平成20年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成20年2月25日

- 教育・薬・工学部は，$\boxed{2}$ 〜 $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B(120 分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B(80 分)
- 医・歯学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B(100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を正の定数とする．曲線 $A: y=-x^2+a^2(2a+1)$ と曲線 $B: y=x^3+ax^2$ は相異なる3点 P，Q，R で交わるものとし，3点の中で x 座標が最大であるものを P，最小であるものを R とする．また，点 P における曲線 B の接線を l とする．次の問いに答えよ．

(1) a はどのような範囲にあるか．

(2) 点 Q の x 座標を b，点 R の x 座標を c とする．b，c を a を用いて表せ．

(3) $b<-a$ が成り立つことを示せ．

(4) 点 P の座標と直線 l の方程式を，a を用いて表せ．

(5) 曲線 A と直線 l で囲まれた部分で $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ である領域の面積を，a を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ i を虚数単位として，次の問いに答えよ．

(1) 3次方程式 $x^3=1$ を解け．

(2) $\alpha=m+\sqrt{7}ni$ とするとき，$\alpha^3=225+2\sqrt{7}\,i$ が成り立つ．このような整数 m，n の組を求めよ．

(3) $\beta^3=225+2\sqrt{7}\,i$ を満たす複素数 β をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$ で定義される関数 $f(x)$ が関係式

$$f'(x)=(1-x)|\,x-1\,|+|\,x\,|-1, \quad f(0)=0, \quad f(1)=-\frac{1}{6}$$

をみたすとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $y=f(x)$ のグラフを描き，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

$\boxed{4}$ $\angle \mathrm{A}_n = 90^\circ$，$\angle \mathrm{B}_n = \theta$ である相似な直角三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が，次のような規則で座標平面上に並べられている．

規則 1) 三角形どうしが，辺以外で重なることはない．

規則 2) 頂点 B_1 は座標平面上の原点 $(0,\ 0)$ と一致し，C_1 は点 $(1,\ 0)$ と一致している．また，A_1 は第 1 象限にある．

規則 3) m を自然数とするとき，三角形 $\mathrm{A}_{2m}\mathrm{B}_{2m}\mathrm{C}_{2m}$ と三角形 $\mathrm{A}_{2m-1}\mathrm{B}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-1}$ において，B_{2m} は B_{2m-1} と一致し，C_{2m} は A_{2m-1} と一致している．
さらに，三角形 $\mathrm{A}_{2m+1}\mathrm{B}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m+1}$ と三角形 $\mathrm{A}_{2m}\mathrm{B}_{2m}\mathrm{C}_{2m}$ において，頂点 B_{2m+1} は A_{2m} と一致し，C_{2m+1} は B_{2m} と一致している．

次の問いに答えよ．

(1) A_2 の座標を，θ を用いて表せ．

(2) A_{4m} $(m = 1, 2, \cdots)$ の座標 $(x_m,\ y_m)$ を，θ を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} x_m$ および $\displaystyle\lim_{m\to\infty} y_m$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$，$\angle \mathrm{A} = \theta$ とし，この三角形の外接円の中心を O とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とし，実数 s，t に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ となる点 P を考える．$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ であり，P が外接円の周上にあるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) s，t の満たすべき関係式を求めよ．

(3) $s + t = u$，$st = v$ とおくとき，v のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) 上の (3) において，v が最小値をとるときの $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．また，中心 O との位置関係が分かるように，点 P を図示せよ．

$\boxed{6}$ 放物線 $y = x^2$ 上に，x 座標が t である点 $\mathrm{P}(t)$ をとる．ただし，$t \geqq 0$ とする．$h \neq 0$ とし，放物線の $\mathrm{P}(t)$ における法線と，$\mathrm{P}(t + h)$ における法線を考える．$h \to 0$ とするとき，この 2 法線の交点の x 座標の極限値を $u(t)$，y 座標の極限値を $v(t)$ とする．さらに $(u(t),\ v(t))$ を点 $\mathrm{Q}(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u(t)$ と $v(t)$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が上の放物線上にあるとき，t の値と $\mathrm{Q}(t)$ の座標を求めよ．

