平成 23 年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成 23 年 2 月 25 日

- 教育・薬学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=1-x^2$ とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ は $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{3}{2}$ の範囲で動くものとする．原点と点 P の 2 点を通る直線を l，点 P における $y=f(x)$ の接線を m とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 2 直線 l と m の方程式を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ において，y 軸と曲線 $y=f(x)$ および直線 l で囲まれた図形の面積を $S_1(a)$ とし，y 軸と曲線 $y=f(x)$ および直線 m で囲まれた図形の面積を $S_2(a)$ とする．$S_1(a)$ と $S_2(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $S_1(a)=2S_2(a)$ を満たす a の値を求めよ．

(4) $S_1(a)-S_2(a)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 3 辺の長さが $\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=5$ である直角三角形 ABC と，その内側にあって 2 辺 AB および AC に接する円 O を考える．この円の半径を r とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB との交点を H とする．また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクトルを，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{u}$ $(t>0)$ とする．次の問いに答えよ．

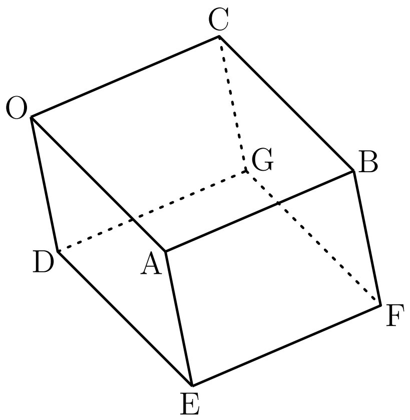
(1) 直線 AO と辺 BC との交点を M とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いて表せ．

(2) ベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ の内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HO}}$ を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ および t を用いて表せ．また，円 O の半径 r を t で表せ．

(3) 円 O が辺 BC にも接するとき，その中心を I とする．すなわち，I は三角形 ABC の内心である．そのときの t の値と，内接円 I の半径を求めよ．

(4) 円 O と内接円 I が共有点をもたないような t の範囲を求めよ．

3 右図の平行六面体 OABC-DEFG を考える．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおき，次の問いに答えよ．



(1) 三角形 ACD と線分 OF との交点を H とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

を満たす実数 r，s，t を求めよ．また，H が三角形 ACD の重心であることを示せ．

(2) H は三角形 ODB の重心でもあることを示せ．

(3) さらに $\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$，$\angle\mathrm{AOD}=\angle\mathrm{COD}$ ならば，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であることを示せ．

4 次の問いに答えよ．

(1) 関係式

$$a_1=1,\quad na_{n+1}-(n+1)a_n=1\quad(n=1,2,\cdots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい．$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおいて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，a_n を求めよ．

(2) $x\neq 1$ のとき，等比数列の和の公式

$$\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}$$

の両辺を x で微分せよ．その結果を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kx^k$ を求めよ．

(3) $p\neq 1$ のとき，関係式

$$c_1=0,\quad \frac{pc_{n+1}}{n}-\frac{c_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

によって定義される数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) θ が $\tan\theta=\dfrac{1}{5}$ および $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ を満たすとき，$\tan 2\theta$ と $\tan 4\theta$ の値を求めよ．また，$4\theta=\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ とおくとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ を，ある関数 $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における定積分を用いて表し，この極限値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において次の不等式を解け．

$$\sin x+\cos 2x\geqq 0$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=-\cos 2x$ および直線 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ が囲む図形の面積 S を求めよ．

(3) 上の図形の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 円 $C_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$ と放物線 $C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ について，次の問いに答えよ．

(1) C_1 と座標軸との共有点，および C_2 と座標軸との共有点の座標を求めよ．

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3\leqq 0 \\ y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1 \end{cases}$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする．D の面積 S を求めよ．

(3) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 曲線 $y = \log x$ の接線は常にこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ．以下，k は自然数とする．

(1) 点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y = \log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする．また，$k \geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする．四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ．

(2) 次の 2 つの値の大小を比較せよ．

(ア) $\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx$　(ただし，$k \geqq 2$)

(イ) $\dfrac{\log k + \log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \log x\,dx$　(ただし，$k \geqq 1$)

(3) $a_n = \log(n!) - \dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x < a_n < \int_{1}^{n} \log x\,dx$$

