平成 21 年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成 21 年 2 月 25 日

- 教育・薬・工学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医・歯学部は，$\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ p を $p > 1$ を満たす定数とし，

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = p \\ a_{n+2} = pa_n + (1-p)a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4 を求め，$a_4 > a_2 > 1 > a_3$ が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n \geqq 1)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．また，b_n を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(3) 不等式

$$1 > a_{2m+1} > a_{2m+3} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(4) $p = \dfrac{3}{2}$ のとき，$0 > a_n$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を $a > 2$ を満たす定数とする．関数

$$f(x) = 2a^{3x} - 9a^{2x+1} + 12a^{x+2} \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $a^x = X$ とおいたときの $f(x)$ を $g(X)$ とするとき，$g(X)$ を求めよ．

(2) $g(X)$ の増減を調べよ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 11$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) $y = f(x)$ と異なる 2 点で接する直線の方程式を求めよ．

(3) $y = f(x)$ と (2) で求めた直線とで囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{2}\cos 2x$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = r\sin(2x + \alpha)\ (r > 0)$ と表すとき，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ．

(2) $f(x)$ が最大となるときと最小となるときの $\sin 2x$，$\cos 2x$ の値を求めよ．

(3) $f(x)$ が最大となるときと最小となるときの $\sin x$，$\cos x$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 楕円 $C_1 : 6x^2 + 4y^2 = 3$ と曲線 $C_2 : 8x - 8y^2 = 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交することを証明せよ．

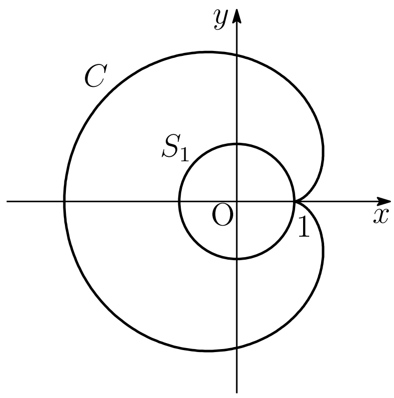
(2) $x > 0$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 四面体 OABC において，$\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \sqrt{3}$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{BOC} = \alpha\ (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ とする．辺 OC 上の点 P と辺 AB 上の点 R を，線分 PR の長さが最小になるような位置にとる．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\cos\alpha = x$ とし，線分 PR の長さを x の関数として表せ．

(2) 線分 OA の中点を M，線分 BC を $5 : 9$ に内分する点を N とする．線分 PR と線分 MN が交わるように x の値を定めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 S_1 と，点 A を中心とする半径 1 の円 S_2 がある．円 S_2 は円 S_1 に外接しながら，すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する．点 A の出発点は $(2,\ 0)$ であり，円 S_2 上の点で，このとき $(1,\ 0)$ に位置している点を P とする．点 A が $(2,\ 0)$ から出発し，$(2,\ 0)$ に戻ってくるとき，点 P の描く曲線を C とすると，図のようになる．また，動径 OA と x 軸の正の部分とのなす角が $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ であるときの点 P の座標を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とする．このとき，次の問いに答えよ．



(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ．

(3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ すべての正の実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の (a)，(b) を満たすものとする．

(a) すべての正の実数 x，y に対して　$f(xy) = f(x) + f(y)$

(b) すべての自然数 n に対して　$f(n) < f(n+1)$

この関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) x を正の実数とするとき，次の値を求めよ．

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(2) a を $a > 1$ を満たす有理数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a) > 0$$

(3) a，b を $0 < a < b$ を満たす有理数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a) < f(b)$$

(4) a，b が $0 < a < b$ を満たす実数でも (3) の不等式が成り立つことを用いて，正の実数 x，y に対して，次の不等式を証明せよ．

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 定義式から

$$\begin{aligned} a_3 &= pa_1 + (1-p)a_2 = p\cdot 1 + (1-p)p \\ &= \boldsymbol{-p^2 + 2p} \\ a_4 &= pa_2 + (1-p)a_3 = p\cdot p + (1-p)(-p^2+2p) \\ &= \boldsymbol{p^3 - 2p^2 + 2p} \end{aligned}$$