(3) 上の放物線，曲線 $x = u(t)$，$y = v(t)$，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

7 1 辺の長さ $\sqrt{2}a$ の正方形の折り紙がある．正方形 ABCD の中心を点 O とし，AO 上に点 E をとり，EO $= b$ とする．図 1 の斜線部を取り去り，OB，OE に沿って折り，OC と OD を貼り合わせ，図 2 のように三角錐 O-BCE を作って平面に置いた．O より三角形 BCE に下ろした垂線と三角形 BCE との交点を H とするとき，次の問いに答えよ．

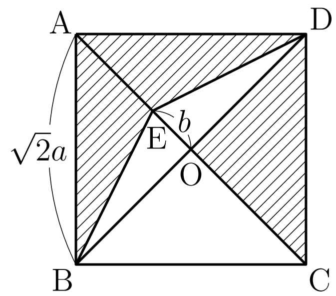


図 1

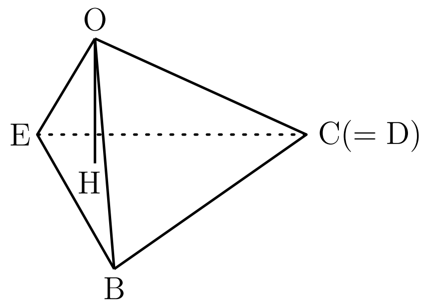


図 2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を用いて表せ．

(2) 三角形 BCE の外心を点 P とする．HP $= \dfrac{a}{4}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の長さを a を用いて表せ．

8 漸化式 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．ただし，次のことは既知としてよい．

> n と無関係な定数 M について，次の A) または B) のうち一方が成立すれば，$n \to \infty$ のとき数列 $\{x_n\}$ は有限な極限値を持つ．
>
> A) $x_n < x_{n+1} < M \quad (n = 1, 2, \cdots)$
>
> B) $x_n > x_{n+1} > M \quad (n = 1, 2, \cdots)$

(1) $n \to \infty$ のとき $\{a_n\}$ は有限な極限値をもつことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=-x^2+a^2(2a+1)$，$y=x^3+ax^2$ から y を消去すると

$$-x^2+a^2(2a+1)=x^3+ax^2$$

ゆえに　$(x-a)\{x^2+(2a+1)x+2a^2+a\}=0 \quad \cdots①$

A と B が異なる 3 点を共有するには，① が異なる 3 つの実数解をもてばよい．ここで，$f(x)=x^2+(2a+1)x+2a^2+a$ とおくと，$a>0$ より

$$f(a)=a^2+(2a+1)a+2a^2+a=5a^2+2a\neq 0$$

方程式 $f(x)=0$ が，異なる 2 つの実数解をもつとき，① は異なる 3 つの実数解をもつ．このとき，方程式 $f(x)=0$ の係数について

$$(2a+1)^2-4\cdot 1(2a^2+a)>0 \quad \text{整理すると} \quad (2a+1)(2a-1)<0$$

$a>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{0<a<\dfrac{1}{2}}$

(2) $f(x)=0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-(2a+1),\quad \alpha\beta=2a^2+a$$

$a>0$ であるから　$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$　ゆえに　$\alpha<0$，$\beta<0$

α，β，a の符号から，P の x 座標が a である．したがって，方程式 $f(x)=0$ の解が b，c である $(b<c)$．

よって　$\boldsymbol{b=\dfrac{-2a-1+\sqrt{1-4a^2}}{2}}$，$\boldsymbol{c=\dfrac{-2a-1-\sqrt{1-4a^2}}{2}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}a+b&=a+\frac{-2a-1+\sqrt{1-4a^2}}{2}=\frac{\sqrt{1-4a^2}-1}{2}\\&=\frac{(\sqrt{1-4a^2}-1)(\sqrt{1-4a^2}+1)}{2(\sqrt{1-4a^2}+1)}=\frac{-2a^2}{\sqrt{1-4a^2}+1}<0\end{aligned}$$