(4) 2 以上の自然数 n について

$$\begin{cases} U_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\log n - n + \dfrac{3}{2}\left(1-\log\dfrac{3}{2}\right) \\ V_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\log n - n + 1 \end{cases}$$

とおくとき，次の不等式を示せ．

$$U_n < \log(n!) < V_n$$

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 点 O$(0,\ 0)$，P$(a,\ 1-a^2)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{1-a^2}{a}$

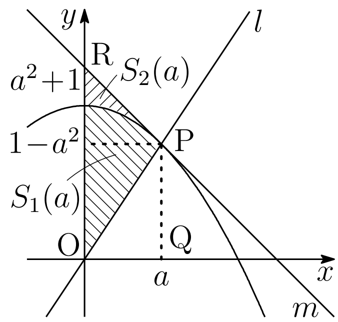
よって，直線 l の方程式は $\boldsymbol{y=\dfrac{1-a^2}{a}x}$

$f(x)=1-x^2$ より，$f'(x)=-2x$ であるから $f'(a)=-2a$

よって，直線 m は点 $(a,\ 1-a^2)$ を通り，傾き $-2a$ の直線であるから

$$y-(1-a^2)=-2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2ax+a^2+1}$$

(2) 右の図から



$$\begin{aligned} S_1(a) &= \int_0^a (1-x^2)dx - \triangle\text{OPQ} \\ &= \left[\, x-\frac{x^3}{3}\,\right]_0^a - \frac{1}{2}a\cdot(1-a^2) \\ &= a-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a} \end{aligned}$$

また $S_2(a)=\triangle\text{OPR}-S_1(a)=\dfrac{1}{2}a(a^2+1)-\left(\dfrac{1}{6}a^3+\dfrac{1}{2}a\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}a^3}$

(3) (2) の結果を $S_1(a)=2S_2(a)$ に代入すると

$$\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a=2\times\frac{1}{3}a^3 \quad \text{整理すると} \quad a(a+1)(a-1)=0$$

これを $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ に注意して解くと $\boldsymbol{a=1}$

(4) $g(a)=S_1(a)-S_2(a)$ とおくと

$$g(a)=\left(\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a\right)-\frac{1}{3}a^3=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a$$

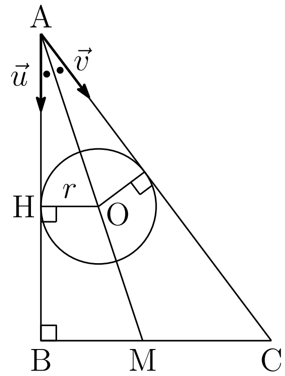
ゆえに $g'(a)=-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(a+1)(a-1)$

したがって，$g(a)$ の増減表は次のようになる．

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	$\frac{11}{48}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{9}{48}$

よって $\boldsymbol{a=1}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\dfrac{9}{48}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) AM は∠A の二等分線であるから



$$\mathrm{BM}:\mathrm{MC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=4:5$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=5\vec{v}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{5\cdot4\vec{u}+4\cdot5\vec{v}}{9}=\boldsymbol{\frac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})}$$

(2) $\cos A=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{4}{5}$ であるから　$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos A=1\cdot1\cdot\dfrac{4}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

△AHO ∽ △ABM であるから

$$\mathrm{AO}:\mathrm{AM}=\mathrm{AH}:\mathrm{AB}=t:4$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{t}{4}\cdot\dfrac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})=\boldsymbol{\dfrac{5t}{9}(\vec{u}+\vec{v})}$

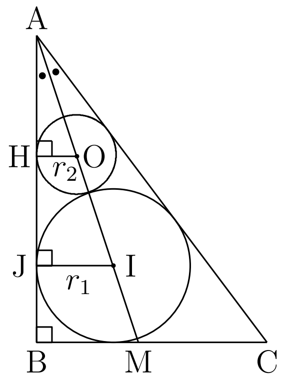
$$\overrightarrow{\mathrm{HO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{5t}{9}(\vec{u}+\vec{v})-t\vec{u}=\boldsymbol{\frac{t}{9}(-4\vec{u}+5\vec{v})}$$

また，$\mathrm{BM}=\dfrac{4}{9}\mathrm{BC}=\dfrac{4}{9}\times3=\dfrac{4}{3}$ であるから

$\mathrm{AH}:\mathrm{HO}=\mathrm{AB}:\mathrm{BM}=4:\dfrac{4}{3}$　ゆえに　$t:r=3:1$　よって　$\boldsymbol{r=\dfrac{t}{3}}$

