

平成 21 年度 長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

平成 21 年 2 月 25 日

- 教育・薬・工学部 1 3 4 5 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部 1 2 数 I・II・A・B (80 分)
- 医・歯学部 4 6 7 8 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 p を $p > 1$ を満たす定数とし、

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = p \\ a_{n+2} = pa_n + (1-p)a_{n+1} & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) a_3, a_4 を求め、 $a_4 > a_2 > 1 > a_3$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \geq 1$) とするとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。また、 b_n を利用して、数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(3) 不等式

$$1 > a_{2m+1} > a_{2m+3} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

- (4) $p = \frac{3}{2}$ のとき、 $0 > a_n$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

2 a を $a > 2$ を満たす定数とする。関数

$$f(x) = 2a^{3x} - 9a^{2x+1} + 12a^{x+2} \quad (0 \leq x \leq 2)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) $a^x = X$ とおいたときの $f(x)$ を $g(X)$ とするとき、 $g(X)$ を求めよ。
- (2) $g(X)$ の増減を調べよ。
- (3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

3 関数 $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 11$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ の増減と極値を調べ、グラフの概形をかけ。
- (2) $y = f(x)$ と異なる 2 点で接する直線の方程式を求めよ。
- (3) $y = f(x)$ と (2) で求めた直線とで囲まれた部分の面積を求めよ。

4 関数 $f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{2} \cos 2x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = r \sin(2x + \alpha)$ ($r > 0$) と表すとき、 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ の値を求めよ。
- (2) $f(x)$ が最大となるときと最小となるときの $\sin 2x$, $\cos 2x$ の値を求めよ。
- (3) $f(x)$ が最大となるときと最小となるときの $\sin x$, $\cos x$ の値を求めよ。

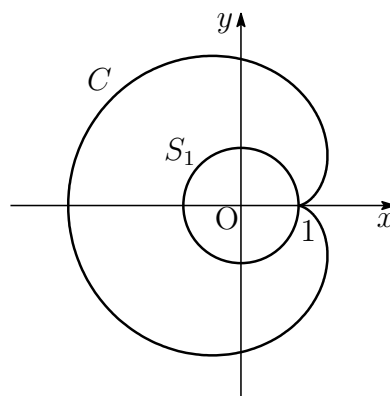
5 楕円 $C_1: 6x^2 + 4y^2 = 3$ と曲線 $C_2: 8x - 8y^2 = 1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点において、 C_1 と C_2 の接線は直交することを証明せよ。
- (2) $x > 0$ の範囲において、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

6 四面体 $OABC$ において、 $OA = 1$, $OB = OC = \sqrt{3}$, $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) とする。辺 OC 上の点 P と辺 AB 上の点 R を、線分 PR の長さが最小になるような位置にとる。また、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $\cos \alpha = x$ とし、線分 PR の長さを x の関数として表せ。
- (2) 線分 OA の中点を M , 線分 BC を $5:9$ に内分する点を N とする。線分 PR と線分 MN が交わるように x の値を定めよ。

7 xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 S_1 と、点 A を中心とする半径 1 の円 S_2 がある。円 S_2 は円 S_1 に外接しながら、すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する。点 A の出発点は $(2, 0)$ であり、円 S_2 上の点で、このとき $(1, 0)$ に位置している点を P とする。点 A が $(2, 0)$ から出発し、 $(2, 0)$ に戻ってくるまで、点 P の描く曲線を C とすると、図のようになる。また、動径 OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) であるときの点 P の座標を $(x(\theta), y(\theta))$ とする。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) $x(\theta)$, $y(\theta)$ を θ を用いて表せ。
- (2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ。
- (3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ。

8 すべての正の実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の (a), (b) を満たすものとする.

(a) すべての正の実数 x, y に対して $f(xy) = f(x) + f(y)$

(b) すべての自然数 n に対して $f(n) < f(n+1)$

この関数 $f(x)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) x を正の実数とするとき, 次の値を求めよ.