よって　$b<-a$

(4) P の x 座標が a であり，P は $B : y = x^3 + ax^2$ の点であるから　$\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{2a^3})$

$y = x^3 + ax^2$ を微分すると　$y' = 3x^2 + 2ax$

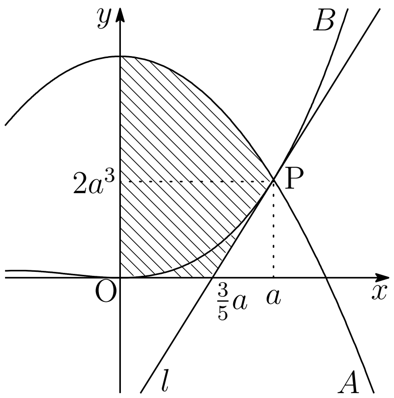
P における B の接線 l の傾きは　$5a^2$

よって，l は点 $\mathrm{P}(a,\ 2a^3)$ を通り，傾き $5a^2$ の直線であるから

$$y - 2a^3 = 5a^2(x - a) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = 5a^2x - 3a^3}$$

(5) (4) の結果から，l と x 軸との交点の x 座標は　$\dfrac{3}{5}a$

求める面積は，下の図の斜線部分であるから



この面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \{-x^2 + a^2(2a+1)\}dx - \frac{1}{2}\left(a - \frac{3}{5}a\right)\cdot 2a^3 \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + a^2(2a+1)x\right]_0^a - \frac{2}{5}a^4 \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{5}a^4 + \frac{2}{3}a^3} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x^3=1$ より　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(2) $\alpha=m+\sqrt{7}ni$ より　$\alpha^3=m^3-21mn^2+n(3m^2-7n^2)\sqrt{7}\,i$

$\alpha^3=225+2\sqrt{7}\,i$ であるから

$$m^3-21mn^2+n(3m^2-7n^2)\sqrt{7}\,i=225+2\sqrt{7}\,i$$

m，n は整数であるから，上式の両辺の実部と虚部を比較すると

$$m^3-21mn^2=225,\quad n(3m^2-7n^2)=2\qquad\cdots(*)$$

m，n は整数であるから，$(*)$ の第 2 式から　$n=\pm1,\ \pm2$
これを $(*)$ の第 2 式に代入して，m が整数となるのは，次の 2 組

$$(m,\ n)=(-3,-2),\ (3,\ 2)$$

このうち，$(*)$ の第 1 式をみたすのは　$\boldsymbol{(m,\ n)=(-3,-2)}$

(3) $\beta^3=\alpha^3$ より　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3=1$

(1) の結果から　$\dfrac{\beta}{\alpha}=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

したがって　$\beta=\alpha$，$\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\alpha$

これに，(2) の結果を代入して

$$\boldsymbol{\beta=-3-2\sqrt{7}\,i,}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{3\pm2\sqrt{21}+(2\sqrt{7}\mp3\sqrt{3})i\right\}}\quad\textbf{(複号同順)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f'(x) = (1-x)|\,x-1\,| + |\,x\,| - 1 \ \left(-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}\right)$ より

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0\right) \\ x^2 - x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ -x^2 + 3x - 2 & \left(1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}\right) \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

$f(0) = 0$, $f(1) = -\dfrac{1}{6}$ により

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0\right) \\ \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + \dfrac{2}{3} & \left(1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}\right) \end{cases}}$$

(2) $(*)$ より

$$f'(x) = \begin{cases} x(x-3) & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0\right) \\ x(x-1) & (0 \leqq x \leqq 1) \\ -(x-1)(x-2) & \left(1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}\right) \end{cases}$$

