t\vec{v} \quad (|\vec{u}| = |\vec{v}|, 0 < s < 1, 0 < t < 1)$$

4 点を $A(\vec{\alpha})$, $B(\vec{\alpha} + \vec{u})$, $C(\vec{\alpha} + \vec{u} + \vec{v})$, $D(\vec{\alpha} + \vec{v})$ とすると, 表す領域は, ひし形 ABCD の内部 (境界を含まない).

(2) (*) から

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{(10a - 9b + sa - tb) + (9a - 10b - sb + ta)}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{(a - b)(19 + s + t)}{a^2 - b^2} = \frac{19 + s + t}{a + b} \\ y - x &= \frac{(9a - 10b - sb + ta) - (10a - 9b + sa - tb)}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{(a + b)(-1 - s + t)}{a^2 - b^2} = \frac{1 + s - t}{b - a} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{19}{\log_{10} 6} < x + y < \frac{21}{\log_{10} 6}, \quad 0 < y - x < \frac{2}{\log_{10} \frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \log_{10} 6 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781, \\ \log_{10} \frac{3}{2} &= \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0.4771 - 0.3010 = 0.1761 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{19}{\log_{10} 6} &= \frac{19}{0.7781} = 24.4\dots, \\ \frac{21}{\log_{10} 6} &= \frac{21}{0.7781} = 26.9\dots, \\ \frac{2}{\log_{10} \frac{3}{2}} &= \frac{2}{0.1761} = 11.3\dots \end{aligned}$$

(2) の結果から

$$24.4\dots < x + y < 26.9\dots, \quad 0 < y - x < 11.3\dots$$

整数 x, y について, $y - x$ が最大となるとき, 上の第2式から $y - x = 11$
 $x + y = (y - x) + 2x$ より, $x + y$ と $y - x$ の偶奇が一致するので $x + y = 25$
 よって $x = 7, y = 18$