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(2) a を $a > 1$ を満たす有理数とするとき, 次の不等式を証明せよ.

$$f(a) > 0$$

(3) a, b を $0 < a < b$ を満たす有理数とするとき, 次の不等式を証明せよ.

$$f(a) < f(b)$$

(4) a, b が $0 < a < b$ を満たす実数でも (3) の不等式が成り立つことを用いて, 正の実数 x, y に対して, 次の不等式を証明せよ.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

解答例

1 (1) 定義式から

$$\begin{aligned} a_3 &= pa_1 + (1-p)a_2 = p \cdot 1 + (1-p)p \\ &= -p^2 + 2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= pa_2 + (1-p)a_3 = p \cdot p + (1-p)(-p^2 + 2p) \\ &= p^3 - 2p^2 + 2p \end{aligned}$$

したがって $a_4 - a_2 = (p^3 - 2p^2 + 2p) - p = p(p-1)^2 > 0$

$$a_2 - 1 = p - 1 > 0$$

$$1 - a_3 = 1 - (-p^2 + 2p) = (p-1)^2 > 0$$

よって $a_4 > a_2 > 1 > a_3$

(2) 定義式から $a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1} - a_n)$

ゆえに $b_{n+1} = -pb_n, \quad b_1 = a_2 - a_1 = p - 1$

したがって $b_n = b_1(-p)^{n-1} = (p-1)(-p)^{n-1}$

すなわち $a_{n+1} - a_n = (p-1)(-p)^{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$

また、定義式から $a_{n+2} + pa_{n+1} = a_{n+1} + pa_n$

すなわち $a_{n+1} + pa_n = a_2 + pa_1 = p + p \cdot 1 = 2p \quad \dots \textcircled{2}$

①, ②より
$$a_n = \frac{2p - (p-1)(-p)^{n-1}}{p+1}$$

(3) (2)の結果からおよび $p > 1$ から

$$\begin{aligned} 1 - a_{2m+1} &= 1 - \frac{2p - (p-1)(-p)^{2m}}{p+1} = \frac{-p+1 + (p-1)p^{2m}}{p+1} \\ &= \frac{(p-1)(p^{2m} - 1)}{p+1} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2m+1} - a_{2m+3} &= \frac{2p - (p-1)(-p)^{2m}}{p+1} - \frac{2p - (p-1)(-p)^{2m+2}}{p+1} \\ &= p^{2m}(p-1)^2 > 0 \end{aligned}$$

よって $1 > a_{2m+1} > a_{2m+3}$

$$(4) (2) \text{の結果から, } p = \frac{3}{2} \text{のとき} \quad a_n = \frac{1}{5} \left\{ 6 - \left(-\frac{3}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

上式から, $0 > a_n$ を満たす n は奇数であるから

$$a_3 = \frac{1}{5} \left\{ 6 - \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right\} = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = \frac{1}{5} \left\{ 6 - \left(-\frac{3}{2} \right)^4 \right\} = \frac{3}{16}$$

$$a_7 = \frac{1}{5} \left\{ 6 - \left(-\frac{3}{2} \right)^6 \right\} = -\frac{69}{64}$$

よって, $0 > a_n$ を満たす最小の自然数 n は **7** ■

$$\boxed{2} (1) \quad f(x) = 2a^{3x} - 9a^{2x+1} + 12a^{x+2} \quad (0 \leq x \leq 2) \\ = 2(a^x)^3 - 9a(a^x)^2 + 12a^2 \cdot a^x$$

よって $g(X) = 2X^3 - 9aX^2 + 12a^2X \quad (1 \leq X \leq a^2)$

$$(2) (1) \text{の結果から} \quad g'(X) = 6X^2 - 18aX + 12a^2 = 6(X-a)(X-2a)$$

$$a > 2 \text{より} \quad 1 < a < 2a < a^2$$

したがって, $g(X)$ の増減表は次のようになる.

