

平成19年度 長崎大学2次試験前期日程(数学問題)

平成19年2月25日

- 教育・薬・工学部 [1] [3] [4] [6] 数I・II・III・A・B (120分)
- 経済・水産・環境科学部 [4] [7] 数I・II・A・B (80分)
- 医・歯学部 [2] [4] [5] 数I・II・III・A・B (100分)

[1] 関数 $f(x) = \int_a^x (t^2 - t) dt$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は実数の定数とする。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ、 $f(x)$ の極大値および極小値を、 a を用いて表せ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる3点で交わるための a の範囲を求めよ。

[2] m は正の定数とする。関数 $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + m^2x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ は0以外に相異なる2つの実数解をもつことを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ の0以外の解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。 $\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ を m を用いて表せ。また α, β がともに正であることを示せ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形について、 $y \geq 0$ の範囲にある部分の面積と $y \leq 0$ の範囲にある部分の面積が等しいものとする。そのとき、 m, α, β の値を求めよ。

[3] 次の連立不等式が表す領域を D とする。

$$\begin{cases} y + 1 \leq 2x \leq 4 - y \\ 2y \geq 1 \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 領域 D と放物線 $y = px^2$ が共有点を持つような定数 p の範囲を求めよ。

4 $\triangle ABC$ において辺 BC , CA , AB の中点を, それぞれ P , Q , R とする. さらに, 線分 AP を $2:1$ に内分する点を O とし, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくととき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ.
- (2) 辺 AB , BC , CA を $2:1$ に内分する点を, それぞれ A_1 , B_1 , C_1 とする. また, 線分 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$ を $2:1$ に内分する点を, それぞれ A_2 , B_2 , C_2 とする. $\vec{OA_2}$ を \vec{a} を用いて表せ.
- (3) 線分 B_2C_2 と線分 QR が平行であることを示せ.
- (4) $\triangle PQR$ の面積を S とするとき, $\triangle A_2B_2C_2$ の面積を S を用いて表せ.

5 n は 2 以上の自然数とする. 関数 $f_n(x) = x^n \log x$ ($x > 0$) について, 次の問いに答えよ. ただし, $\lim_{n \rightarrow +0} x^n \log x = 0$ であることを用いてよい.

- (1) 関数 $y = f_n(x)$ の増減, 凹凸を調べ, グラフをかけ.
- (2) 関数 $y = f_n(x)$ の最小値を L_n とするとき, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n}$ の和を求めよ.
- (3) 曲線 $y = f_n(x)$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ.
- (4) k を定数とするととき, x に関する方程式 $x^n \log x = x + k$ ($x > 0$) の解の個数を求めよ.

6 曲線 $C: y = \log x$ の点 $(1, 0)$ における接線を l_1 とする. 曲線 C と直線 l_1 および直線 $l_2: x = e$ で囲まれる部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めたい. 次の問いに答えよ.

- (1) 直線 l_1 の方程式を求めよ.
- (2) x 軸と直線 l_1 , l_2 で囲まれる部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ.
- (3) 2 次の多項式 $P(x) = ax^2 + bx + c$ が, 次の条件 $\{xP(\log x)\}' = (\log x)^2$ ($x > 0$) を満たすような, 定数 a , b , c の値を求めよ.
- (4) 体積 V を求めよ.

7 関数 $f(x) = \int_0^x 6(t - \alpha)(t - \beta) dt$ を考える。ただし、 $0 < \alpha < \beta$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(\alpha) > 0$ であることを示せ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフ上で $f(x)$ の極大値を表す点を P, 極小値を表す点を Q とする。直線 PQ の傾き h を求めよ。
- (3) 線分 PQ を $m : n$ に内分する点の x 座標を r とし、曲線 $y = f(x)$ 上の $x = r$ に対応する点における接線の傾きを k とする。 $\frac{m}{m+n} = s$ とおくと、 k を α, β, s を用いて表せ。さらに、 $\frac{k}{h}$ の最大値を求めよ。

解答例

- 1 (1) $f'(x) = x^2 - x = x(x-1)$
 $f'(x) = 0$ とすると $x = 0, 1$
 増減表は、右のようになる。

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - t) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_a^x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}$$

$$\text{よって 極大値 } f(0) = -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2},$$

$$\text{極小値 } f(1) = -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{6}$$

- (2) (1) の結果から, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ より

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} > 0, \quad -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{6} < 0$$

これらを整理すると

$$a^2(2a - 3) < 0, \quad (a - 1)^2(2a + 1) > 0$$

上の第1式から $a < \frac{3}{2}$ ($a \neq 0$), 第2式から $a > -\frac{1}{2}$ ($a \neq 1$)

$$\text{よって } -\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2} \quad (a \neq 0, a \neq 1) \quad \blacksquare$$

2 (1) $f(x) = x\{x^2 - (2m+1)x + m^2\}$

2次方程式 $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$ は, $m^2 \neq 0$ であるから, $\textcircled{1}$ の解は $x \neq 0$. $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると, $m > 0$ より

$$D = \{-(2m+1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 = 4m + 1 > 0$$

よって, $f(x) = 0$ は, 0 以外に相異なる 2 つの実数解をもつ.