(3) 内接円 I の半径を r_1 とし，I から AB に垂線 IJ を引くと　$\mathrm{JB}=r_1$

△AJI ∽ △AHO であるから，(2) の結果から



$\mathrm{AJ}:\mathrm{JI}=3:1$　ゆえに　$t=\mathrm{AJ}=3r_1$

$\mathrm{AJ}+\mathrm{JB}=\mathrm{AB}=4$ であるから

$3r_1+r_1=4$　よって　$r_1=\mathbf{1}$, $t=\mathbf{3}$

(4) $\mathrm{AI}=\sqrt{\mathrm{AJ}^2+\mathrm{JI}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

右の図のように，円 O と内接円 I が外接するとき，O の半径を r_2 とすると　$\mathrm{AO}=\sqrt{10}\,r_2$

$\mathrm{OI}=r_2+1$ であるから，$\mathrm{AO}+\mathrm{OI}=\mathrm{AI}$ より

$$\sqrt{10}\,r_2+(r_2+1)=\sqrt{10}\quad\text{ゆえに}\quad r_2=\frac{11-2\sqrt{10}}{9}$$

このとき，$0<r<r_2$ であるから，$0<t<3r_2$ より　$\boldsymbol{0<t<\dfrac{11-2\sqrt{10}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = r\overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \vec{a} = r(\vec{c} - \vec{a}) + s(\vec{d} - \vec{a})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1 - r - s)\vec{a} + r\vec{c} + s\vec{d} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t(\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}) = t\vec{a} + t\vec{c} + t\vec{d} \quad \cdots ②$

①，② より　$1 - r - s = t,\ \ r = t,\ \ s = t$　ゆえに　$\boldsymbol{r = s = t = \dfrac{1}{3}}$

このとき　　$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}$

ここで，2 点 C，D の中点を M とすると，上式より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

よって，H は △ACD の中線 AM を 2 : 1 に内分する点，すなわち △ACD の重心である．

(2) (1) の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$

ここで，2 点 D，B の中点を N とすると，上式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

よって，H は △ODB の中線 ON を 2 : 1 に内分する点，すなわち △ODB の重心である．

(3) OA = OC より　　$|\vec{a}| = |\vec{c}| \quad \cdots ③$

$\angle\mathrm{AOD} = \angle\mathrm{COD} = \theta$ とおくと

$$\vec{a}\cdot\vec{d} = |\vec{a}||\vec{d}|\cos\theta, \quad \vec{c}\cdot\vec{d} = |\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta$$

上式および ③ から　　$\vec{a}\cdot\vec{d} = \vec{c}\cdot\vec{d} \quad \cdots ④$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (\vec{a} + \vec{c} + \vec{d})(\vec{c} - \vec{a})$$
$$= |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 + \vec{c}\cdot\vec{d} - \vec{a}\cdot\vec{d}$$

③，④ より　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ より $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

ゆえに $$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$b_{n+1}+\frac{1}{n+1}=b_n+\frac{1}{n}$$

$b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$ であるから $b_n+\dfrac{1}{n}=b_1+\dfrac{1}{1}=2$

したがって $\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n}=2$ よって $\boldsymbol{a_n=2n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k=1+\sum_{k=1}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}$ の両辺を微分すると

$$\sum_{k=1}^{n-1}kx^{k-1}=\frac{nx^{n-1}(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$$

両辺に x をかけて $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n-1}kx^k=\frac{(n-1)x^{n+1}-nx^n+x}{(x-1)^2}}$

(3) $\dfrac{pc_{n+1}}{n}-\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ の両辺に $n(n+1)p^n$ を掛けると

$$p^{n+1}(n+1)c_{n+1}-p^nnc_n=np^n$$

$n\geqq 2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{p^{k+1}(k+1)c_{k+1}-p^kkc_k\}=\sum_{k=1}^{n-1}kp^k$

$c_1=0$ および (2) の結果を上式に適用すると $(p\neq 1)$

$$p^nnc_n=\frac{(n-1)p^{n+1}-np^n+p}{(p-1)^2}$$

上式は，$n=1$ のときも成立する．

よって，$p\neq 0$ のとき $\boldsymbol{c_n=\dfrac{(n-1)p^n-np^{n-1}+1}{(p-1)^2p^{n-1}n}}$

