平成 24 年度　長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
平成 24 年 2 月 25 日

- 教育・薬学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部　$\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 四面体 OABC において

$$\mathrm{OA}=1,\quad \mathrm{OB}=3,\quad \mathrm{OC}=2,\quad \angle\mathrm{AOB}=90^\circ,\quad \angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$$

とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 平面 ABC 上に点 H をとり，s，t，u を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおく．このとき，$s+t+u=1$ となることを示せ．

(2) (1) の $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直であるとき，s，t，u の値をそれぞれ求めよ．

(3) 平面 OAB 上に点 K をとり，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直であるとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) m を 5 以上の自然数とする．次の不等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

$$m!>2^m>m^2$$

(2) 自然数 n に対する次の和を求めよ．

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

(3) (2) で求めた S_n について，$S_n<\dfrac{3}{4}$ が成り立つことを示せ．

(4) (2) で求めた S_n について，$S_n>\dfrac{2}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

3 3 点 P$(4, -5)$，Q$(0,\ 3)$，R$(7,\ 4)$ を通る円を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 円 C の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおいて，a，b，c の値を求めよ．

(2) 点 S$(-4,\ 0)$ を通り，傾き m の直線を l とする．直線 l が円 C と 2 つの交点をもつような傾き m の範囲を求めよ．

(3) 傾き m が (2) の範囲にあるとき，直線 l と円 C の 2 つの交点の中点の軌跡はある円の一部分であることを示し，その軌跡を求めよ．

4 a を正の定数とする．次の問いに答えよ．

(1) 半径 a の球面に内接する円柱の高さを g，底面の半径を r とする．r を a と g を用いて表せ．

(2) (1) の円柱で，体積が最大になるときの高さ，およびそのときの底面の半径と体積をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) 半径 a の球面に内接する円錐(すい)がある．ただし，円錐の頂点と底面の中心を結ぶ線分は球の中心を通るものとする．円錐の高さを h，底面の半径を s とする．s を a と h を用いて表せ．

(4) (3) の円錐で，体積が最大になるときの高さ，およびそのときの底面の半径と体積をそれぞれ a を用いて表せ．

5 関数 $f(x)=xe^{-x^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，および変曲点を調べて，そのグラフをかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2}=0$ を用いてよい．

(2) $y=f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

(3) $t>0$ とする．曲線 $y=f(x)$，x 軸，および直線 $x=t$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(4) (3) で求めた $S(t)$ について，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ を求めよ．

6 次の問いに答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ とする．$x = \tan\theta$ とおくことにより，$I_1 = \dfrac{\pi}{3}$ を示せ．

(2) (1) の I_1 を部分積分して，I_1 と $I_2 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の関係式を導き，I_2 の値を求めよ．

(3) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

(4) 合成関数の微分法を用いて，関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ．

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\}$ を求めよ．

7 原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 $y = 2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 C に 2 本の接線を引き，その接点を M，N とする．直線 OP と弦 MN の交点を Q とする．点 Q の座標を t を用いて表せ．ただし，t は実数とする．

(2) 点 P が直線 $y = 2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

8 実数 x，y が連立不等式

$$\begin{cases} 10^{10} < 2^x 3^y < 10^{11} & \cdots \text{(A)} \\ 10^9 < 3^x 2^y < 10^{10} & \cdots \text{(B)} \end{cases}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) 連立不等式 (A)，(B) が表す xy 平面上の領域は，どのような図形であるか答えよ．また，その理由を述べよ．

(2) 連立不等式 (A)，(B) が満たす実数 x，y において，$x+y$ がとりうる値の範囲，および $y-x$ がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

(3) 連立不等式 (A)，(B) を満たす整数 x，y を考える．このとき，$y-x$ が最大となる整数 x，y を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい．

解答例

1 (1) H は平面 ABC 上の点であるから，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \alpha(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \beta(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

整理すると　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$= (1-\alpha-\beta)\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$

$s = 1-\alpha-\beta$，$t = \alpha$，$u = \beta$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$

このとき　$s + t + u = (1-\alpha-\beta) + \alpha + \beta = 1$

(2) 条件から　$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 3$，$|\vec{c}| = 2$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 1\cdot 3\cdot 0 = 0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 120^\circ = 1\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 120^\circ = 3\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ より

$$(s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$
$$(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2)s + (|\vec{b}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b})t + (\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c})u = 0$$
$$-s + 9t - 2u = 0 \qquad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ より

$$(s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c})\cdot(\vec{c} - \vec{a}) = 0$$
$$(\vec{a}\cdot\vec{c} - |\vec{a}|^2)s + (\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b})t + (|\vec{c}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{c})u = 0$$
$$-2s - 3t + 5u = 0 \qquad \cdots ②$$

