平成22年度　長崎大学2次試験前期日程(数学問題)
平成22年2月25日

- 教育・薬・工・歯学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数I・II・A・B (80分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)

1 a，b は実数で，$a>1$ とする．t の関数

$$f(t)=2t^3-3(a+1)t^2+6at+b$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t)$ の極値を，a，b を用いて表せ．

(2) a の値を x 座標，b の値を y 座標とする xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．このとき，3次方程式 $f(t)=0$ が相異なる3つの実数解をもつような点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在する領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(3) D および D の境界からなる領域を E とする．領域 E のうち，

$$y \leqq -x^2+4x-11$$

を満たす部分の面積を求めよ．

2 正三角形ABCにおいて，線分ABを $2:1$ に内分する点をD，線分BCの中点をE，点Eから直線ABに引いた垂線とABの交点をHとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{HE}}=\vec{b}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 線分HE上の点Fが $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を満たすとき，Fは線分EHを $2:1$ に内分することを示せ．

3 $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{B}=\alpha$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える．$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を R とする．この外接円上の点Pが，点Aを含まない弧BC上を動くものとする．$\angle\mathrm{BAP}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値を R，α を用いて表せ．

(2) $\triangle\mathrm{BPC}$ の面積を R，θ を用いて表せ．

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ とする．$\triangle\mathrm{ABP}$ と $\triangle\mathrm{BPC}$ の面積の和 S の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を $a>1$ を満たす定数とする．原点 O と点 P$(1,\ 0)$ を線分で結び，点 P と点 Q$(a,\ \log a)$ を曲線 $y=\log x$ で結ぶ．このようにして得られる曲線 OPQ を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の容器を考える．ただし，OP を含む部分を底面として，水平に置くものとする．次の問いに答えよ．

(1) この容器の容積 V を a を用いて表せ．

(2) m を正の定数とする．この容器に，単位時間あたり m の水を一定の割合で注ぎ入れる．ただし，最初は水が全く入っていない状態とする．注ぎ始めてから時間 t $\left(0<t<\dfrac{V}{m}\right)$ が経過したとき，底面から水面までの高さを h，水面の上昇する速度を v とする．h および v を m，t を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ a，b を $a>b>0$ を満たす定数とし，

$$\begin{cases} a_1=a, \quad a_{n+1}={a_n}^2+{b_n}^2 & (n=1,2,3,\cdots) \\ b_1=b, \quad b_{n+1}=2a_nb_n & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_n+b_n$ $(n=1,2,3\cdots)$ により定義するとき，その一般項 c_n を a，b を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項 a_n，b_n を a，b を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ が存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき，$a+b<1$ が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ xyz 空間において，底面の半径が 2，高さが 4 である直円柱

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq z \leqq 4 \end{cases}$$

を考える．この円柱内で，さらに

$$\begin{cases} z \leqq (x-2)^2 \\ z \leqq y^2 \end{cases}$$

を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ からなる立体を V とする．次の問いに答えよ．

(1) 立体 V を平面 $x=t$ $(-2 \leqq t \leqq 2)$ で切った切り口の面積を $A(t)$ とする．$A(t)$ を t を用いて表せ．

(2) 立体 V の体積を求めよ．

$\boxed{\textbf{7}}$ 4次方程式の解について，次の問いに答えよ．ただし，右のことは既知としてよい．

自然数 k，l，m が次の条件 (イ) k と l は1以外の約数をもたない (ロ) k は lm の約数である． を満たすならば，k は m の約数である．

(1) a，b，c，d は整数で，$d \neq 0$ とする．次の方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

が有理数の解 r をもつとき，$|\,r\,|$ は自然数であり，かつ $|\,d\,|$ の約数に限ることを証明せよ．

(2) 次の方程式

$$2x^4 - 2x - 1 = 0$$

の実数解はすべて無理数であることを証明せよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(t)=2t^3-3(a+1)t^2+6at+b$ より

$$f'(t)=6t^2-6(a+1)t+6a=6(t-1)(t-a)$$

$a>1$ より，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$3a+b-1$	$\searrow$	$-a^3+3a^2+b$	$\searrow$