X	1	...	a	...	$2a$...	a^2
$g'(X)$		+	0	-	0	+	
$g(X)$	$g(1)$	↗	極大	↘	極小	↗	$g(a^2)$

よって $1 < X < a$, $2a < X < a^2$ において, 増加
 $a < X < 2a$ において, 減少

$$(3) \quad g(1) = 2 \cdot 1^3 - 9a \cdot 1^2 + 12a^2 \cdot 1 = 12a^2 - 9a + 2$$

$$g(a) = 2a^3 - 9a \cdot a^2 + 12a^2 \cdot a = 5a^3$$

$$g(2a) = 2(2a)^3 - 9a \cdot (2a)^2 + 12a^2 \cdot 2a = 4a^3$$

$$g(a^2) = 2(a^2)^3 - 9a \cdot (a^2)^2 + 12a^2 \cdot a^2 = 2a^6 - 9a^5 + 12a^4$$

$$\text{したがって} \quad g(a^2) - g(a) = (2a^6 - 9a^5 + 12a^4) - 5a^3 = a^3(a-1)^2(2a-5)$$

$$g(2a) - g(1) = 4a^3 - (12a^2 - 9a + 2) = (a-2)(2a-1)^2 > 0$$

$$\text{よって 最大値は} \begin{cases} 2 < a \leq \frac{5}{2} \text{のとき} & 5a^3 \\ \frac{5}{2} < a \text{のとき} & 2a^6 - 9a^5 + 12a^4 \end{cases},$$

$$\text{最小値は } 12a^2 - 9a + 2 \quad \blacksquare$$

3 (1) $f(x)$ を微分すると

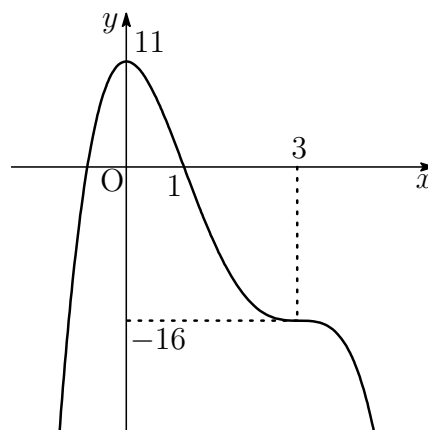
$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 + 24x^2 - 36x \\ &= -4x(x-3)^2 \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減は、次のようになる。

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	↗	11	↘	-16	↘

よって $x=0$ のとき極大値 **11**

また、グラフの概形は右のようになる。



(2) 求める直線の方程式を $y = mx + n$ とおくと、方程式

$$-x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 11 = mx + n \quad \text{すなわち} \quad x^4 - 8x^3 + 18x^2 + mx + n - 11 = 0$$

は、異なる2重解をもつので、その解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$x^4 - 8x^3 + 18x^2 + mx + n - 11 = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき、右辺を展開すると

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 &= \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2 \\ &= x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + \{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 \\ &\quad - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + (\alpha\beta)^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の係数を比較すると } \begin{cases} -8 = -2(\alpha + \beta) \\ 18 = (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta \\ m = -2\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ n - 11 = (\alpha\beta)^2 \end{cases}$$

上の第1, 2式から $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 1$

これらを第3, 4式に代入すると $m = -8, n = 12$

よって $y = -8x + 12$

(3) 求める面積 S は, (2) の結果を利用すると ¹

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(mx+n) - (-x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 11)\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 \{(x-\alpha) - (\beta-\alpha)\}^2 dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x-\alpha)^4 - 2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3 + (\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^4 + \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5 = \frac{1}{30} \left\{ \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} \right\}^5 \\
 &= \frac{1}{30}(\sqrt{4^2 - 4 \cdot 1})^5 = \frac{48}{5}\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

■

4 (1) $f(x) = r \sin(2x + \alpha) = r \cos \alpha \sin 2x + r \sin \alpha \cos 2x$ であるから

$$r \cos \alpha = 1, \quad r \sin \alpha = 2\sqrt{2}$$

$$\text{したがって} \quad (r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2$$

$$r > 0 \text{ であるから } r = 3 \quad \text{よって} \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

(2) $f(x)$ が最大となるとき, $2x + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ であるから (n は整数)

$$\sin 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi - \alpha \right) = \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi - \alpha \right) = \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$f(x)$ が最小となるとき, $2x + \alpha = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ であるから (n は整数)

$$\sin 2x = \sin \left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi - \alpha \right) = -\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi - \alpha \right) = -\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010_kouki.pdf の **1** を参照.