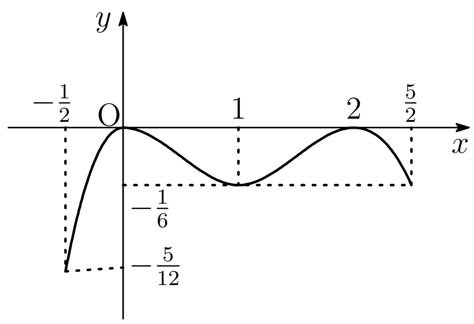
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$

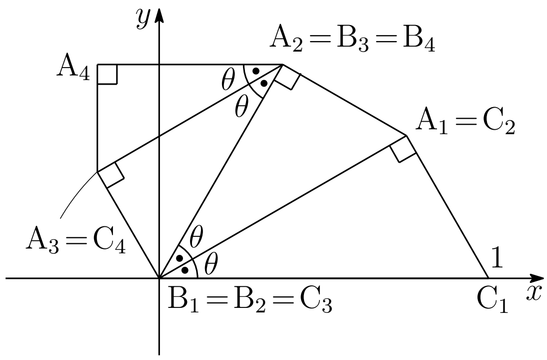
よって

$\boldsymbol{x = 0,\ 2}$ **のとき　最大値 $\boldsymbol{0}$**

$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}}$ **のとき　最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{5}{12}}$**



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\triangle A_nB_nC_n$ と $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ の相似比は $1:\cos\theta$ であるから



$$B_nC_n = \cos^{n-1}\theta$$

したがって

$$A_2B_2 = B_3C_3 = \cos^2\theta$$

線分 A_2B_2 が x 軸の正の向きとなす角は 2θ であるから

$$\mathbf{A_2(\cos^2\theta\cos 2\theta,\ \cos^2\theta\sin 2\theta)}$$

(2) $\triangle A_3B_3C_3$ について

$$A_3C_3 = B_3C_3\sin\theta = \cos^2\theta\sin\theta$$

線分 A_3B_3 が x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2}+\theta$ であるから，A_3 の x 座標を x_1 とすると

$$x_1 = A_3B_3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos^2\theta\sin\theta(-\sin\theta) = -\sin^2\theta\cos^2\theta$$

線分 A_2A_4 は x 軸と平行であるから，A_4 の y 座標を y_1 とすると

$$y_1 = \cos^2\theta\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos^3\theta$$

また，A_4 の x 座標と A_3 の x 座標は等しいから　$A_4(x_1, y_1)$
さらに，$\overrightarrow{A_{4m}A_{4m+4}} = (\cos^{4m}\theta)\overrightarrow{B_1A_4}$ であるから

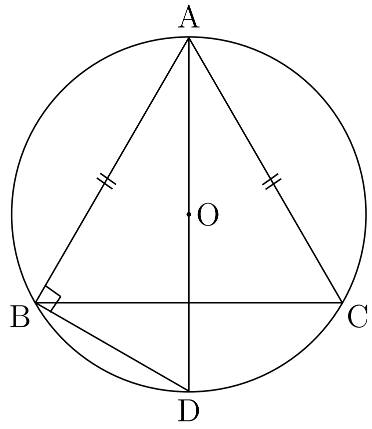
$$x_m = x_1\sum_{k=1}^{m}\cos^{4(k-1)}\theta = -\sin^2\theta\cos^2\theta\times\frac{1-\cos^{4m}\theta}{1-\cos^4\theta} = -\frac{\cos^2\theta(1-\cos^{4m}\theta)}{1+\cos^2\theta}$$

$$y_m = y_1\sum_{k=1}^{m}\cos^{4(k-1)}\theta = 2\sin\theta\cos^3\theta\times\frac{1-\cos^{4m}\theta}{1-\cos^4\theta} = \frac{2\sin\theta\cos^3\theta(1-\cos^{4m}\theta)}{1-\cos^4\theta}$$

$$\boldsymbol{(x_m,\ y_m) = \left(-\frac{\cos^2\theta(1-\cos^{4m}\theta)}{1+\cos^2\theta},\ \frac{2\sin\theta\cos^3\theta(1-\cos^{4m}\theta)}{1-\cos^4\theta}\right)}$$

