平成18年度　長崎大学2次試験前期日程(数学問題)
平成18年2月25日

- 教育・薬・工学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ 数II・III・B (120分)
- 経済・水産・環境科学部 $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ 数II・B (80分)
- 医学部 $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数II・III・B (100分)
- 歯学部 $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数II・III (100分)

$\boxed{1}$ aを実数とし，関数

$$f(x) = \sin 2x + 2a(\sin x - \cos x) + a^3 \quad (0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $t = \sin x - \cos x$ $(0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$ とおき，$f(x)$ を t の関数 $g(t)$ として表せ．また，t の値の範囲を求めよ．

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，$g(t)$ の最大値を $m(a)$ を求めよ．

(3) 関数 $y = m(a)$ のグラフをかけ．

$\boxed{2}$ a，m，n を正の定数とし，

$$l : y = \frac{1}{2}x + a, \quad C : y = -mx^2 + nx$$

とする．直線 l と放物線 C は第1象限で接し，その接点の x 座標は2とする．次の問いに答えよ．

(1) m，n を a を用いて表せ．

(2) x 軸と C の $0 \leqq x \leqq 2$ の部分および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を S とし，x 軸と C で囲まれた図形の面積を T とする．条件 $T = 2S + 11$ を満たす a の値を求め，そのときの m，n，S，T の値を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 4\pi)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) $e^{-2x}\sin 2x$，$e^{-2x}\cos 2x$ の導関数を求め，不定積分 $\displaystyle\int e^{-2x}\cos 2x\,dx$ を求めよ．

(3) n を正の整数とするとき，曲線 $y = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V_n を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

4 関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極限を求め，グラフをかけ．

(2) m を実数とするとき，直線 $y = m(x-1)$ と曲線 $y = f(x)$ の交点の x 座標を求めよ．

(3) $m > 0$ のとき，(2) で求めた x 座標のうち，最小のものを α，最大のものを β として，$\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ を求めよ．

(4) $m > 0$ のとき，$y = m(x-1)$ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 $S(m)$ を求めよ．

5 四面体 OABC において，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = a, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = b, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = c$$
$$\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ, \quad \angle\mathrm{AOC} = \alpha, \quad \angle\mathrm{BOC} = \beta$$

とする．ただし，$0^\circ < \alpha < 90^\circ$，$0^\circ < \beta < 90^\circ$，$\alpha + \beta > 90^\circ$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を a，b，c，α，β を用いて表せ．

(2) 点 C から △OAB を含む平面へ下ろした垂線を CH とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (k,\ l \text{ は実数})$$

とおくとき，k，l を a，b，c，α，β を用いて表せ．

(3) 四面体 OABC の体積 V を a，b，c，α，β を用いて表せ．

(4) a，b，c を定数とし，α，β が $\alpha + \beta = 120^\circ$ を満たしながら動くとき，V の最大値を求めよ．

6 関数 $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値，変曲点を求め，増減，凹凸を調べて，グラフをかけ．ただし，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある $\sin x = \dfrac{1}{4}$ の解を α とし，α を用いて答えよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸，y 軸および直線 $x = \pi$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $t = \sin x - \cos x$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2x = 1 - t^2$$

したがって　$g(t) = 1 - t^2 + 2at + a^3$

また　$t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) \quad (0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$

よって　$\boldsymbol{g(t) = -t^2 + 2at + a^3 + 1 \quad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})}$

(2) (1) の結果より，$g(t) = -(t-a)^2 + a^3 + a^2 + 1$ であるから

(i) $a < -1$ のとき　$m(a) = g(-1) = a^3 - 2a$

(ii) $-1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき　$m(a) = g(a) = a^3 + a^2 + 1$

(iii) $\sqrt{2} < a$ のとき　$m(a) = g(\sqrt{2}) = a^3 + 2\sqrt{2}a - 1$

よって　$$\boldsymbol{m(a) = \begin{cases} a^3 - 2a & (a < -1) \\ a^3 + a^2 + 1 & (-1 \leqq a \leqq \sqrt{2}) \\ a^3 + 2\sqrt{2}a - 1 & (\sqrt{2} < a) \end{cases}}$$

(3) (2) の結果から

(i) $a < -1$ のとき　$m'(a) = 3a^2 - 2 > 3\cdot(-1)^2 - 2 > 0$

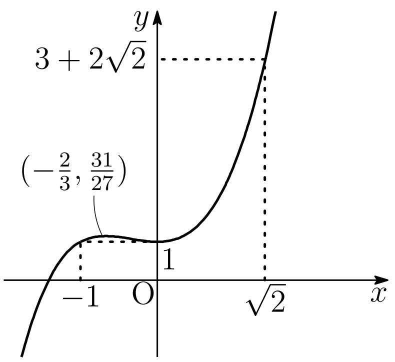
(ii) $-1 < a < \sqrt{2}$ のとき　$m'(a) = 3a^2 + 2a = a(3a+2)$