(3) $f(x)$ が最大のとき, $\cos 2x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ より

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{6}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{6}$$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{1}{3} > 0$ であることに注意して

$$\begin{cases} \sin x = \pm \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6} \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$

$f(x)$ が最小のとき, $\cos 2x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ より

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{6}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{6}$$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = -\frac{1}{3} < 0$ であることに注意して

$$\begin{cases} \sin x = \pm \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} \\ \cos x = \mp \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6}} = \mp \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6} \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$



$$\boxed{5} \quad (1) \quad \begin{cases} 6x^2 + 4y^2 = 3 & \cdots \textcircled{1} \\ 8x - 8y^2 = 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② から y^2 を消去すると

$$\begin{aligned} 12x^2 + 8x - 7 &= 0 \\ (2x - 1)(6x + 7) &= 0 \end{aligned}$$

② より, $x = y^2 + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8}$ であるから

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$$

したがって, C_1 と C_2 の交点は $\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$

① を x で微分すると $12x + 8yy' = 0$ すなわち $y' = -\frac{3x}{2y}$

② を x で微分すると $8 - 16yy' = 0$ すなわち $y' = \frac{1}{2y}$

C_1, C_2 の交点における接線の傾きを, それぞれ m_1, m_2 とすると

$$m_1 m_2 = -\frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{2 \left(\pm \frac{\sqrt{6}}{4}\right)} \times \frac{1}{2 \left(\pm \frac{\sqrt{6}}{4}\right)} = -1$$

よって, C_1 と C_2 の交点において, C_1 と C_2 の接線は直交する.

(2) C_1, C_2 を x 軸をもとに y 軸方向に $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 倍に縮小したものを, それぞれ C'_1, C'_2 とすると

$$C'_1: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, \quad C'_2: x = \frac{3}{2}y^2 + 1$$

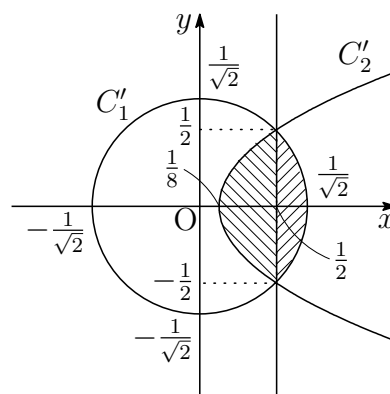
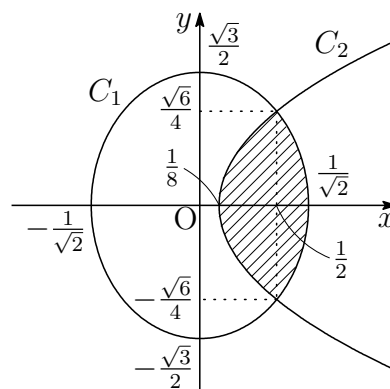
C'_1 と領域 $x \geq \frac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \pi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

C'_2 と領域 $x \leq \frac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$

よって, 求める面積を S とすると

$$S = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \right\} = \frac{\sqrt{6}}{16} \pi$$



■

6 (1) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{3}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos \alpha = 3x$

実数 s, t を用いて

$$\vec{OP} = s\vec{c}, \quad \vec{OR} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

とおく. PR の長さが最小であるとき,
 $OC \perp PR, AB \perp PR$ であるから

$$\vec{OC} \cdot \vec{PR} = 0 \text{ より}$$

$$\vec{c} \cdot \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}\} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad tx - s = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{PR} = 0 \text{ より}$$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}\} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -3sx + 4t - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて} \quad s = \frac{x}{4-3x^2}, \quad t = \frac{1}{4-3x^2}$$

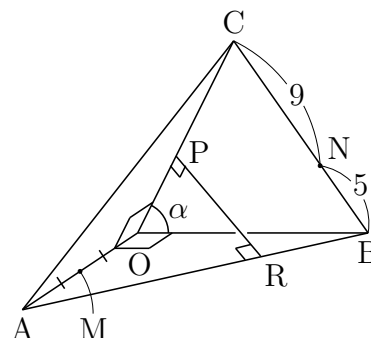
$0 < x < 1$ であるから, $0 < s < 1, 0 < t < 1$ となり, このとき, P, R はそれぞれ線分 OC, AB 上にある.