(2) α, β は $\textcircled{1}$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2m + 1, \quad \alpha\beta = m^2$$

$m > 0$ より, $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ であるから, α, β はともに正である.

(3) 3次関数のグラフは変曲点に関して対称であるから, 3次関数のグラフと変曲点を通る直線によって囲まれた 2 つの部分の面積は等しい. このことから, 右の図の 2 つの斜線部分の面積が等しいとき, 点 $(\alpha, 0)$ は変曲点であるから

$$f''(\alpha) = 0, \quad \beta = 2\alpha \quad \cdots (*)$$

が成り立つ.

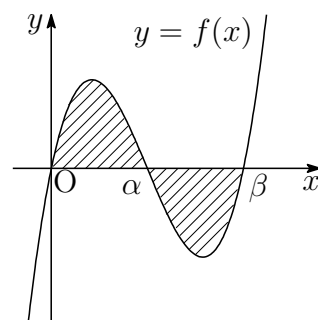
$$f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + m^2x \quad \text{より} \quad f''(x) = 6x - 2(2m+1)$$

$$(*) \text{ により} \quad \alpha = \frac{2m+1}{3}, \quad \beta = \frac{2(2m+1)}{3} \quad \cdots (**)$$

$$(**) \text{ を } \alpha\beta = m^2 \text{ に代入すると} \quad \frac{2(2m+1)^2}{9} = m^2$$

$$m > 0 \text{ より} \quad \frac{\sqrt{2}(2m+1)}{3} = m \quad \text{すなわち} \quad m = 4 + 3\sqrt{2}$$

$$\text{これを } (**) \text{ に代入して} \quad \alpha = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \beta = 6 + 4\sqrt{2}$$



解説 3次関数 $C: y = f(x)$ と直線によって囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき, その直線は C の変曲点を通る. なぜなら, 変曲点を通らない直線 l と C によって囲まれた 2 つの部分の面積が等しいと仮定すると, 変曲点を通り l に平行な直線 l' によってもその 2 つの部分の面積が等しくなり, 矛盾を生じる.

別解 条件から $\int_0^\alpha f(x) dx = -\int_\alpha^\beta f(x) dx$ ゆえに $\int_0^\beta f(x) dx = 0$

$$f(x) = x(x - \alpha)(x - \beta) \text{ より } f(x) = -x^2(\beta - x) + \alpha x(\beta - x)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \int_0^\beta f(x) dx &= -\int_0^\beta x^2(\beta - x) dx + \alpha \int_0^\beta x(\beta - x) dx \\ &= -\frac{1}{12}\beta^4 + \alpha \cdot \frac{1}{6}\beta^3 = \frac{1}{12}\alpha^3(2\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

ゆえに $\beta = 2\alpha$

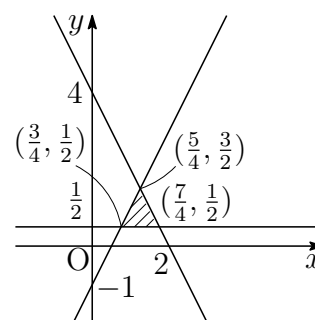
補足 上の計算において、次の定積分の公式を利用している¹。

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

3 (1) 与えられた不等式から

$$\begin{cases} y \leq 2x - 1 \\ y \leq -2x + 4 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

よって、領域 D は右の図の斜線部分である。
ただし、境界線を含む。



(2) $y = px^2$ と $y = 2x - 1$ が接するとき、2式から y を消去して

$$px^2 - 2x + 1 = 0$$

$p \neq 0$ であるから、係数について

$$(-1)^2 - p = 0 \text{ ゆえに } p = 1$$

接点の x 座標は、 $x^2 - 2x + 1 = 0$ を解いて $x = 1$

このとき、接点 $(1, 1)$ は D の点である。

領域 D と放物線 $y = px^2$ が共有点をもつとき、 $y = px^2$ が点 $(1, 1)$ を通るとき p は最大値 1 をとり、点 $(\frac{7}{4}, \frac{1}{2})$ を通るとき p は最小値 $\frac{8}{49}$ をとる。

$$\text{よって } \frac{8}{49} \leq p \leq 1$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf **1**