$p=0$ のとき，漸化式より，$c_n=-1$ となり，$c_1=0$ に反するので，このとき，$\{c_n\}$ は存在しない．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 楕円 $\dfrac{1}{3}x^2+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{1}{3}\cdot 1x+\frac{\sqrt{6}}{3}y=1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+\sqrt{6}y=3}$$

(2)
$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\dfrac{1}{5}}{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$$

$$\tan 4\theta=\frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}=\frac{2\cdot\dfrac{5}{12}}{1-\left(\dfrac{5}{12}\right)^2}=\frac{\mathbf{120}}{\mathbf{119}}$$

$4\theta=\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ より，$\alpha=4\theta-\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\tan\alpha=\tan\left(4\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 4\theta-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan 4\theta\tan\dfrac{\pi}{4}}=\frac{\dfrac{120}{119}-1}{1+\dfrac{120}{119}\cdot 1}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{239}}$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\boldsymbol{\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx}$$

$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって　　$(\text{与式})=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

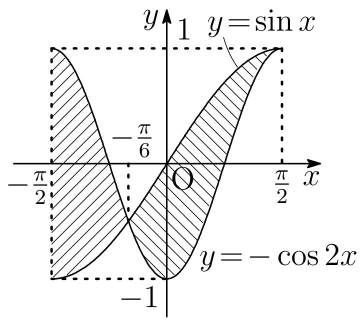
$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\sin x+\cos 2x \geqq 0$ より $\quad \sin x+(1-2\sin^2 x) \geqq 0$

$$(\sin x-1)(2\sin x+1) \leqq 0$$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ に注意して $\quad -\dfrac{1}{2} \leqq \sin x \leqq 1$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\qquad \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}}$

(2) 求める面積 S は右の図の斜線部分であるから



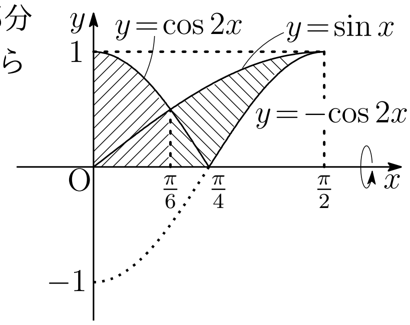
$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-(-\cos 2x)|\,dx \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} (\sin x+\cos 2x)\,dx \\ &\qquad +\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos 2x)\,dx \end{aligned}$$

関数 $\sin x+\cos 2x$ の原始関数の 1 つを $F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ とおくと

$$F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4},\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

よって $\qquad S=F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-2F\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(3) 求める回転体の体積 V は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させたものであるから



$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \\ &\qquad -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x)^2\,dx \end{aligned}$$

このとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x)^2\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$$

よって $\qquad \boldsymbol{V=\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\right)\pi}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $C_1 : x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$ と x 軸との共有点は，$y=0$ を代入して

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0 \quad これを解いて \quad x=\sqrt{3}$$

C_1 と y 軸との共有点は，$x=0$ を代入して

$$y^2-4y+3=0 \quad これを解いて \quad y=1,\ 3$$

よって，C_1 と座標軸との共有点の座標は　$\mathbf{(\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 3)}$

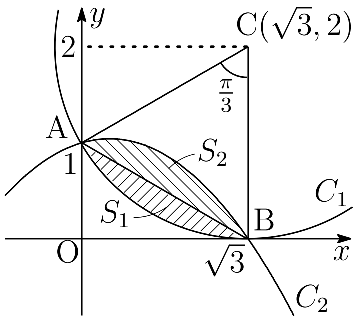
$C_2 : y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ と x 軸との共有点は，$y=0$ を代入して

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1=0 \quad これを解いて \quad x=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}$$

C_2 と y 軸との共有点は，$x=0$ を代入して　$y=1$

よって，C_2 と座標軸との共有点の座標は　$\mathbf{\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right),\ (\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1)}$

(2) (1) の結果から，C_1，C_2 の共有点を $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 0)$ とおき，C_1 の中心を $\mathrm{C}(\sqrt{3},\ 2)$ とおく．C_1 と直線 AB で囲まれた部分の面積を S_1，C_2 と直線 AB で囲まれた部分の面積を S_2 とする．



$$S_1 = 扇形\mathrm{ACB}-\triangle\mathrm{ACB}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot2^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$$

$$S_2=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1\right)dx-\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4\sqrt{3}}+x\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