$$\vec{PR} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c} = \vec{a} + t\vec{AB} - \vec{OC}$$

であるから, $\vec{AB} \cdot \vec{PR} = 0, \vec{OC} \cdot \vec{PR} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} |\vec{PR}|^2 &= \vec{PR} \cdot \vec{PR} = (\vec{a} + t\vec{AB} - \vec{OC}) \cdot \vec{PR} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{PR} = \vec{a} \cdot \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} - s\vec{c}\} \\ &= 1 - t = 1 - \frac{1}{4-3x^2} = \frac{3-3x^2}{4-3x^2} \end{aligned}$$

よって
$$\mathbf{PR} = \sqrt{\frac{3-3x^2}{4-3x^2}}$$



$$(2) \overrightarrow{OP} = s\vec{c}, \quad \overrightarrow{OR} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \quad s = \frac{x}{4-3x^2}, \quad t = \frac{1}{4-3x^2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{9}{14}\vec{b} + \frac{5}{14}\vec{c},$$

線分 PR 上の点の位置ベクトルは、実数 α を用いて ($0 \leq \alpha \leq 1$)

$$(1-\alpha)\overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{OR} = (1-\alpha)s\vec{c} + \alpha(1-t)\vec{a} + \alpha t\vec{b} \quad \cdots \textcircled{3}$$

線分 MN 上の点の位置ベクトルは、実数 β を用いて ($0 \leq \beta \leq 1$)

$$(1-\beta)\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(1-\beta)\vec{a} + \frac{9}{14}\beta\vec{b} + \frac{5}{14}\beta\vec{c} \quad \cdots \textcircled{4}$$

\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} は 1 次独立であるから、線分 PR と線分 MN の交点において、

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より、次式が成り立つ。

$$\alpha(1-t) = \frac{1}{2}(1-\beta) \cdots \textcircled{5}, \quad \alpha t = \frac{9}{14}\beta \cdots \textcircled{6}, \quad (1-\alpha)s = \frac{5}{14}\beta \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{6}$, $\textcircled{7}$ から β を消去すると $5\alpha t = 9(1-\alpha)s$

$$\frac{s}{t} = x \text{ であるから } 5\alpha = 9(1-\alpha)x \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{9x}{9x+5}$$

$$\text{これと } t = \frac{1}{4-3x^2} \text{ を } \textcircled{6} \text{ に代入することにより } \beta = \frac{14x}{(9x+5)(4-3x^2)}$$

これらの α , β を $\textcircled{5}$ に代入すると

$$\frac{9x}{9x+5} \left(1 - \frac{1}{4-3x^2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{14x}{(9x+5)(4-3x^2)} \right\}$$

$$\text{整理すると} \quad 27x^3 - 15x^2 - 32x + 20 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (x-1)(3x-2)(9x+10) = 0$$

$$x = \cos \alpha \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ) \text{ より, } 0 < x < 1 \text{ であるから} \quad x = \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

7 (1) 右の図において

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= (2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \\ \vec{AP} &= (\cos(2\theta + \pi), \sin(2\theta + \pi)) \\ &= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} \\ &= (2 \cos \theta - \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta)\end{aligned}$$

よって $x(\theta) = 2 \cos \theta - \cos 2\theta$, $y(\theta) = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$

$$\begin{aligned}(2) \quad x(2\pi - \theta) &= 2 \cos(2\pi - \theta) - \cos 2(2\pi - \theta) = 2 \cos \theta - \cos 2\theta = x(\theta) \\ y(2\pi - \theta) &= 2 \sin(2\pi - \theta) - \sin 2(2\pi - \theta) = -2 \sin \theta + \sin 2\theta = -y(\theta)\end{aligned}$$