よって　$t=1$ のとき極大値 $\boldsymbol{3a+b-1}$,
　　　　$t=a$ のとき極小値 $\boldsymbol{-a^3+3a^2+b}$

(2) 方程式 $f(t)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつのは，(1) の結果から

$$-a^3+3a^2+b<0<3a+b-1 \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} b>-3a+1 \\ b<a^3-3a^2 \end{cases}$$

である $(a>1)$．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在する領域 D を表す不等式は

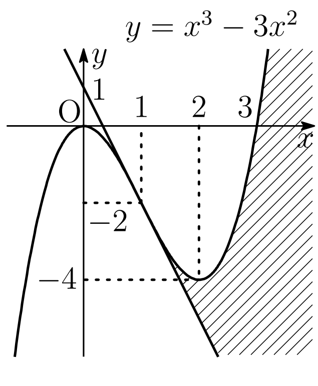
$$x>1,\quad y>-3x+1,\quad y<x^3-3x^2$$

ここで，$y=-3x+1\cdots$①，$y=x^3-3x^2\cdots$② とおくと，② から

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$$

これから，② の増減表，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$



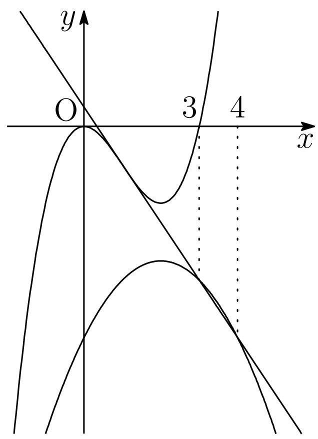
①，② から y を消去すると

$$x^3-3x^2=-3x+1$$
$$(x-1)^3=0$$
$$x=1\ (3\text{ 重解})$$

ゆえに ①，② の共有点は　$(1,-2)$
よって，D の表す領域は右の図の斜線部分で，
境界線を含まない．

(3) $y=-x^2+4x-11 \quad \cdots ③$
$\quad = -(x-2)^2-7$

ゆえに，$x>1$ において，② と ③ の共有点はない．① と ③ の共有点の x 座標は



$$-3x+1=-x^2+4x-11$$
$$(x-3)(x-4)=0$$
$$x=3,\ 4$$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_3^4 \{(-x^2+4x-11)-(-3x+1)\}dx \\ &= -\int_3^4 (x-3)(x-4)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(4-3)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

解説 関数 $g(t)=t^3+pt+q$ を微分すると　$g'(t)=3t^2+p$

i) $p \geqq 0$ のとき，$g(t)$ は単調増加である．
このとき，3 次方程式 $g(t)=0$ の実数解の個数は 1 個．

ii) $p<0$ のとき，$p=-3k^2$ とおくと $(k>0)$

$$g'(t)=3t^2-3k^2=3(t+k)(t-k)$$

$g(t)$ は，極大値 $g(-k)=2k^3+q$，極小値 $g(k)=-2k^3+q$ をとるから，3 次方程式 $g(t)=0$ の実数解の個数は

$-2k^3+q<0<2k^3+q$	すなわち	$\lvert q\rvert<2k^3$のとき	3 個
$-2k^3+q=0,\ 2k^3+q=0$	すなわち	$\lvert q\rvert=2k^3$のとき	2 個
$2k^3+q<0,\ -2k^3+q>0$	すなわち	$\lvert q\rvert>2k^3$のとき	1 個

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\cdots(*)$ は，$x=t-\dfrac{b}{3a}$ とおくと

$$t^3-\frac{b^2-3ac}{3a^2}t+\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}=0$$

となる．したがって，3 次方程式 $(*)$ の実数解の個数は

i) $b^2-3ac \leqq 0$ のとき　1 個

ii) $b^2-3ac>0$ のとき

$$k=\frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3|a|},\quad q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$$

であるから

$$\left|\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}\right|<2\left(\frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3|a|}\right)^3$$