したがって　$a_4 - a_2 = (p^3 - 2p^2 + 2p) - p = p(p-1)^2 > 0$

$a_2 - 1 = p - 1 > 0$

$1 - a_3 = 1 - (-p^2 + 2p) = (p-1)^2 > 0$

よって　$a_4 > a_2 > 1 > a_3$

(2) 定義式から　$a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1} - a_n)$

ゆえに　$b_{n+1} = -pb_n,\quad b_1 = a_2 - a_1 = p - 1$

したがって　$b_n = b_1(-p)^{n-1} = \boldsymbol{(p-1)(-p)^{n-1}}$

すなわち　$a_{n+1} - a_n = (p-1)(-p)^{n-1} \quad \cdots ①$

また，定義式から　$a_{n+2} + pa_{n+1} = a_{n+1} + pa_n$

すなわち　$a_{n+1} + pa_n = a_2 + pa_1 = p + p\cdot 1 = 2p \quad \cdots ②$

①，② より　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{2p - (p-1)(-p)^{n-1}}{p+1}}$

(3) (2) の結果からおよび $p > 1$ から

$$\begin{aligned} 1 - a_{2m+1} &= 1 - \frac{2p - (p-1)(-p)^{2m}}{p+1} = \frac{-p + 1 + (p-1)p^{2m}}{p+1} \\ &= \frac{(p-1)(p^{2m}-1)}{p+1} > 0 \\ a_{2m+1} - a_{2m+3} &= \frac{2p - (p-1)(-p)^{2m}}{p+1} - \frac{2p - (p-1)(-p)^{2m+2}}{p+1} \\ &= p^{2m}(p-1)^2 > 0 \end{aligned}$$

よって　$1 > a_{2m+1} > a_{2m+3}$

(4) (2) の結果から，$p=\dfrac{3}{2}$ のとき　　$a_n=\dfrac{1}{5}\left\{6-\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\right\}$

上式から，$0>a_n$ を満たす n は奇数であるから

$$a_3=\frac{1}{5}\left\{6-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right\}=\frac{3}{4}$$
$$a_5=\frac{1}{5}\left\{6-\left(-\frac{3}{2}\right)^4\right\}=\frac{3}{16}$$
$$a_7=\frac{1}{5}\left\{6-\left(-\frac{3}{2}\right)^6\right\}=-\frac{69}{64}$$

よって，$0>a_n$ を満たす最小の自然数 n は　　$\boldsymbol{7}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)
$$\begin{aligned} f(x)&=2a^{3x}-9a^{2x+1}+12a^{x+2}\quad(0\leqq x\leqq 2)\\ &=2(a^x)^3-9a(a^x)^2+12a^2{\cdot}a^x \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{g(X)=2X^3-9aX^2+12a^2X\quad(1\leqq X\leqq a^2)}$

(2) (1) の結果から　$g'(X)=6X^2-18aX+12a^2=6(X-a)(X-2a)$

$a>2$ より　　$1<a<2a<a^2$

したがって，$g(X)$ の増減表は次のようになる．

X	1	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	a^2
$g'(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(X)$	$g(1)$	↗	極大	↘	極小	↗	$g(a^2)$

よって　　$\boldsymbol{1<X<a}$，$\boldsymbol{2a<X<a^2}$ **において，増加**
$\boldsymbol{a<X<2a}$ **において，減少**

(3)
$$\begin{aligned} g(1)&=2{\cdot}1^3-9a{\cdot}1^2+12a^2{\cdot}1=12a^2-9a+2\\ g(a)&=2a^3-9a{\cdot}a^2+12a^2{\cdot}a=5a^3\\ g(2a)&=2(2a)^3-9a{\cdot}(2a)^2+12a^2{\cdot}2a=4a^3\\ g(a^2)&=2(a^2)^3-9a{\cdot}(a^2)^2+12a^2{\cdot}a^2=2a^6-9a^5+12a^4 \end{aligned}$$