よって、 C は x 軸に関して対称である。

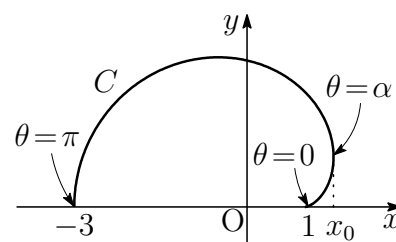
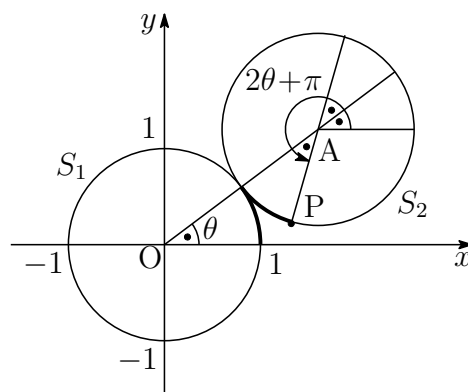
(3) C の x 軸の上側の部分の面積を T とすると

$$\begin{aligned}T &= \int_{-3}^1 y dx = \int_{\pi}^0 y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 (2 \sin \theta - \sin 2\theta)(2 \cos \theta - \cos 2\theta)' d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (2 \sin \theta - \sin 2\theta)(2 \sin \theta - 2 \sin 2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (4 \sin^2 \theta - 6 \sin 2\theta \sin \theta + 2 \sin^2 2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \{2(1 - \cos 2\theta) + 3(\cos 3\theta - \cos \theta) + (1 - \cos 4\theta)\} d\theta \\ &= 3\pi\end{aligned}$$

よって、求める面積を S とすると $S = 2T - \pi = 2 \cdot 3\pi - \pi = 5\pi$

補足 C の x が、 $\theta = \alpha$ で最大値 x_0 とすると

$$\begin{aligned}T &= \int_{-3}^{x_0} y dx - \int_1^{x_0} y dx \\ &= \int_{\pi}^{\alpha} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta - \int_0^{\alpha} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\pi}^{\alpha} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta + \int_{\alpha}^0 y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_{\pi}^0 y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta\end{aligned}$$



■

8 (1) $f(xy) = f(x) + f(y) \quad \cdots (*)$

(*) に $x = y = 1$ を代入すると

$$f(1) = f(1) + f(1) \quad \text{ゆえに} \quad f(1) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*), $\textcircled{1}$ から $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$

(2) (1) の結果から $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

また, $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$ であるから

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad \cdots (**)$$

$a = \frac{m}{n}$ (m, n は自然数) とおくと, $a > 1$ より $m > n$

仮定より, すべての自然数 k に対して, $f(k+1) - f(k) > 0$ が成り立つので, このとき

$$\sum_{k=n}^{m-1} \{f(k+1) - f(k)\} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad f(m) - f(n) > 0$$

(**) より $f(a) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) - f(n) > 0$

(3) $0 < a < b$ から $\frac{b}{a} > 1$ であるから, (**) および (2) の結果から

$$f(b) - f(a) = f\left(\frac{b}{a}\right) > 0 \quad \text{よって} \quad f(a) < f(b)$$

(4) (*), (**) より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x) + f(y)}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(y) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{x+y}{2x}\right) + f\left(\frac{x+y}{2y}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{(x+y)^2}{4xy}\right) \end{aligned}$$

ここで $\frac{(x+y)^2}{4xy} - 1 = \frac{(x-y)^2}{4xy} \geq 0$ ゆえに $\frac{(x+y)^2}{4xy} \geq 1$

$\textcircled{1}$ および (2) の結果から $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$

別解 (i) $x = y$ のとき $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$

(ii) $x \neq y$ のとき, $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ であるから, (3) の結果から

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &> f(\sqrt{xy}) = f(\sqrt{x}) + f(\sqrt{y}) \\ &= \frac{f(\sqrt{x}) + f(\sqrt{x})}{2} + \frac{f(\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})}{2} \\ &= \frac{f(\sqrt{x}\sqrt{x})}{2} + \frac{f(\sqrt{y}\sqrt{y})}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2} \end{aligned}$$

(i), (ii) より, 正の実数 x, y に対して, 次式が成立する.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