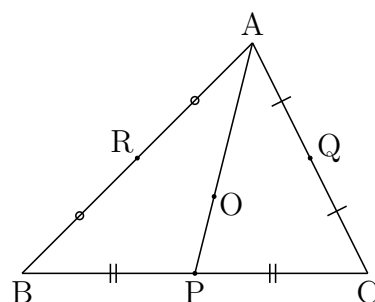
- 4 (1) Oは線分APを2:1に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OP}$$

PはBCの中点であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

上の2式から $\vec{a} = -2 \times \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ よって $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$



別解 $\triangle ABC$ の重心をGとすると $\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

Oは $\triangle OAB$ の重心であるから、 $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ より $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

- (2) A_2 は辺 A_1B_1 を2:1に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + 2\overrightarrow{OB_1}) \quad \dots \textcircled{1}$$

A_1, B_1 は辺AB, BCを2:1に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) \quad \overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})$$

上の2式を①に代入すると $\overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}(\vec{b} + \vec{c})$

(1)の結果から、 $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$ を上式に代入すると $\overrightarrow{OA_2} = -\frac{1}{3}\vec{a}$

- (3) (2)と同様にして $\overrightarrow{OB_2} = -\frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{OC_2} = -\frac{1}{3}\vec{c}$

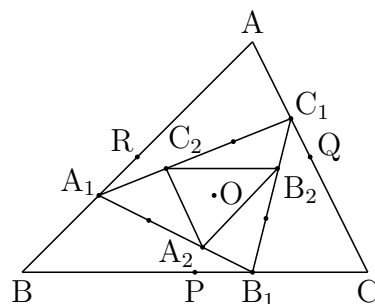
したがって $\overrightarrow{B_2C_2} = -\frac{1}{3}\vec{c} - \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c}) \quad \dots \textcircled{2}$

また $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}) \quad \dots \textcircled{3}$

②, ③から $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{B_2C_2}$ よって、線分 B_2C_2 と線分QRは平行である。

- (4) (3)と同様にして $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A_2B_2}$ したがって $\triangle PQR \sim \triangle A_2B_2C_2$

$A_2B_2 = \frac{2}{3}PQ$, $B_2C_2 = \frac{2}{3}QR$ から $\triangle A_2B_2C_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \triangle PQR = \frac{4}{9}S$ ■



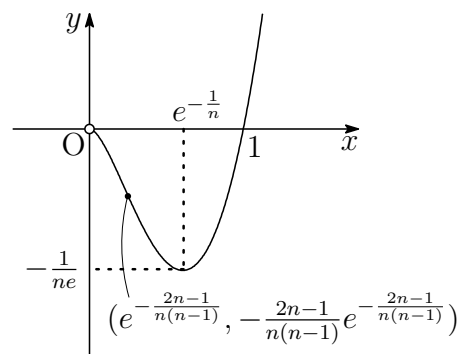
$$\begin{aligned} \text{5 (1)} \quad f'(x) &= nx^{n-1} \log x + x^n \cdot \frac{1}{x} = x^{n-1}(n \log x + 1) \\ f''(x) &= (n-1)x^{n-2}(n \log x + 1) + x^{n-1} \cdot \frac{n}{x} \\ &= x^{n-2}\{n(n-1) \log x + (2n-1)\} \end{aligned}$$

したがって、関数 $y = f_n(x)$ の増減、凹凸、グラフは次のようになる。

x	(0)	...	$e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$...	$e^{-\frac{1}{n}}$...
$f'(x)$		-	-	-	0	+
$f''(x)$		-	0	+	+	+
$f(x)$		↘	変曲点	↘	極小	↗

ここで

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} x^n \log x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \log x = \infty \end{aligned}$$



補足 まず、 $0 < x \leq 1$ のとき、 $-\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す。

$$g(x) = \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (0 < x \leq 1) \text{ とおくと}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で、 $g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\text{よって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$$

したがって $0 < x < 1$ のとき $-2\sqrt{x} < x \log x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (-2\sqrt{x}) = 0 \text{ であるから、はさみうちの原理により } \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

$$\text{よって、} n \geq 1 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow +0} x^n \log x = \lim_{x \rightarrow +0} x^{n-1} \cdot x \log x = 0$$

(2) (1)の結果から $L_n = f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \log e^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{ne}$

よって
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)e} \\ &= -\frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

