平成 19 年度　長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
平成 19 年 2 月 25 日

- 教育・薬・工学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B(120 分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{4}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B(80 分)
- 医・歯学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B(100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x)=\displaystyle\int_a^x (t^2-t)\,dt$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は実数の定数とする．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ の極大値および極小値を，a を用いて表せ．

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 3 点で交わるための a の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ m は正の定数とする．関数 $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+m^2x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ は 0 以外に相異なる 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ の 0 以外の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする．$\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を m を用いて表せ．また α，β がともに正であることを示せ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形について，$y\geqq 0$ の範囲にある部分の面積と $y\leqq 0$ の範囲にある部分の面積が等しいものとする．そのとき，m，α，β の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の連立不等式が表す領域を D とする．

$$\begin{cases} y+1\leqq 2x\leqq 4-y \\ 2y\geqq 1 \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 領域 D と放物線 $y=px^2$ が共有点を持つような定数 p の範囲を求めよ．

4 △ABC において辺 BC，CA，AB の中点を，それぞれ P，Q，R とする．さらに，線分 AP を 2 : 1 に内分する点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ．

(2) 辺 AB，BC，CA を 2 : 1 に内分する点を，それぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$ とする．また，線分 $\mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{B_1C_1}$，$\mathrm{C_1A_1}$ を 2 : 1 に内分する点を，それぞれ $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ．

(3) 線分 $\mathrm{B_2C_2}$ と線分 QR が平行であることを示せ．

(4) △PQR の面積を S とするとき，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}$ の面積を S を用いて表せ．

5 n は 2 以上の自然数とする．関数 $f_n(x) = x^n \log x \ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n \to +0} x^n \log x = 0$ であることを用いてよい．

(1) 関数 $y = f_n(x)$ の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ．

(2) 関数 $y = f_n(x)$ の最小値を L_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n}$ の和を求めよ．

(3) 曲線 $y = f_n(x)$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ．

(4) k を定数とするとき，x に関する方程式 $x^n \log x = x + k \ (x > 0)$ の解の個数を求めよ．

6 曲線 $C : y = \log x$ の点 $(1,\ 0)$ における接線を l_1 とする．曲線 C と直線 l_1 および直線 $l_2 : x = e$ で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めたい．次の問いに答えよ．

(1) 直線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) x 軸と直線 l_1，l_2 で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) 2 次の多項式 $P(x) = ax^2 + bx + c$ が，次の条件 $\{xP(\log x)\}' = (\log x)^2$ $(x > 0)$ を満たすような，定数 a，b，c の値を求めよ．

(4) 体積 V を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x 6(t-\alpha)(t-\beta)\,dt$ を考える．ただし，$0 < \alpha < \beta$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(\alpha) > 0$ であることを示せ．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフ上で $f(x)$ の極大値を表す点を P，極小値を表す点を Q とする．直線 PQ の傾き h を求めよ．

(3) 線分 PQ を $m : n$ に内分する点の x 座標を r とし，曲線 $y = f(x)$ 上の $x = r$ に対応する点における接線の傾きを k とする．$\dfrac{m}{m+n} = s$ とおくとき，k を α，β，s を用いて表せ．さらに，$\dfrac{k}{h}$ の最大値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f'(x) = x^2 - x = x(x-1)$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ 1$

増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - t)\,dt = \left[\ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\ \right]_a^x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}$$

よって　極大値 $f(0) = \boldsymbol{-\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}}$,

極小値 $f(1) = \boldsymbol{-\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{6}}$

(2) (1) の結果から，$f(0) > 0$，$f(1) < 0$ より

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} > 0, \quad -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{6} < 0$$

これらを整理すると

$$a^2(2a-3) < 0, \quad (a-1)^2(2a+1) > 0$$

上の第 1 式から　$a < \dfrac{3}{2}\ \ (a \neq 0)$,　　第 2 式から　$a > -\dfrac{1}{2}\ \ (a \neq 1)$

よって　　$\boldsymbol{-\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}\ \ (a \neq 0,\ a \neq 1)}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$f(x) = x\{x^2 - (2m+1)x + m^2\}$$