(3) (2) の結果から　$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} x_m = -\frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}}$，　$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} y_m = \frac{2\sin\theta\cos^3\theta}{1-\cos^4\theta}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) AB $=$ AC より，AO は $\angle$BAC の二等分線であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = k(\vec{b} + \vec{c}) \quad (k \text{ は定数})$$

AD を $\triangle$ABC の外接円の直径とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} = 2k(\vec{b} + \vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2k-1)\vec{b} + 2k\vec{c}$$

AB$\perp$BD であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$ より

$$\vec{b}\cdot\{(2k-1)\vec{b} + 2k\vec{c}\} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2k-1)|\vec{b}|^2 + 2k\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

ここで　$|\vec{b}| = 1$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

したがって　$(2k-1)\cdot 1^2 + 2k\cdot\dfrac{1}{3} = 0$　これを解いて　$k = \dfrac{3}{8}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \dfrac{3}{8}(\vec{b} + \vec{c})}$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \dfrac{3}{4}(\vec{b} + \vec{c})$

P が円周上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}} = 0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

したがって

$$|s\vec{b} + t\vec{c}|^2 - \frac{3}{4}(\vec{b} + \vec{c})\cdot(s\vec{b} + t\vec{c}) = 0$$
$$s^2|\vec{b}|^2 + 2st\vec{b}\cdot\vec{c} + t^2|\vec{c}|^2 - \frac{3}{4}s(|\vec{b}|^2 + \vec{b}\cdot\vec{c}) - \frac{3}{4}t(\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2) = 0$$

よって　$\boldsymbol{s^2 + \dfrac{2}{3}st + t^2 - s - t = 0}$

(3) $s+t=u$，$st=v$ より，s，t を解とする 2 次方程式 $x^2-ux+v=$ は実数解をもつから

$$u^2-4v \geqq 0 \quad ゆえに \quad v \leqq \frac{u^2}{4} \quad \cdots ①$$

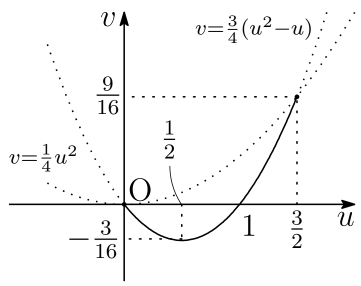
(2) の結果から

$$(s+t)^2-\frac{4}{3}st-(s+t)=0 \quad ゆえに \quad u^2-\frac{4}{3}v-u=0$$

したがって　$v=\frac{3}{4}(u^2-u)$

すなわち　$v=\frac{3}{4}\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{16} \quad \cdots ②$

① を満たしながら動くとき，② の表す図形は右の図の実線部分である．



よって　$\boldsymbol{-\frac{3}{16} \leqq v \leqq \frac{9}{16}}$

(4) v が最小となるとき，(3) で示したグラフから　$u=\frac{1}{2}$，$v=-\frac{3}{16}$

このとき，s，t は 2 次方程式 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}=0$ の解であるから

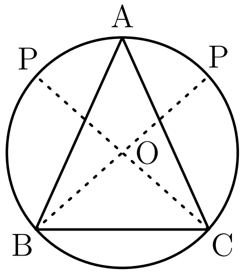
$$(s,\ t)=\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}}$ または $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}}$

(1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=-\frac{5}{8}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\frac{3}{8}\vec{b}-\frac{5}{8}\vec{c}$

$$\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\left(\frac{3}{8}\vec{b}-\frac{5}{8}\vec{c}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{CO}}$$
$$-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\left(-\frac{5}{8}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}$$