したがって　$g(a^2)-g(a)=(2a^6-9a^5+12a^4)-5a^3=a^3(a-1)^2(2a-5)$
$g(2a)-g(1)=4a^3-(12a^2-9a+2)=(a-2)(2a-1)^2>0$

よって　最大値は $\begin{cases} \boldsymbol{2<a\leqq\dfrac{5}{2}} \text{ **のとき** } & \boldsymbol{5a^3} \\ \boldsymbol{\dfrac{5}{2}<a} \text{ **のとき** } & \boldsymbol{2a^6-9a^5+12a^4} \end{cases}$，

最小値は $\boldsymbol{12a^2-9a+2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)$ を微分すると

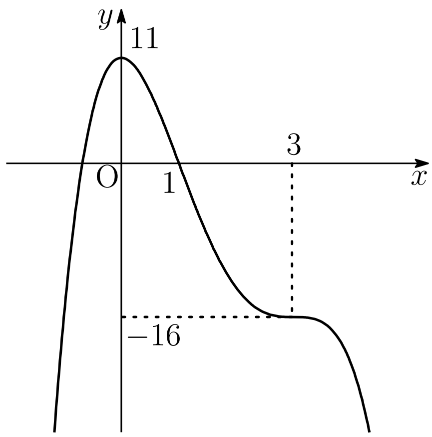
$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x$$
$$= -4x(x-3)^2$$

$f(x)$ の増減は，次のようなる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	11	$\searrow$	-16	$\searrow$

よって　$x=0$ のとき**極大値 11**

また，グラフの概形は右のようになる．



(2) 求める直線の方程式を $y = mx + n$ とおくと，方程式

$-x^4+8x^3-18x^2+11 = mx+n$　すなわち　$x^4-8x^3+18x^2+mx+n-11=0$

は，異なる 2 重解をもつので，その解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$x^4 - 8x^3 + 18x^2 + mx + n - 11 = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \quad \cdots ①$$

このとき，右辺を展開すると

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 &= \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}^2 \\ &= x^4 - 2(\alpha+\beta)x^3 + \{(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 \\ &\qquad - 2\alpha\beta(\alpha+\beta)x + (\alpha\beta)^2 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② の係数を比較すると
$$\begin{cases} -8 = -2(\alpha+\beta) \\ 18 = (\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta \\ m = -2\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ n - 11 = (\alpha\beta)^2 \end{cases}$$

上の第 1，2 式から　　$\alpha+\beta = 4$，$\alpha\beta = 1$

これらを第 3，4 式に代入すると　　$m = -8$，$n = 12$

よって　　$\boldsymbol{y = -8x + 12}$

(3) 求める面積 S は，(2) の結果を利用すると [1]

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \{(mx+n)-(-x^4+8x^3-18x^2+11)\}\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}^2\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5 = \frac{1}{30}\left\{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\right\}^5 \\
&= \frac{1}{30}(\sqrt{4^2-4\cdot 1}\,)^5 = \boldsymbol{\frac{48}{5}\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=r\sin(2x+\alpha)=r\cos\alpha\sin 2x+r\sin\alpha\cos 2x$ であるから

$$r\cos\alpha=1,\quad r\sin\alpha=2\sqrt{2}$$

したがって $\qquad (r\cos\alpha)^2+(r\sin\alpha)^2=1^2+(2\sqrt{2})^2$

$r>0$ であるから $\quad r=3 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$，$\boldsymbol{\cos\alpha=\frac{1}{3}}$

(2) $f(x)$ が最大となるとき，$2x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ であるから (n は整数)

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi-\alpha\right)=\cos\alpha=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \\
\cos 2x &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi-\alpha\right)=\sin\alpha=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}
\end{aligned}
$$

$f(x)$ が最小となるとき，$2x+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi+2n\pi$ であるから (n は整数)

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha=\boldsymbol{-\frac{1}{3}} \\
\cos 2x &= \cos\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}
\end{aligned}
$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