すなわち　$|\,2b^3-9abc+27a^2d\,|<2(b^2-3ac)^{\frac{3}{2}}$　のとき　3 個

同様に　$|\,2b^3-9abc+27a^2d\,|=2(b^2-3ac)^{\frac{3}{2}}$　のとき　2 個

$|\,2b^3-9abc+27a^2d\,|>2(b^2-3ac)^{\frac{3}{2}}$　のとき　1 個

3 次方程式 $(*)$ について

$$D_1=b^2-3ac,\quad D_2=2b^3-9abc+27a^2d$$

とおくと，3 次方程式 $(*)$ の実数解の個数は

$D_1 \leqq 0$ のとき	1 個
$D_1>0$，$\lvert D_2\rvert<2{D_1}^{\frac{3}{2}}$ のとき	3 個
$D_1>0$，$\lvert D_2\rvert=2{D_1}^{\frac{3}{2}}$ のとき	2 個
$D_1>0$，$\lvert D_2\rvert>2{D_1}^{\frac{3}{2}}$ のとき	1 個

3 次方程式 $2t^3-3(a+1)t^2+6at+b=0$ について $(a>1)$

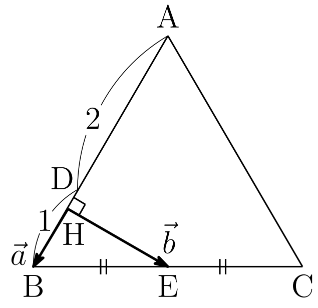
$$D_1=9(a-1)^2>0,\quad D_2=54(-a^3+3a^2+3a-1+2b)$$

よって，この 3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもつとき，$|D_2|<2{D_1}^{\frac{3}{2}}$ より

$$\begin{aligned}
|54(-a^3+3a^2+3a-1+2b)|&<2\{9(a-1)^2\}^{\frac{3}{2}}\\
|-a^3+3a^2+3a-1+2b|&<(a-1)^3\\
-(a-1)^3<-a^3+3a^2+3a-1+2b&<(a-1)^3\\
-3a+1<b&<a^3-3a^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) BE $=$ 2HB，AB $=$ BC $=$ 2BE であるから

AB $=$ 4HB，AH $=$ 3HB，DB $= \dfrac{1}{3}$AB より



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \boldsymbol{4\vec{a}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = 3\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \boldsymbol{3\vec{a}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{3}\cdot 4\vec{a} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\vec{a}}$$

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{EB}} - \overrightarrow{\mathrm{DB}}\\ &= 2(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{4}{3}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a} - 2\vec{b}}\end{aligned}$$

(3) F は線分 HE 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{HF}} = t\vec{b}$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HF}} = 3\vec{a} + t\vec{b}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$ であるから

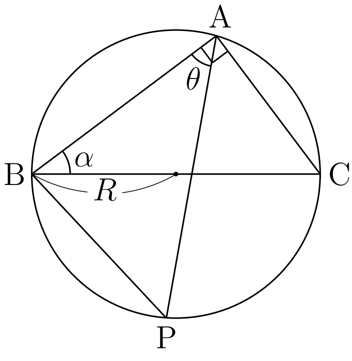
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= (3\vec{a} + t\vec{b})\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a} - 2\vec{b}\right)\\ &= 2|\vec{a}|^2 + \left(\frac{2}{3}t - 6\right)\vec{a}\cdot\vec{b} - 2t|\vec{b}|^2\\ &= 2|\vec{a}|^2 - 6t|\vec{a}|^2 = 2(1-3t)|\vec{a}|^2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ であるから　　$t = \dfrac{1}{3}$

ゆえに　HF : FE $= \dfrac{1}{3} : \dfrac{2}{3} = 1 : 2$

よって，F は線分 EH を 2 : 1 に内分する．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 右の図から



$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC}\cos\alpha = 2R\cos\alpha$$

正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BP}}{\sin\theta} = 2R \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{BP} = 2R\sin\theta$$

$\angle\mathrm{CBP} = \angle\mathrm{CAP} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ より

$$\angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{CBP} = \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

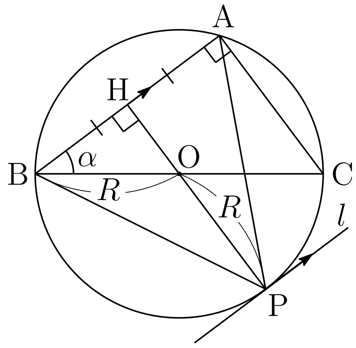
したがって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABP} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BP}\sin\angle\mathrm{ABP} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right) \\ &= 2R^2\cos\alpha\sin\theta\cos(\theta - \alpha) \\ &= R^2\cos\alpha\{\sin(2\theta - \alpha) + \sin\alpha\} \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より　$-\dfrac{\pi}{2} < 2\theta - \alpha < \pi$ であるから