P は O に関して B，C と対称な点であるから，次のようになる．



解説 $s^2+t^2+\dfrac{2}{3}st-s-t=0$ の表す図形は楕円[1]であるから，$(s,\ t)$ を θ の正則な関数として表すことができる．この方程式を θ で微分すると

$$\left(2s+\frac{2}{3}t-1\right)\frac{ds}{d\theta}+\left(\frac{2}{3}s+2t-1\right)\frac{dt}{d\theta}=0$$

ゆえに $$\left(2s+\frac{2}{3}t-1,\ \frac{2}{3}s+2t-1\right)\cdot\left(\frac{ds}{d\theta},\ \frac{dt}{d\theta}\right)=0 \quad \cdots(*)$$

$\left(\dfrac{ds}{d\theta},\ \dfrac{dt}{d\theta}\right)$ は楕円の接ベクトルであるから

$$\left(2s+\frac{2}{3}t-1,\ \frac{2}{3}s+2t-1\right)$$

は楕円の法ベクトルである．

また，st は θ の関数であるから，$f(\theta)=st$ とおくと

$$f'(\theta)=\frac{ds}{d\theta}t+s\frac{dt}{d\theta}=(t,\ s)\cdot\left(\frac{ds}{d\theta},\ \frac{dt}{d\theta}\right)$$

$f(\theta)$ が極値をとるとき，$f'(\theta)=0$ であるから

$$(t,\ s)\cdot\left(\frac{ds}{d\theta},\ \frac{dt}{d\theta}\right)=0 \quad \cdots(**)$$

このとき，$(*)$，$(**)$ より

$$\left(2s+\frac{2}{3}t-1,\ \frac{2}{3}s+2t-1\right)\ /\!/\ (t,\ s)$$

したがって $$(s-t)\left(s+t-\frac{1}{2}\right)=0$$

上式をみたす楕円上の点は

$$(s,\ t)=(0,\ 0)\,,\ \left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$$

よって，st は

$$(s,\ t)=\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)\text{ のとき最大値 }\frac{9}{16},$$
$$(s,\ t)=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)\text{ のとき最小値 }-\frac{3}{16}$$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf の $\boxed{\mathbf{5}}$ の解説を参照.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　　$y'=2x$

放物線上の点 $(t,\ t^2)$ における法線の方程式は

$$1(x-t)+2t(y-t^2)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+2ty=t+2t^3 \quad \cdots ①$$

$s \neq t$ とする．放物線上の点 $(s,\ s^2)$ における法線の方程式は

$$x+2sy=s+2s^3 \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$2(s-t)y=s-t+2(s^3-t^3) \quad \text{ゆえに} \quad y=s^2+st+t^2+\frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+2t\left(s^2+st+t^2+\frac{1}{2}\right)=t+2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad x=-2st(s+t)$$

2 直線 ①，② の交点の座標は　$\left(-2st(s+t),\ s^2+st+t^2+\dfrac{1}{2}\right)$

この点を $s \longrightarrow t$ とした極限の点が $(u(t),\ v(t))$ であるから

$$u(t)=\lim_{s\to t}\{-2st(s+t)\}=\boldsymbol{-4t^3}$$
$$v(t)=\lim_{s\to t}\left(s^2+st+t^2+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{3t^2+\frac{1}{2}}$$

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が放物線 $y=x^2$ 上にあるから

$$3t^2+\frac{1}{2}=(-4t^3)^2 \quad \text{整理すると} \quad 32t^6-6t^2-1=0$$

ゆえに　$(2t^2-1)(4t^2+1)^2=0$　　$t \geqq 0$ に注意して　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

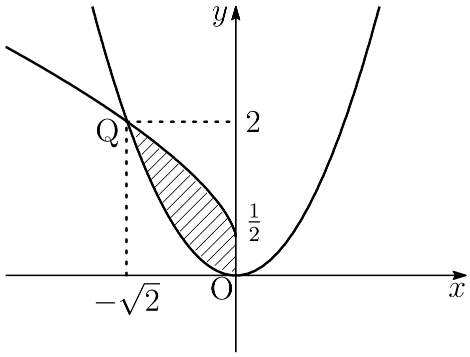
よって　　$\mathbf{Q(-\sqrt{2},\ 2)}$

(3) (1) の結果から　　$x=-4t^3$，$y=3t^2+\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$2x=(-2t)^3$，$y=\dfrac{3}{4}(-2t)^2+\dfrac{1}{2}$