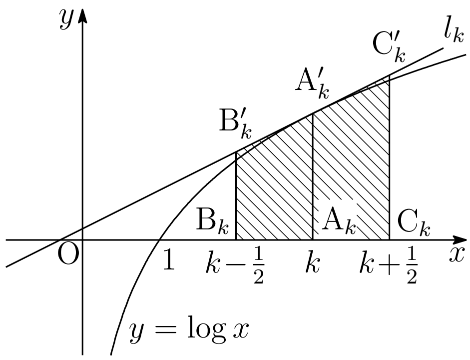
よって，D の面積 S は　　$S=S_1+S_2=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{3}{4}\sqrt{3}}$

(3) D における $x+y$ の最大値は，曲線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1\ (0\leqq x\leqq\sqrt{3})$ 上でとるから

$$x+y=x+\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{x-\left(1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right\}^2+\frac{37+4\sqrt{3}}{24}$$

$0\leqq1+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\leqq\sqrt{3}$ であるから，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{37+4\sqrt{3}}{24}}$

$\boxed{8}$ (1) $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$



$\mathrm{A}'_k(k,\ \log k)$ における接線 l は

$$y=\frac{1}{k}(x-k)+\log k$$

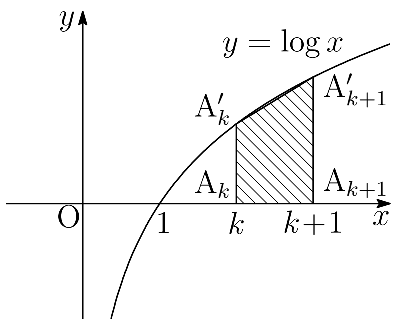
l_k 上の 2 点 B'_k，C'_k における y 座標は，それぞれ $\log k-\dfrac{1}{2k}$，$\log k+\dfrac{1}{2k}$ であるから，四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}'_k\mathrm{B}'_k$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\left\{\left(\log k-\frac{1}{2k}\right)+\left(\log k+\frac{1}{2k}\right)\right\}=\boldsymbol{\log k}$$

(2)(ア) $k\geqq 2$ のとき，x 軸と 2 直線 $x=k-\dfrac{1}{2}$，$x=k+\dfrac{1}{2}$ および曲線 $y=\log x$ で囲まれた部分の面積は，(1) で求めた四角形の面積より小さいから

$$\boldsymbol{\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx<\log k}$$

(イ) $k\geqq 1$ のとき，右の図の 4 点 A_k，A_{k+1}，A'_{k+1}，A'_k を頂点とする台形の面積



$$\frac{\log k+\log(k+1)}{2}$$

は，x 軸と 2 直線 $x=k$，$x=k+1$ および曲線 $y=\log x$ で囲まれた部分の面積より小さいから

$$\boldsymbol{\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\int_{k}^{k+1}\log x\,dx}$$

(3) (2)(ア) から，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx < \sum_{k=2}^{n}\log k$ であるから

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx < \log(n!)$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx + \int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx < \log(n!)$$

$\displaystyle\int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\log n\,dx < \int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ であるから，$\displaystyle\frac{1}{2}\log n < \int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ より

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx + \frac{1}{2}\log n < \log(n!)$$

したがって　$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx < \log(n!) - \frac{1}{2}\log n \quad \cdots ①$

(2)(イ) から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\log k + \log(k+1)}{2} < \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\log x\,dx$ であるから

$$\log(n!) - \frac{1}{2}\log n < \int_{1}^{n}\log x\,dx \quad \cdots ②$$

①，② より　$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx < \log(n!) - \frac{1}{2}\log n < \int_{1}^{n}\log x\,dx$

(4)
$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx = \Big[\,x\log x - x\,\Big]_{\frac{3}{2}}^{n} = n\log n - n + \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right)$$
$$\int_{1}^{n}\log x\,dx = \Big[\,x\log x - x\,\Big]_{1}^{n} = n\log n - n + 1$$

上の 2 式を (3) の結果に代入すると

$$n\log n - n + \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right) < \log(n!) - \frac{1}{2}\log n < n\log n - n + 1$$
$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right) < \log(n!) < \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1$$

よって　$U_n < \log(n!) < V_n$