①，② および $s + t + u = 1$ から　$\boldsymbol{s = \frac{13}{23}}$，$\boldsymbol{t = \frac{3}{23}}$，$\boldsymbol{u = \frac{7}{23}}$

(3) K は平面 OAB 上の点であるから，実数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{CK}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CK}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{CK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ より

$$\begin{aligned}(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ x \cdot 1^2 + y \cdot 0 - (-1) &= 0 \\ x &= -1\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CK}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{CK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ より

$$\begin{aligned}(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} &= 0 \\ x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ x \cdot 0 + y \cdot 3^2 - (-3) &= 0 \\ y &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OK}} = -\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CK}} = -\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CK}} \cdot \vec{a} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{CK}} \cdot \vec{b} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CK}} \cdot \left(-\vec{a} - \frac{1}{3}b - \vec{c}\right) = \left(-\vec{a} - \frac{1}{3}b - \vec{c}\right) \cdot (-\vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = -1 + \frac{1}{3} \cdot (-3) + 2^2 = 2\end{aligned}$$

ゆえに　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{CK}}| = \sqrt{2}}$

$\triangle$OAB の面積は　$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$

よって，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{CK}}| = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

■

2 (1) $$m! > 2^m > m^2 \qquad \cdots(*)$$

(i) $m=5$ のとき

$$5! = 120, \quad 2^5 = 32, \quad 5^2 = 25$$

よって，$(*)$ が成り立つ．

(ii) $m=k$ $(k \geqq 5)$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1)\cdot k! > 2\cdot 2^k = 2^{k+1}\\ 2^{k+1} &= 2\cdot 2^k\\ &> 2k^2 = (k+1)^2 + k^2 - 2k - 1\\ &> (k+1)^2 + k^2 - 3k = (k+1)^2 + k(k-3)\\ &> (k+1)^2\end{aligned}$$

よって，$m=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，5 以上の自然数 m について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} < \frac{3}{4}$$

(4) (2) の結果から

$$\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} > \frac{2}{3} \quad \text{整理すると} \quad n(n-9) > 16 \qquad \cdots(*)$$

自然数 n について，$n(n-9)$ が正となるのは　$n > 9$

$$n = 10 \text{ のとき} \quad n(n-9) = 10\cdot 1 = 10$$
$$n = 11 \text{ のとき} \quad n(n-9) = 11\cdot 2 = 22$$

よって，$(*)$ を満たす最小の自然数 n は　**11**　■

3 (1) 円 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ が 3 点 P$(4,-5)$，Q$(0,\ 3)$，R$(7,\ 4)$ を通るから

$$4^2+(-5)^2+a\cdot 4+b\cdot(-5)+c=0,$$
$$0^2+3^2+a\cdot 0+b\cdot 3+c=0,$$
$$7^2+4^2+a\cdot 7+b\cdot 4+c=0$$

整理すると $\begin{cases} 4a-5b+c=-41 \\ 3b+c=-9 \\ 7a+4b+c=-65 \end{cases}$

これを解いて $\boldsymbol{a=-8,\ b=0,\ c=-9}$

(2) (1) の結果から $C: x^2+y^2-8x-9=0$

点 S$(-4,\ 0)$ を通り，傾き m の直線 l の方程式は $y=m(x+4)$

C と l の方程式から y を消去すると $x^2+\{m(x+4)\}^2-8x-9=0$

すなわち $(m^2+1)x^2+2(4m^2-4)x+16m^2-9=0 \quad \cdots(*)$

方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=(4m^2-4)^2-(m^2+1)(16m^2-9)=-39m^2+25$$

l と C が 2 つの交点をもつとき，$D>0$ であるから

$-39m^2+25>0$ これを解いて $\boldsymbol{-\dfrac{5}{\sqrt{39}}<m<\dfrac{5}{\sqrt{39}}}$

別解 (1) の結果から $x^2+y^2-8x-9=0$ すなわち $(x-4)^2+y^2=5^2$

ゆえに，C は中心 $(4,\ 0)$，半径 5 の円.