上の 2 式から t を消去すると　　$y=\dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$

求める面積は，下の図の斜線部分である．



この面積を S とすると

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}-x^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{9x(2x)^{\frac{2}{3}}}{20}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}=\boldsymbol{\frac{11}{15}\sqrt{2}}$$

解説 曲線 $y=\dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$ を放物線 $y=x^2$ の法線群の包絡線という．

http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf

の $\boxed{\mathbf{3}}$ の解説を参照．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 図 1 の直角三角形 OBE について，$\mathrm{OB}=a$，$\mathrm{OE}=b$ から

$$\mathrm{BE}=\sqrt{a^2+b^2},\quad \mathrm{BE}=\mathrm{DE}$$

図 3 の二等辺三角形 BCE の BC の中点を M とすると

$$\mathrm{BM}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

図 3 の直角三角形 BEM について

$$\mathrm{EM}=\sqrt{\mathrm{BE}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}$$

図 1 の直角二等辺三角形 OBC から　　$\mathrm{OM}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\triangle$OEM の 3 辺の長さから，$\angle\mathrm{EOM}=90^\circ$ である．

また，図 3 から H は EM 上にあるから，図 4 から

$$\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{OE}}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EM}},\quad \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{OM}}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{EM}}$$

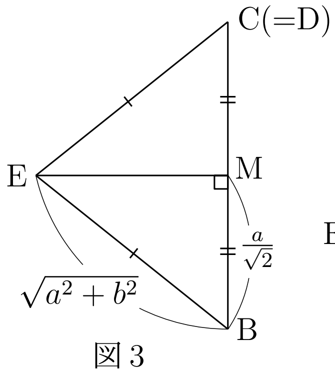


図 3

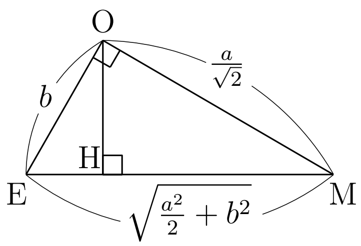


図 4

したがって

$$\mathrm{EH}:\mathrm{HM}=\frac{\mathrm{OE}^2}{\mathrm{EM}}:\frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{EM}}=\mathrm{OE}^2:\mathrm{OM}^2=b^2:\frac{a^2}{2}=2b^2:a^2$$

よって　　$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}}+2b^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{2b^2+a^2}=\frac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}}+2b^2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}}{a^2+2b^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}}+b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a^2+2b^2}}$$

(2) 図 3 の二等辺三角形 BCE について $\theta = \angle\mathrm{BEC}$ とすると，余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BE}^2 + \mathrm{CE}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE}}$$
$$= \frac{(\sqrt{a^2+b^2})^2 + (\sqrt{a^2+b^2})^2 - (\sqrt{2}a)^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

ゆえに　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{a^2+2b^2}}{a^2+b^2}$

二等辺三角形 BCE の外接円の半径 EP は，正弦定理により

$$\mathrm{EP} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\frac{a^2+b^2}{a\sqrt{a^2+2b^2}} = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

(1) で示した結果から

$$\mathrm{EH} = \frac{\mathrm{OE}^2}{\mathrm{EM}} = \frac{b^2}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}} = \frac{2b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

二等辺三角形 BCE の外心 P は EM 上にあるから，$a > b$ に注意して

$$\mathrm{HP} = \mathrm{EP} - \mathrm{EH} = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}} - \frac{2b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}} = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

$\mathrm{HP} = \dfrac{a}{4}$ のとき　$\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}} = \dfrac{a}{4}$　ゆえに　$7a^4 - 18a^2b^2 + 8b^4 = 0$