よって　$2\theta - \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$(*)$ は，最大値 $\boldsymbol{R^2\cos\alpha(1 + \sin\alpha)}$ をとる．

別解 右の図のように，線分 AB に平行な直線 l と円との接点を P とするとき，$\triangle$ABP の面積は最大となる．このとき，P から線分 AB に垂線 PH を引くと，円の中心 O は線分 PH 上にあり，H は線分 AB の中点である．したがって

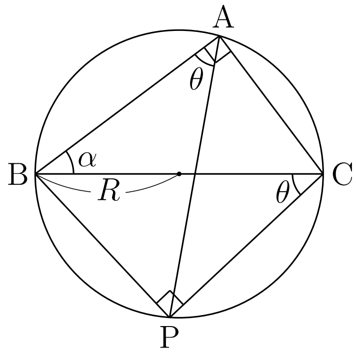


$$\mathrm{BH} = R\cos\alpha, \quad \mathrm{OH} = R\sin\alpha,$$
$$\mathrm{AB} = 2\mathrm{BH} = 2R\cos\alpha,$$
$$\mathrm{PH} = \mathrm{PO} + \mathrm{OH} = R(1 + \sin\alpha)$$

よって，求める $\triangle$ABP の最大値は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABP} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PH} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot R(1 + \sin\alpha) = R^2\cos\alpha(1 + \sin\alpha)\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BCP} = \angle\mathrm{BAP} = \theta$，$\angle\mathrm{BPC} = \dfrac{\pi}{2}$ より



$$\begin{aligned}\mathrm{BP} &= \mathrm{BC}\sin\theta = 2R\sin\theta \\ \mathrm{CP} &= \mathrm{BC}\cos\theta = 2R\cos\theta\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BPC} &= \frac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta \\ &= 2R^2\sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{R^2\sin 2\theta}\end{aligned}$$

(3) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABP} &= R^2\cos\frac{\pi}{3}\left\{\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\right\} \\ &= \frac{1}{2}R^2\left(\sin 2\theta\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\theta\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= R^2\left(\frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\end{aligned}$$

上式および (2) の結果から

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{ABP} + \triangle\mathrm{BPC} \\ &= R^2\left(\frac{5}{4}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{4}R^2\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cos 2\theta\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\end{aligned}$$

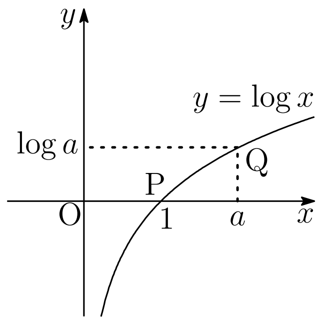
ここで，$\cos\beta = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，$\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ とおくと $\left(0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$S = \frac{2\sqrt{7}}{4}R^2\sin(2\theta - \beta) + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$

$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より　$-\dfrac{\pi}{2} < 2\theta - \beta < \pi$ であるから

よって　$2\theta - \beta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，S は，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(2\sqrt{7} + \sqrt{3})R^2}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y=\log x$ より $x=e^y$ であるから



$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\log a} x^2 dy \\ &= \pi\int_0^{\log a} e^{2y} dy \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[\ e^{2y}\ \Big]_0^{\log a} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(a^2-1)} \end{aligned}$$

(2) 条件および (1) の結果から

$$mt=\frac{\pi}{2}(a^2-1) \quad \text{ゆえに} \quad a^2=\frac{2mt}{\pi}+1$$

また，$h=\log a$ であるから，上式から

$$h=\log a=\frac{1}{2}\log a^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left(\frac{2mt}{\pi}+1\right)}$$

これを t で微分すると

$$\begin{aligned} v=\frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\log\left(\frac{2mt}{\pi}+1\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\frac{2m}{\pi}}{\frac{2mt}{\pi}+1}=\boldsymbol{\frac{m}{2mt+\pi}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= {a_n}^2+{b_n}^2 \quad \cdots① \\ b_{n+1} &= 2a_nb_n \qquad\ \ \cdots② \end{aligned}$$