(3) $f(x)$ が最大のとき，$\cos 2x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ より

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{6}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{6}$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \dfrac{1}{3} > 0$ であることに注意して

$$\begin{cases} \sin x & = \pm\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} = \pm\dfrac{\mathbf{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}}{\mathbf{6}} \\ \cos x & = \pm\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}} = \pm\dfrac{\mathbf{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}}{\mathbf{6}} \end{cases} \quad \text{(複号同順)}$$

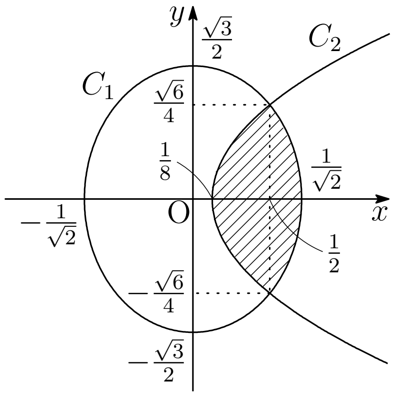
$f(x)$ が最小のとき，$\cos 2x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ より

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{6}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{6}$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x = -\dfrac{1}{3} < 0$ であることに注意して

$$\begin{cases} \sin x & = \pm\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}} = \pm\dfrac{\mathbf{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}}{\mathbf{6}} \\ \cos x & = \mp\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} = \mp\dfrac{\mathbf{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}}{\mathbf{6}} \end{cases} \quad \text{(複号同順)}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\begin{cases} 6x^2+4y^2=3 & \cdots ① \\ 8x-8y^2=1 & \cdots ② \end{cases}$



①，② から y^2 を消去すると

$$12x^2+8x-7=0$$
$$(2x-1)(6x+7)=0$$

② より，$x=y^2+\frac{1}{8} \geqq \frac{1}{8}$ であるから

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

したがって，C_1 と C_2 の交点は $\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$

① を x で微分すると　$12x+8yy'=0$　すなわち　$y'=-\frac{3x}{2y}$

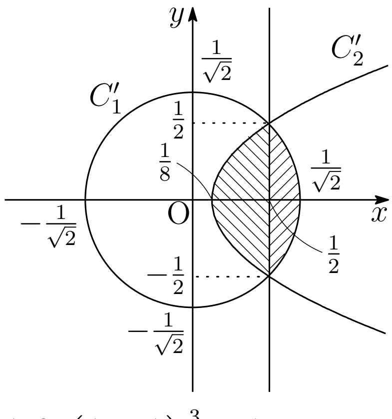
② を x で微分すると　$8-16yy'=0$　すなわち　$y'=\frac{1}{2y}$

C_1，C_2 の交点における接線の傾きを，それぞれ m_1，m_2 とすると

$$m_1m_2=-\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}\times\frac{1}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}=-1$$

よって，C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交する．

(2) C_1，C_2 を x 軸をもとに y 軸方向に $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 倍に縮小したものを，それぞれ C_1'，C_2' とすると



$$C_1' : x^2+y^2=\frac{1}{2}, \quad C_2' : x=\frac{3}{2}y^2+1$$

C_1' と領域 $x \geqq \frac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

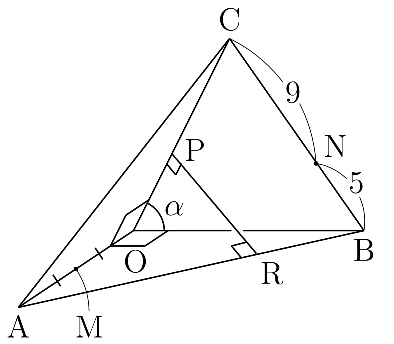
C_2' と領域 $x \leqq \frac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は　$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\right\}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{16}\pi}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{3}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$，$\vec{b}\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha = 3x$