点 S$(-4,\ 0)$ を通り，傾き m の直線 l の方程式は

$$y=m(x+4) \quad \text{ゆえに} \quad mx-y+4m=0$$

C の中心 $(4,\ 0)$ から直線 l までの距離 d は

$$d=\frac{|m\cdot 4-0+4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|8m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

C の半径 5 より，l と C が 2 つの交点をもつとき，$d<5$ であるから

$\dfrac{|8m|}{\sqrt{m^2+1}}<5$ 整理すると $39m^2-25<0$

これを解いて $\boldsymbol{-\dfrac{5}{\sqrt{39}}<m<\dfrac{5}{\sqrt{39}}}$

(3) C と l の 2 つの交点の x 座標を α，β とすると，方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{2(4m^2-4)}{m^2+1}=\frac{8(1-m^2)}{1+m^2}$$

2 つの交点は l 上の点であるから，それらの点の座標は

$$(\alpha,\ m(\alpha+4)),\quad (\beta,\ m(\beta+4))$$

この中点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4(1-m^2)}{1+m^2}=\frac{8}{1+m^2}-4$$
$$y=\frac{m(\alpha+4)+m(\beta+4)}{2}=m\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+4\right)=\frac{8m}{1+m^2}$$

上の 2 式から　$\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\left(\dfrac{y}{4}\right)^2=\left(\dfrac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2+\left(\dfrac{2m}{1+m^2}\right)^2=1$

(2) の結果より，$m^2<\dfrac{25}{39}$ であるから　$1\leqq 1+m^2<\dfrac{64}{39}$

したがって　$\dfrac{39}{8}<\dfrac{8}{1+m^2}\leqq 8$　ゆえに　$\dfrac{7}{8}<\dfrac{8}{1+m^2}-4\leqq 4$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=16\quad\left(\frac{7}{8}<x\leqq 4\right)}$$

補足 m を媒介変数とする曲線

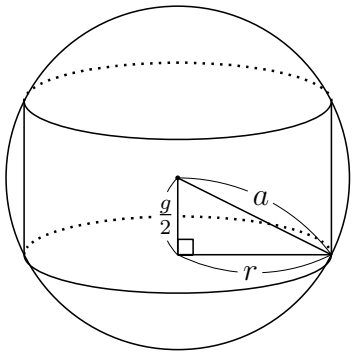
$$x=\frac{4(1-m^2)}{1+m^2},\quad y=\frac{8m}{1+m^2}$$

の表す図形は，m が実数全体であっても，完全な円にはならない．
実際，$m=\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x=4\cos 2\theta,\quad y=4\sin 2\theta$$

よって，描く図形は　$x^2+y^2=16,\ (x,\ y)\neq(-4,\ 0)$　■

4 (1) 右の図の直角三角形に三平方の定理を適用すると



$$r^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 = a^2$$

ゆえに　$r^2 = a^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2$

よって　$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 - \frac{g^2}{4}}}$

(2) (1) の円柱の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi r^2 g = \pi\left(a^2 - \frac{g^2}{4}\right)g = \pi\left(a^2 g - \frac{g^3}{4}\right)$$

$$\frac{dV_1}{dg} = \pi\left(a^2 - \frac{3}{4}g^2\right)$$

V_1 の増減表は，次のようになる．

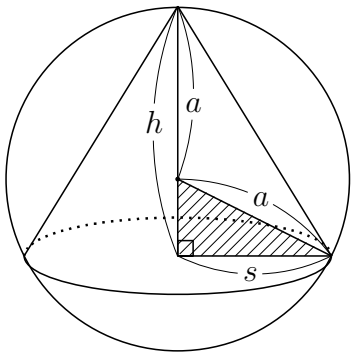
g	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}a$	$\cdots$	$(2a)$
$\frac{dV_1}{dg}$		$+$	0	$-$	
V_1		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，V_1 は，$g = \frac{2}{\sqrt{3}}a = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}$ のとき最大となる．このとき

$$r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}a}$$

$$V_1 = \pi r^2 g = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}a = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3}$$

(3) 右の図の斜線部の直角三角形に三平方の定理を適用すると



$$s^2 + (h-a)^2 = a^2$$

ゆえに　$s^2 = 2ah - h^2$

よって　$\boldsymbol{s = \sqrt{2ah - h^2}}$

補足 図は，$a < h < 2a$ のときで，斜線部の直角三角形の高さは $h - a$ である．
$0 < h < a$ のとき，斜線部の直角三角形の高さは $a - h$ である．
$h = a$ のとき，$s = a$ である．したがって，$0 < h < 2a$ において，

$$s^2 + (h-a)^2 = a^2 \quad \text{すなわち} \quad s = \sqrt{2ah - h^2}$$

(4) (3) の円錐の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{\pi}{3}s^2h = \frac{\pi}{3}(2ah - h^2)h = \frac{\pi}{3}(2ah^2 - h^3)$$
$$\frac{dV_2}{dh} = \frac{\pi}{3}(4ah - 3h^2)$$