① と ② の辺々を加えると

$$a_{n+1}+b_{n+1}=({a_n}^2+{b_n}^2)+2a_nb_n=(a_n+b_n)^2$$

$c_n=a_n+b_n$ より $\quad c_{n+1}={c_n}^2$

よって $\quad c_n={c_1}^{2^{n-1}}=(a_1+b_1)^{2^{n-1}}=\boldsymbol{(a+b)^{2^{n-1}}}$

解説 $c_{n+1}={c_n}^2$ より $\quad \log c_{n+1}=2\log c_n$

したがって $\quad \log c_n=2^{n-1}\log c_1=\log {c_1}^{2^{n-1}}$

よって $\quad c_n={c_1}^{2^{n-1}}=(a+b)^{2^{n-1}}$

(2) (1) の結果から　　$a_n + b_n = (a+b)^{2^{n-1}}$　　$\cdots$ ③

①，② から

$$a_{n+1} - b_{n+1} = ({a_n}^2 + {b_n}^2) - 2a_nb_n = (a_n - b_n)^2$$

したがって　　$a_n - b_n = (a-b)^{2^{n-1}}$　　$\cdots$ ④

③，④ から　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}\{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}\}}$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}\}}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}}{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}} = \frac{1 - \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}{1 + \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}$$

$a > b > 0$ より　$0 < \dfrac{a-b}{a+b} < 1$　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}} = 0$　$\cdots$ ⑤

したがって，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ は存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}{1 + \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}} = \boldsymbol{1}$$

(4) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a+b)^{2^{n-1}}\left\{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}\right\}$$

⑤ に注意すると

$a + b > 1$ のとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$a + b = 1$ のとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

$a + b < 1$ のとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要条件であるから，

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$a + b < 1$ が成り立つ．

解説 一般に，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要条件である．

つまり，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散することがある．

例えば，$a_n = \dfrac{1}{n}$ を一般項とする数列 $\{a_n\}$ は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

であるが

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2^1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}^{2^{n-1}\text{個}}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty
\end{aligned}$$

したがって　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $x=t$ のとき，$x^2+y^2=4$ から

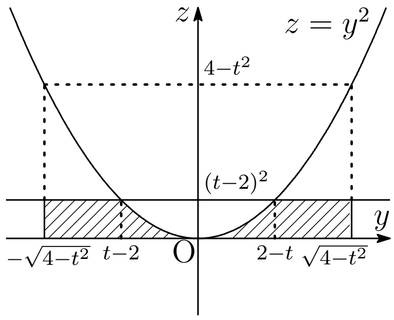
$$y^2=4-t^2 \quad \cdots ① \quad (-2 \leqq t \leqq 2)$$

$x=t$ のとき，$z \leqq (x-2)^2$，$z \leqq y^2$ は ① および z の範囲に注意して

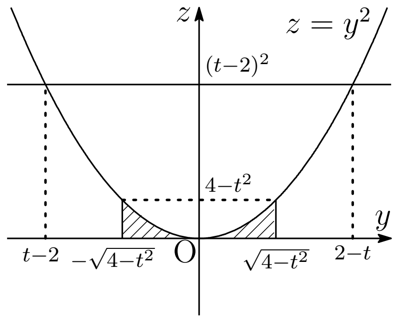
$$z \geqq 0, \quad z \leqq (t-2)^2, \quad z \leqq y^2 \leqq 4-t^2$$

したがって，平面 $x=t$ $(-2 \leqq t \leqq 2)$ で切った図形は次のようになる．

i) $0<t \leqq 2$ のとき



ii) $-2 \leqq t \leqq 0$ のとき



i) $4-t^2>(t-2)^2$ すなわち $0<t \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A(t)&=\int_0^{2-t} y^2\,dy+\{\sqrt{4-t^2}-(2-t)\}(t-2)^2\\&=\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2-t}+(t-2)^2\sqrt{4-t^2}+(t-2)^3\\&=(t-2)^2\sqrt{4-t^2}+\frac{2}{3}(t-2)^3\end{aligned}$$

ii) $4-t^2 \leqq (t-2)^2$ すなわち $-2 \leqq t \leqq 0$ のとき

$$\frac{1}{2}A(t)=\int_0^{\sqrt{4-t^2}} y^2\,dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{4-t^2}}=\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}$$