したがって　$(a^2-2b^2)(7a^2-4b^2) = 0$　$a > b > 0$ により　$b = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

このとき，図 4 の $\triangle\mathrm{OEM}$ について，$\mathrm{OE} = \mathrm{OM} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{EM} = a$ から

$$\mathrm{OH} = \frac{a}{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{a}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) i) 漸化式から，明らかに　$a_n > 0$

$a_1 = 1$，$a_2 = \sqrt{2}$ より，$a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$ であるから，

$a_{n+1} - a_n > 0$ であると仮定すると

$$a_{n+2}{}^2 - a_{n+1}{}^2 = (\sqrt{1 + a_{n+1}})^2 - (\sqrt{1 + a_n})^2 = a_{n+1} - a_n > 0$$

したがって　$a_{n+2} - a_{n+1} > 0$

よって，$\{a_n\}$ は単調増加列である．

ii) 漸化式の補助方程式 $c = \sqrt{c+1}$ から

$$c^2 - c - 1 = 0 \quad c > 0 \text{ に注意してこれを解くと} \quad c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$a_1 - c < 0$ であるから，$a_n - c < 0$ であると仮定すると

$$a_{n+1} - c = \sqrt{1 + a_n} - c = \frac{1 + a_n - c^2}{\sqrt{1 + a_n} + c} = \frac{a_n - c}{\sqrt{1 + a_n} + c} < 0$$

したがって　$a_{n+1} - c < 0$

よって，すべての自然数 n に対して　$a_n < c$

i)，ii) より　$a_n < a_{n+1} < c \quad (n = 1, 2, \cdots)$

よって，$\{a_n\}$ は有限な極限値をもつ．

(2) (1) の結果から　$|a_{n+1} - c| = \dfrac{|a_n - c|}{\sqrt{1 + a_n} + c} < \dfrac{1}{c}|a_n - c|$

したがって　$|a_n - c| < \dfrac{1}{c^{n-1}}|a_1 - c|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^{n-1}} = 0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = c = \boldsymbol{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$

別解 (1) の結果から，$\{a_n\}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$$

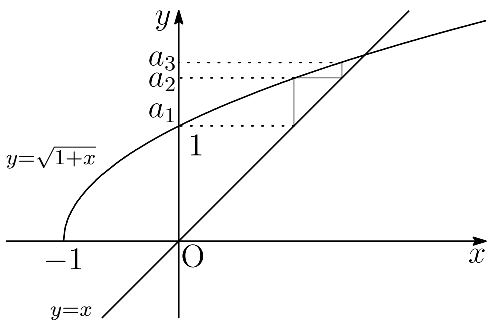
とおくと，$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \sqrt{1+\alpha}$$

α は (1) で求めた補助方程式の解であるから

$$\lim_{n\to\infty} = \alpha = c = \mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

補足 幾何学的には，極限値 α は，$y = \sqrt{1+x}$ と $y = x$ の交点の y 座標である．



解説 数列 $\{x_n\}$ が n と無関係な定数 A について

$$x_n < x_{n+1} < A \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとき，A は $\{x_n\}$ の上界で，連続公理により，上限 $s = \sup A \in \mathbb{R}$ が存在する．上限は上界であるから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n \leqq s$ が成り立つ．一方，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$s - \varepsilon < s$ だから，$s - \varepsilon$ は M の上限ではない．

そこである $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $s - \varepsilon < x_{n_0}$ となる．このとき，$\{x_n\}$ の単調増加性により，任意の $n \geqq n_0$ に対して

$$s - \varepsilon < x_{n_0} \leqq x_n \leqq s \quad \text{ゆえに} \quad |x_n - s| < \varepsilon \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \sup A$$

同様に，数列 $\{x_n\}$ が n と無関係な定数 B について

$$x_n > x_{n+1} > B \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとき，B は $\{x_n\}$ の下界で，連続公理により，下限 $\inf B \in \mathbb{R}$ が存在し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \inf B$ が成り立つ．