V_2 の増減表は，次のようになる．

h	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{3}a$	$\cdots$	$(2a)$
$\frac{dV_2}{dh}$		$+$	0	$-$	
V_2		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，V_2 は，$h = \boldsymbol{\frac{4}{3}a}$ のとき最大となる．このとき

$$s = \sqrt{2a \cdot \frac{4}{3}a - \left(\frac{4}{3}a\right)^2} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}a}$$
$$V_2 = \frac{\pi}{3}s^2h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}a\right)^2 \cdot \frac{4}{3}a = \boldsymbol{\frac{32}{81}\pi a^3}$$

補足 3 正数 $2(2a-h)$, h, h の相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\frac{2(2a-h)+h+h}{3} \geqq \sqrt[3]{2(2a-h)\cdot h \cdot h} \quad \text{ゆえに} \quad (2a-h)h^2 \leqq \frac{32}{27}a^3$$

よって　$V_2 = \frac{\pi}{3}(2a-h)h^2 \leqq \frac{32}{81}\pi a^3$

上式で等号が成立するとき　$2(2a-h) = h$　すなわち　$h = \frac{4}{3}a$　■

5 (1) $f(x) = xe^{-x^2}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-x^2)' \\ &= (1-2x^2)e^{-x^2} \\ f''(x) &= -4xe^{-x^2} + (1-2x^2)e^{-x^2}(-x^2)' \\ &= (4x^3-6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2-3)e^{-x^2} \end{aligned}$$

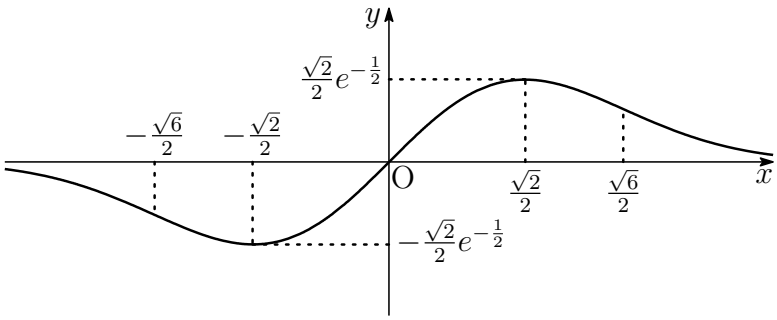
したがって，$f(x)$ の増減，凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤵	変曲点	⤷	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵	変曲点	⤷

$\boldsymbol{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}}$ ，$\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}}$

変曲点は $\boldsymbol{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)}$，$\boldsymbol{(0,\ 0)}$，$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)}$

また，グラフの概形は次のようになる．



補足 $y = f(x)$ は，奇関数であるから，原点対称の曲線である．したがって，$x \geqq 0$ のグラフを元に $x \leqq 0$ のグラフをかくことができる．

(2) (1) の増減表から

$\boldsymbol{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}}$ ，$\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}}$

(3) $S(t) = \displaystyle\int_0^t xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^t = \boldsymbol{\frac{1}{2}(1-e^{-t^2})}$

(4) (3) の結果から $\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-t^2}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ ■

6 (1) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	$0\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

よって　$$I_1=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

(2) I_1 に部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{\sqrt{3}}(x)'\frac{1}{x^2+1}\,dx\\
&=\left[\ \frac{x}{x^2+1}\ \right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x\left\{-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right\}dx\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2}dx\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\left\{\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}\right\}\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}+2(I_1-I_2)
\end{aligned}$$

よって　$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{\sqrt{3}}{8}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

(3) $t=x+\sqrt{x^2+1}\cdots$① より

$$\frac{dt}{dx}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{t}{\sqrt{x^2+1}}\quad\cdots②$$

したがって　$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{dt}{t}$$

よって　$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C$$
$$=\boldsymbol{\log(x+\sqrt{x^2+1})+C}\quad(C\text{ は積分定数})$$

(4) ① より　$y = \log t$　ゆえに　$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}$

上式および ② により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{x^2+1}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

(5) 求める極限値は

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\\ &= \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= \Big[\ \log(x+\sqrt{x^2+1})\ \Big]_0^1 = \boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