2 次方程式 $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0 \cdots$ ① は，$m^2 \neq 0$ であるから，① の解は $x \neq 0$．① の判別式を D とすると，$m > 0$ より

$$D = \{-(2m+1)\}^2 - 4 \cdot 1 m^2 = 4m + 1 > 0$$

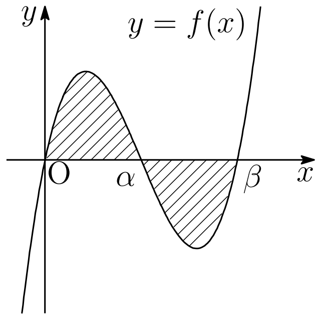
よって，$f(x) = 0$ は，0 以外に相異なる 2 つの実数解をもつ．

(2) α，β は ① の解であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 2m + 1,\quad \alpha\beta = m^2}$$

$m > 0$ より，$\alpha + \beta > 0$，$\alpha\beta > 0$ であるから，α，β はともに正である．

(3) 3 次関数のグラフは変曲点に関して対称であるから，3 次関数のグラフと変曲点を通る直線によって囲まれた 2 つの部分の面積は等しい．このことから，右の図の 2 つの斜線部分の面積が等しいとき，点 $(\alpha,\ 0)$ は変曲点であるから



$$f''(\alpha) = 0,\quad \beta = 2\alpha \quad \cdots (*)$$

が成り立つ．

$f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + m^2 x$ より　$f''(x) = 6x - 2(2m+1)$

$(*)$ により　$\alpha = \dfrac{2m+1}{3}$，$\beta = \dfrac{2(2m+1)}{3} \quad \cdots (**)$

$(**)$ を $\alpha\beta = m^2$ に代入すると　$\dfrac{2(2m+1)^2}{9} = m^2$

$m > 0$ より　$\dfrac{\sqrt{2}(2m+1)}{3} = m$　すなわち　$\boldsymbol{m = 4 + 3\sqrt{2}}$

これを $(**)$ に代入して　$\boldsymbol{\alpha = 3 + 2\sqrt{2},\ \beta = 6 + 4\sqrt{2}}$

解説 3 次関数 $C : y = f(x)$ と直線によって囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき，その直線は C の変曲点を通る．なぜなら，変曲点を通らない直線 l と C によって囲まれた 2 つの部分の面積が等しいと仮定すると，変曲点を通り l に平行な直線 l' によってもその 2 つの部分の面積が等しくなり，矛盾を生じる．

別解 条件から $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ ゆえに $\displaystyle\int_0^{\beta} f(x)\,dx = 0$

$f(x) = x(x-\alpha)(x-\beta)$ より $f(x) = -x^2(\beta - x) + \alpha x(\beta - x)$

したがって $\displaystyle\int_0^{\beta} f(x)\,dx = -\int_0^{\beta} x^2(\beta - x)\,dx + \alpha\int_0^{\beta} x(\beta - x)\,dx$

$$= -\frac{1}{12}\beta^4 + \alpha\cdot\frac{1}{6}\beta^3 = \frac{1}{12}\alpha^3(2\alpha - \beta) = 0$$

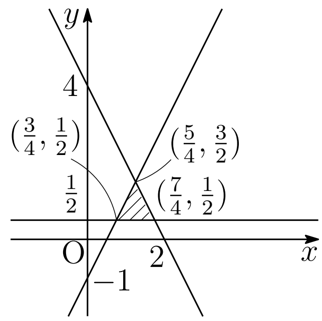
ゆえに $\beta = 2\alpha$

補足 上の計算において，次の定積分の公式を利用している[1].

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 与えられた不等式から

$$\begin{cases} y \leqq 2x - 1 \\ y \leqq -2x + 4 \\ y \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$



よって，領域 D は右の図の斜線部分である．
ただし，境界線を含む．

(2) $y = px^2$ と $y = 2x - 1$ が接するとき，2 式から y を消去して

$$px^2 - 2x + 1 = 0$$

$p \neq 0$ であるから，係数について

$$(-1)^2 - p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p = 1$$

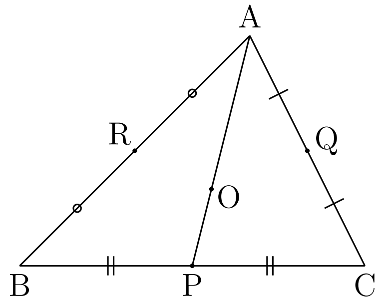
接点の x 座標は，$x^2 - 2x + 1 = 0$ を解いて $x = 1$
このとき，接点 $(1,\ 1)$ は D の点である．
領域 D と放物線 $y = px^2$ が共有点をもつとき，$y = px^2$ が点 $(1,\ 1)$ を通るとき p は最大値 1 をとり，点 $\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき p は最小値 $\dfrac{8}{49}$ をとる．