実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

とおく．PR の長さが最小であるとき，
OC⊥PR，AB⊥PR であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = 0$ より

$$\vec{c}\cdot\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}\} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad tx - s = 0 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = 0$ より

$$(\vec{b} - \vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}\} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -3sx + 4t - 1 = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$s = \dfrac{x}{4-3x^2}$，$t = \dfrac{1}{4-3x^2}$

$0 < x < 1$ であるから，$0 < s < 1$，$0 < t < 1$ となり，このとき，P，R はそれぞれ線分 OC，AB 上にある．

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c} = \vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (\vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} \\ &= \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \vec{a}\cdot\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}\} \\ &= 1 - t = 1 - \frac{1}{4-3x^2} = \frac{3-3x^2}{4-3x^2} \end{aligned}$$

よって　$\mathbf{PR} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{3 - 3x^2}}{\mathbf{4 - 3x^2}}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$，　$s=\dfrac{x}{4-3x^2}$，$t=\dfrac{1}{4-3x^2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{9}{14}\vec{b}+\dfrac{5}{14}\vec{c}$，

線分 PR 上の点の位置ベクトルは，実数 α を用いて $(0\leqq\alpha\leqq 1)$

$$(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-\alpha)s\vec{c}+\alpha(1-t)\vec{a}+\alpha t\vec{b}\quad\cdots③$$

線分 MN 上の点の位置ベクトルは，実数 β を用いて $(0\leqq\beta\leqq 1)$

$$(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(1-\beta)\vec{a}+\frac{9}{14}\beta\vec{b}+\frac{5}{14}\beta\vec{c}\quad\cdots④$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，線分 PR と線分 MN の交点において，③，④ より，次式が成り立つ．

$$\alpha(1-t)=\frac{1}{2}(1-\beta)\cdots⑤,\quad \alpha t=\frac{9}{14}\beta\cdots⑥,\quad (1-\alpha)s=\frac{5}{14}\beta\cdots⑦$$

⑥，⑦ から β を消去すると　　$5\alpha t=9(1-\alpha)s$

$\dfrac{s}{t}=x$ であるから　$5\alpha=9(1-\alpha)x$　ゆえに　$\alpha=\dfrac{9x}{9x+5}$

これと $t=\dfrac{1}{4-3x^2}$ を ⑥ に代入することにより　$\beta=\dfrac{14x}{(9x+5)(4-3x^2)}$

これらの α，β を ⑤ に代入すると

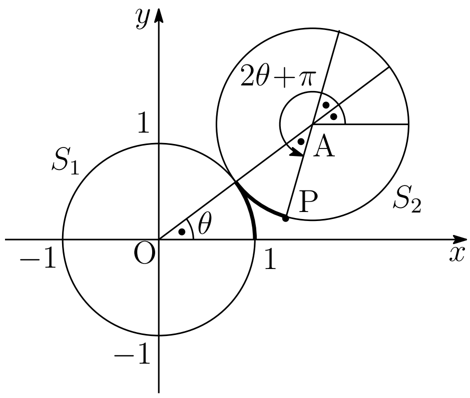
$$\frac{9x}{9x+5}\left(1-\frac{1}{4-3x^2}\right)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{14x}{(9x+5)(4-3x^2)}\right\}$$

整理すると　　　$27x^3-15x^2-32x+20=0$

ゆえに　　　　　$(x-1)(3x-2)(9x+10)=0$

$x=\cos\alpha$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ より，$0<x<1$ であるから　　$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 右の図において



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (\cos(2\theta+\pi),\ \sin(2\theta+\pi)) \\ &= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= (2\cos\theta - \cos 2\theta,\ 2\sin\theta - \sin 2\theta)\end{aligned}$$

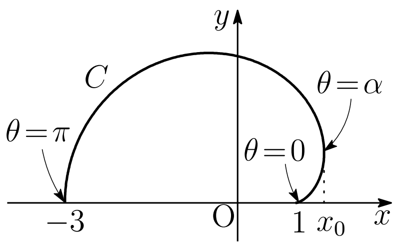
よって　$\boldsymbol{x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta}$，$\boldsymbol{y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta}$