よって $$\boldsymbol{A(t)=\begin{cases}2(t-2)^2\sqrt{4-t^2}+\dfrac{4}{3}(t-2)^3 & (0<t \leqq 2)\\ \dfrac{2}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}} & (-2 \leqq t \leqq 0)\end{cases}}$$

(2) (1) の結果から

$$\int_0^2 A(t)\,dt = \int_0^2 \left\{2(t-2)^2\sqrt{4-t^2} + \frac{4}{3}(t-2)^3\right\} dt$$
$$= \int_0^2 \{-2(4-t^2) - 8t + 16\}\sqrt{4-t^2}\,dt + \frac{1}{3}\Big[\ (t-2)^4\ \Big]_0^2$$
$$= -2\int_0^2 (4-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt - 8\int_0^2 t\sqrt{4-t^2} + 16\int_0^2 \sqrt{4-t^2}dt - \frac{16}{3}$$
$$= -2\int_0^2 (4-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt + \frac{8}{3}\Big[\ (4-t^2)^{\frac{3}{2}}\ \Big]_0^2 + 16\times\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 - \frac{16}{3}$$
$$= -2\int_0^2 (4-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt + 16\pi - \frac{80}{3}$$
$$\int_{-2}^0 A(t)\,dt = \int_{-2}^0 \frac{2}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^2 (4-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt$$

したがって　$V = \displaystyle\int_{-2}^0 A(t)\,dt + \int_0^2 A(t)\,dt$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^2 (4-t^2)^{\frac{3}{2}} + 16\pi - \frac{80}{3}$$

ここで，$I = \displaystyle\int_0^2 (4-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt$ とおくと

$$I = \Big[\ t(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\ \Big]_0^2 - \int_0^2 t\cdot(-3t)(4-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= 0 - 3\int_0^2 \{(4-t^2) - 4\}(4-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= -3\int_0^2 (4-t^2)^{\frac{3}{2}} + 12\int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$$
$$= -3I + 12\times\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2$$

これを解いて　$I = 3\pi$

よって　$V = -\dfrac{4}{3}I + 16\pi - \dfrac{80}{3}$

$$= -\frac{4}{3}\cdot 3\pi + 16\pi - \frac{80}{3} = \boldsymbol{12\pi - \frac{80}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $a,\ b,\ c,\ d$ を整数 $(d \neq 0)$ とする 4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \cdots (*)$$

の有理数の解 r は 0 ではないので，整数 p，q を用いて $(p \neq 0)$

$$r = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素})$$

と表すことができる．これを $(*)$ に代入すると

$$\left(\frac{p}{q}\right)^4 + a\left(\frac{p}{q}\right)^3 + b\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c\left(\frac{p}{q}\right) + d = 0$$

したがって　$ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = -\dfrac{p^4}{q}$

上式から，$-\dfrac{p^4}{q}$ が整数である．p，q は互いに素であるから　$q = 1$

よって，解 r は整数であるから $(r \neq 0)$

$$r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r^3 + ar^2 + br + c = -\frac{d}{r}$$

上式から，$-\dfrac{d}{r}$ は整数であるから，r は d の約数である．

以上のことから，$|r|$ は整数であり，かつ $|d|$ の約数に限る．

(2) 方程式 $2x^4 - 2x - 1 = 0$ の解は 0 ではないので，有理数の解 α $(\alpha \neq 0)$ をもつと仮定すると

$$2\alpha^4 - 2\alpha - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - 2 = 0$$

上式より，方程式

$$t^4 + 2t^3 - 2 = 0 \quad \cdots (**)$$

が有理数の解 $\dfrac{1}{\alpha}$ をもつ．
このとき，(1) の結論から，その有理数の解は，$|-2|$ の約数になるが，
$t = \pm 1,\ \pm 2$ は $(**)$ の解ではないので，矛盾を生じる．
よって，方程式 $2x^4 - 2x - 1 = 0$ の実数解はすべて無理数である．