よって $\boldsymbol{\dfrac{8}{49} \leqq p \leqq 1}$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) O は線分 AP を 2 : 1 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

P は BC の中点であるから

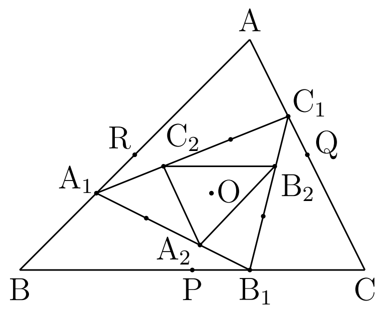
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

上の 2 式から　$\vec{a} = -2\times\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$　よって　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

別解　△ABC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

O は △OAB の重心であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{0}$ より　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

(2) $\mathrm{A_2}$ は辺 $\mathrm{A_1B_1}$ を 2 : 1 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB_1}})\quad\cdots ①$$

$\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$ は辺 AB，BC を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})\qquad \overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})$$

上の 2 式を ① に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = \dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}(\vec{b}+\vec{c})$

(1) の結果から，$\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$ を上式に代入すると　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = -\dfrac{1}{3}\vec{a}}$

(3) (2) と同様にして　$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = -\dfrac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC_2}} = -\dfrac{1}{3}\vec{c}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}} = -\dfrac{1}{3}\vec{c}-\left(-\dfrac{1}{3}\vec{b}\right) = \dfrac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c})\quad\cdots ②$

また　$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2} = \dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})\quad\cdots ③$

②，③ から　$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}$　よって，線分 $\mathrm{B_2C_2}$ と線分 QR は平行である．

(4) (3) と同様にして　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}$　したがって　$\triangle\mathrm{PQR} \backsim \triangle\mathrm{A_2B_2C_2}$

$\mathrm{A_2B_2} = \dfrac{2}{3}\mathrm{PQ}$，$\mathrm{B_2C_2} = \dfrac{2}{3}\mathrm{QR}$ から　$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\triangle\mathrm{PQR} = \boldsymbol{\dfrac{4}{9}S}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$f'(x) = nx^{n-1}\log x + x^n \cdot \frac{1}{x} = x^{n-1}(n\log x + 1)$$

$$f''(x) = (n-1)x^{n-2}(n\log x + 1) + x^{n-1}\cdot\frac{n}{x}$$

$$= x^{n-2}\{n(n-1)\log x + (2n-1)\}$$

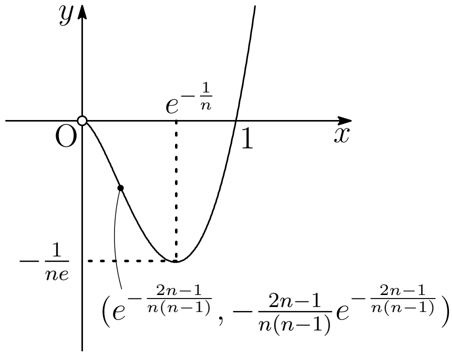
したがって，関数 $y = f_n(x)$ の増減，凹凸，グラフは次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	変曲点	↘	極小	↗

ここで

$$\lim_{x\to+0} f_n(x) = \lim_{x\to+0} x^n\log x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} x^n\log x = \infty$$



補足 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき}\quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

よって　　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

よって，$n \geqq 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^n\log x = \lim_{x\to+0} x^{n-1}\cdot x\log x = 0$

(2) (1) の結果から　$L_n = f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \log e^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{ne}$

よって
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)e}$$
$$= -\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{e}}$$