(2)
$$x(2\pi-\theta) = 2\cos(2\pi-\theta) - \cos 2(2\pi-\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta = x(\theta)$$

$$y(2\pi-\theta) = 2\sin(2\pi-\theta) - \sin 2(2\pi-\theta) = -2\sin\theta + \sin 2\theta = -y(\theta)$$

よって，C は x 軸関して対称である．

(3) C の x 軸の上側の部分の面積を T とすると



$$\begin{aligned}T &= \int_{-3}^{1} y\,dx = \int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\pi}^{0} (2\sin\theta - \sin 2\theta)(2\cos\theta - \cos 2\theta)'\,d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} (2\sin\theta - \sin 2\theta)(2\sin\theta - 2\sin 2\theta)\,d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} (4\sin^2\theta - 6\sin 2\theta\sin\theta + 2\sin^2 2\theta)\,d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \{2(1-\cos 2\theta) + 3(\cos 3\theta - \cos\theta) + (1-\cos 4\theta)\}\,d\theta \\ &= 3\pi\end{aligned}$$

よって，求める面積を S とすると　$S = 2T - \pi = 2{\cdot}3\pi - \pi = \boldsymbol{5\pi}$

補足 C の x が，$\theta = \alpha$ で最大値 x_0 とすると

$$\begin{aligned}T &= \int_{-3}^{x_0} y\,dx - \int_{1}^{x_0} y\,dx \\ &= \int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \int_{0}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta + \int_{\alpha}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $$f(xy)=f(x)+f(y) \quad \cdots (*)$$

$(*)$ に $x=y=1$ を代入すると

$$f(1)=f(1)+f(1) \quad \text{ゆえに} \quad f(1)=0 \quad \cdots ①$$

$(*)$，① から $\quad f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f\left(x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=f(1)=\mathbf{0}$

(2) (1) の結果から $\quad f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{y}\right)$

また，$f\left(\dfrac{1}{y}\right)=-f(y)$ であるから

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y) \quad \cdots (**)$$

$a=\dfrac{m}{n}$ $(m,\ n$ は自然数$)$ とおくと，$a>1$ より $\quad m>n$

仮定より，すべての自然数 k に対して，$f(k+1)-f(k)>0$ が成り立つので，このとき

$$\sum_{k=n}^{m-1}\{f(k+1)-f(k)\}>0 \quad \text{ゆえに} \quad f(m)-f(n)>0$$

$(**)$ より $\quad f(a)=f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)>0$

(3) $0<a<b$ から $\dfrac{b}{a}>1$ であるから，$(**)$ および (2) の結果から

$$f(b)-f(a)=f\left(\frac{b}{a}\right)>0 \quad \text{よって} \quad f(a)<f(b)$$

(4) $(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{f(x)+f(y)}{2} &= \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(x)\right\}+\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(y)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x+y}{2x}\right)+f\left(\frac{x+y}{2y}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}f\left(\frac{(x+y)^2}{4xy}\right)
\end{aligned}$$

ここで $\quad \dfrac{(x+y)^2}{4xy}-1=\dfrac{(x-y)^2}{4xy}\geqq 0 \quad$ ゆえに $\quad \dfrac{(x+y)^2}{4xy}\geqq 1$

① および (2) の結果から $\quad f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\geqq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

別解　(i) $x=y$ のとき　$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

(ii) $x \neq y$ のとき，$\dfrac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ であるから，(3) の結果から

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{2}\right) &> f(\sqrt{xy}) = f(\sqrt{x}) + f(\sqrt{y}) \\
&= \frac{f(\sqrt{x})+f(\sqrt{x})}{2} + \frac{f(\sqrt{y})+f(\sqrt{y})}{2} \\
&= \frac{f(\sqrt{x}\sqrt{x})}{2} + \frac{f(\sqrt{y}\sqrt{y})}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}
\end{aligned}
$$

(i)，(ii) より，正の実数 x，y に対して，次式が成立する．

$$
f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \frac{f(x)+f(y)}{2}
$$