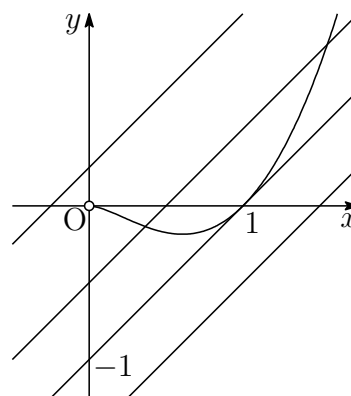
(3) (1)の結果から $f_n(1) = 0, f'_n(1) = 1$

求める直線は、点 $(1, 0)$ を通り、傾き 1 の直線であるから

$$y - 0 = 1(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{y = x - 1}$$

(4) $x^n \log x = x + k$ ($x > 0$) の解の個数は、
 $y = f_n(x)$ と $y = x + k$ の共有点の個数
 であるから、(3)の結果に注意して

$$\begin{cases} k < -1 \text{ のとき} & \text{なし} \\ k = -1, 0 \leq k \text{ のとき} & \text{1個} \\ -1 < k < 0 \text{ のとき} & \text{2個} \end{cases}$$



6 (1) $y = \log x$ を微分すると $y' = \frac{1}{x}$

$x = 1$ のとき, $y' = 1$ であるから, l_1 は点 $(1, 0)$ を通り, 傾き 1 の直線.

したがって $y - 0 = 1(x - 1)$ すなわち $y = x - 1$

(2) V_1 は底面の半径および高さがともに $e - 1$ の直円錐の体積であるから

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi (e - 1)^2 \cdot (e - 1) = \frac{\pi}{3} (e - 1)^3$$

(3) $xP(\log x)$ を微分すると

$$\{xP(\log x)\}' = P(\log x) + x \cdot P'(\log x) \frac{1}{x} = P(\log x) + P'(\log x)$$

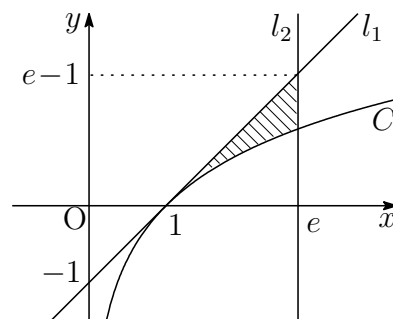
上式が $(\log x)^2$ に等しいので, $P(x) + P'(x) = x^2$ が成り立つ. これに $P(x) = ax^2 + bx + c$, $P'(x) = 2ax + b$ を代入すると

$$(ax^2 + bx + c) + (2ax + b) = x^2 \quad \text{すなわち} \quad (a - 1)x^2 + (b + 2)x + (b + c) = 0$$

上式は x に関する恒等式であるから $a = 1, b = -2, c = 2$

(4) $y = \log x$ ($1 \leq x \leq e$) と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_2 とすると, (3) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{\pi} &= \int_1^e (\log x)^2 dx \\ &= \left[xP(\log x) \right]_1^e = eP(1) - P(0) \end{aligned}$$



$P(x) = x^2 - 2x + 2$ より, $P(1) = 1$, $P(0) = 2$ であるから

$$\frac{V_2}{\pi} = e \cdot 1 - 2 \quad \text{ゆえに} \quad V_2 = \pi(e - 2)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad V &= V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3} (e - 1)^3 - \pi(e - 2) \\ &= \frac{\pi}{3} (e^3 - 3e^2 + 5) \end{aligned}$$

■

- 7 (1) $f(x)$ を微分すると $f'(x) = 6(x - \alpha)(x - \beta) \cdots (*)$

したがって、 $f(x)$ の増減表は

x	\cdots	α	\cdots	β	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	極大	\searrow	極小	\nearrow

$f(0) = 0$, $0 < \alpha$ であるから、上の増減表から $f(\alpha) > 0$

$$\begin{aligned} (2) (*) \text{ から } f(\beta) - f(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) dt = 6 \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(t - \beta) dt \\ &= 6 \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 = -(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\text{よって } h = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = -(\beta - \alpha)^2$$

- (3) P, Q を $m:n$ に内分する点の x 座標が r であるから

$$r = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n} = \left(1 - \frac{m}{m+n} \right) \alpha + \frac{m}{m+n} \beta = (1-s)\alpha + s\beta$$

したがって

$$\begin{aligned} k = f'(r) &= 6 \{ (1-s)\alpha + s\beta - \alpha \} \{ (1-s)\alpha + s\beta - \beta \} \\ &= 6s(\beta - \alpha) \{ -(1-s)(\beta - \alpha) \} \\ &= -6s(1-s)(\beta - \alpha)^2 \end{aligned}$$

上式および (2) の結果から

$$\frac{k}{h} = 6s(1-s) = -6 \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}$$

$0 < s < 1$ であるから、 $\frac{k}{h}$ は $s = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。 ■