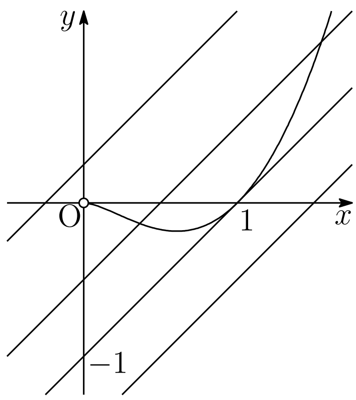
(3) (1) の結果から　$f_n(1) = 0$，$f_n'(1) = 1$

求める直線は，点 $(1,\ 0)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y - 0 = 1(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - 1}$$

(4) $x^n \log x = x + k\ (x > 0)$ の解の個数は，$y = f_n(x)$ と $y = x + k$ の共有点の個数であるから，(3) の結果に注意して

$$\begin{cases} \boldsymbol{k < -1} \text{ のとき} & \textbf{なし} \\ \boldsymbol{k = -1,\ 0 \leqq k} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{-1 < k < 0} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \end{cases}$$



$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

$x=1$ のとき，$y'=1$ であるから，l_1 は点 $(1,\ 0)$ を通り，傾き 1 の直線.

したがって　　$y-0=1(x-1)$　すなわち　$\boldsymbol{y=x-1}$

(2) V_1 は底面の半径および高さがともに $e-1$ の直円錐の体積であるから

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\pi(e-1)^2\cdot(e-1)=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(e-1)^3}$$

(3) $xP(\log x)$ を微分すると

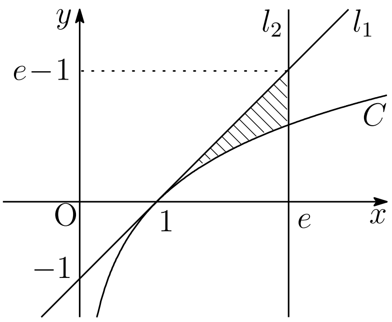
$$\{xP(\log x)\}'=P(\log x)+x\cdot P'(\log x)\frac{1}{x}=P(\log x)+P'(\log x)$$

上式が $(\log x)^2$ に等しいので，$P(x)+P'(x)=x^2$ が成り立つ．これに $P(x)=ax^2+bx+c$，$P'(x)=2ax+b$ を代入すると

$(ax^2+bx+c)+(2ax+b)=x^2$　すなわち　$(a-1)x^2+(b+2)x+(b+c)=0$

上式は x に関する恒等式であるから　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=2}$

(4) $y=\log x\ (1\leqq x\leqq e)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_2 とすると，(3) の結果から



$$\frac{V_2}{\pi}=\int_1^e(\log x)^2\,dx$$
$$=\Big[\,xP(\log x)\,\Big]_1^e=eP(1)-P(0)$$

$P(x)=x^2-2x+2$ より，$P(1)=1$，$P(0)=2$ であるから

$$\frac{V_2}{\pi}=e\cdot1-2\quad\text{ゆえに}\quad V_2=\pi(e-2)$$

よって　　$V=V_1-V_2=\dfrac{\pi}{3}(e-1)^3-\pi(e-2)$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(e^3-3e^2+5)}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $f(x)$ を微分すると　$f'(x) = 6(x-\alpha)(x-\beta)$　$\cdots(*)$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(0) = 0$，$0 < \alpha$ であるから，上の増減表から　$f(\alpha) > 0$

(2) $(*)$ から　$f(\beta) - f(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f'(t)\,dt = 6\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)\,dt$

$$= 6\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 = -(\beta-\alpha)^3$$

よって　$h = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \boldsymbol{-(\beta-\alpha)^2}$

(3) P，Q を $m:n$ に内分する点の x 座標が r であるから

$$r = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n} = \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\alpha + \frac{m}{m+n}\beta = (1-s)\alpha + s\beta$$

したがって

$$\begin{aligned} k = f'(r) &= 6\{(1-s)\alpha + s\beta - \alpha\}\{(1-s)\alpha + s\beta - \beta\} \\ &= 6s(\beta-\alpha)\{-(1-s)(\beta-\alpha)\} \\ &= \boldsymbol{-6s(1-s)(\beta-\alpha)^2} \end{aligned}$$

上式および (2) の結果から

$$\frac{k}{h} = 6s(1-s) = -6\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

$0 < s < 1$ であるから，$\dfrac{k}{h}$ は $s = \dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ **をとる．**