■

7 (1) 直線 OP の方程式は　$2x - ty = 0$　$\cdots$①

直線 MN は $\mathrm{P}(t,\ 2)$ を極とする C の極線であるから

$$tx + 2y = 1 \quad \cdots ②$$

Q は，①，② の交点であるから

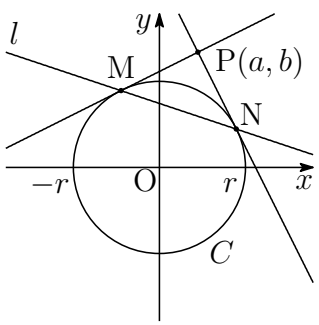
$$x = \frac{t}{t^2+4},\quad y = \frac{2}{t^2+4}\quad \text{よって}\quad \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{t}{t^2+4}},\ \boldsymbol{\frac{2}{t^2+4}}\right)$$

円 C : $x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線

$$x_1x + y_1y = r^2,\quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2,\quad ax_2 + by_2 = r^2$$



上の 2 式から直線 $l : ax + by = r^2$ は 2 点 M，N を通る．

このとき，l を P を極とする C の極線という．

(2) (1) の結果から $t=2\tan\theta$ $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと

$$x=\frac{t}{t^2+4}=\frac{2\tan\theta}{(2\tan\theta)^2+4}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\sin 2\theta$$
$$y=\frac{2}{t^2+4}=\frac{2}{(2\tan\theta)^2+4}=\frac{1}{2}\cos^2\theta=\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{4}$$

よって，求める点 Q の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16},\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)}$$

■

8 (1) $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$ とおき，(A)，(B) の常用対数をとると

$$10<ax+by<11,\quad 9<bx+ay<10$$

したがって　$0<ax+by-10<1,\quad 0<bx+ay-9<1$

ここで，$s=ax+by-10$，$t=bx+ay-9$ とおくと　$0<s<1$，$0<t<1$

上の 2 式から　$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10+s \\ 9+t \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}&=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10+s \\ 9+t \end{pmatrix}\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} 10a-9b+sa-tb \\ 9a-10b-sb+ta \end{pmatrix}\quad\cdots(*)\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} 10a-9b \\ 9a-10b \end{pmatrix}+\frac{s}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}+\frac{t}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

また

$$\vec{\alpha}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} 10a-9b \\ 9a-10b \end{pmatrix},\ \vec{u}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix},\ \vec{v}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

とおくと　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{\alpha}+s\vec{u}+t\vec{v}\qquad(|\vec{u}|=|\vec{v}|,\ 0<s<1,\ 0<t<1)$

4 点を $\mathrm{A}(\vec{\alpha})$，$\mathrm{B}(\vec{\alpha}+\vec{u})$，$\mathrm{C}(\vec{\alpha}+\vec{u}+\vec{v})$，$\mathrm{D}(\vec{\alpha}+\vec{v})$ とすると，表す領域は，**ひし形 ABCD の内部 (境界を含まない).**

(2) $(*)$ から

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{(10a-9b+sa-tb)+(9a-10b-sb+ta)}{a^2-b^2} \\ &= \frac{(a-b)(19+s+t)}{a^2-b^2} = \frac{19+s+t}{a+b} \\ y-x &= \frac{(9a-10b-sb+ta)-(10a-9b+sa-tb)}{a^2-b^2} \\ &= \frac{(a+b)(-1-s+t)}{a^2-b^2} = \frac{1+s-t}{b-a} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{19}{\log_{10} 6} < x+y < \dfrac{21}{\log_{10} 6},\ 0 < y-x < \dfrac{2}{\log_{10} \frac{3}{2}}}$

(3)
$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781,$$
$$\log_{10} \tfrac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{19}{\log_{10} 6} &= \frac{19}{0.7781} = 24.4\cdots, \\ \frac{21}{\log_{10} 6} &= \frac{21}{0.7781} = 26.9\cdots, \\ \frac{2}{\log_{10} \frac{3}{2}} &= \frac{2}{0.1761} = 11.3\cdots \end{aligned}$$

(2) の結果から

$$24.4\cdots < x+y < 26.9\cdots, \quad 0 < y-x < 11.3\cdots$$

整数 x，y について，$y-x$ が最大となるとき，上の第 2 式から　$y-x=11$

$x+y=(y-x)+2x$ より，$x+y$ と $y-x$ の偶奇が一致するので　$x+y=25$

よって　$\boldsymbol{x=7,\ y=18}$ ■