(iii) $\sqrt{2} < a$ のとき　$m'(a) = 3a^2 + 2\sqrt{2} > 0$

$m(a)$ の増減表は次のようになる．

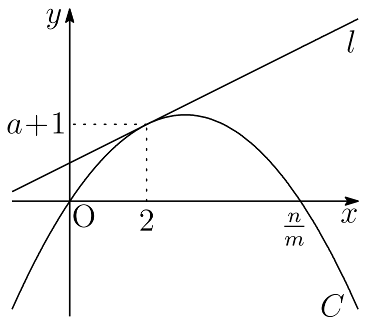
a	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
m'	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
m	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$

よって，$y = m(a)$ のグラフは次のようになる．



■

2 (1) l と C の接点の座標は $(2,\ a+1)$.



$f(x) = -mx^2 + nx$ とすると

$$f'(x) = -2mx + n$$

$f(2) = a+1$，$f'(2) = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$-4m + 2n = a + 1, \quad -4m + n = \frac{1}{2}$$

これを解いて　$\boldsymbol{m = \dfrac{a}{4},\ n = a + \dfrac{1}{2}}$

(2)
$$S = \int_0^2 (-mx^2 + nx)\,dx = \left[-\frac{m}{3}x^3 + \frac{n}{2}x^2\right]_0^2 = -\frac{8}{3}m + 2n$$

$$T = \int_0^{\frac{n}{m}} (-mx^2 + nx) = \frac{m}{6}\left(\frac{n}{m} - 0\right)^3 = \frac{n^3}{6m^2}$$

(1) の結果を上の 2 式に代入すると

$$S = -\frac{8}{3} \times \frac{a}{4} + 2\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}a + 1$$

$$T = \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)^3}{6\left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \frac{(2a+1)^3}{3a^2}$$

$T = 2S + 11$ であるから

$$\frac{(2a+1)^3}{3a^2} = 2\left(\frac{4}{3}a + 1\right) + 11 \text{ 整理すると } \quad 27a^2 - 6a - 1 - 0$$

したがって　$(9a+1)(3a-1) = 0$　$a > 0$ より　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$

これを上の諸式に代入して　$\boldsymbol{m = \dfrac{1}{12},\ n = \dfrac{5}{6},\ S = \dfrac{13}{9},\ T = \dfrac{125}{9}}$ ■

3 (1) $f(x)=e^{-x}\sin x$ とおくと

$$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，$f(x)$ の増減および極値は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$	4π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

極大値：$f(\frac{\pi}{4})=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}}$，$f(\frac{9}{4}\pi)=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{4}\pi}}$

極大値：$f(\frac{5}{4}\pi)=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}}$，$f(\frac{13}{4}\pi)=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{13}{4}\pi}}$

(2)
$$\boldsymbol{(e^{-2x}\sin 2x)'=-2e^{-2x}\sin 2x+2e^{-2x}\cos 2x}$$
$$\boldsymbol{(e^{-2x}\cos 2x)'=-2e^{-2x}\cos 2x-2e^{-2x}\sin 2x}$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)=4e^{-2x}\cos 2x$$

よって $\boldsymbol{\displaystyle\int e^{-2x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)+C}$

(3) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}V_n&=\pi\int_0^{2n\pi}(e^{-x}\sin x)^2\,dx=\pi\int_0^{2n\pi}e^{-2x}\sin^2 x\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{2n\pi}(e^{-2x}-e^{-2x}\cos 2x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)\right]_0^{2n\pi}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}(1-e^{-4n\pi})}\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{\pi}{8}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ を微分すると　$f'(x)=3x^2-4x-1$

$f'(x)=0$ の解を $x_1=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$，$x_2=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ とおく．

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで，$f(x)$ を $f'(x)$ で割ることにより

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\right)-\frac{14}{9}x+\frac{16}{9}$$

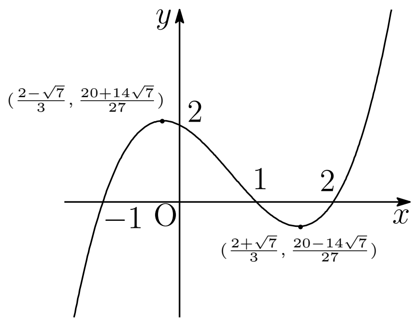
したがって

$$f(x_1)=-\frac{14}{9}x_1+\frac{16}{9}=-\frac{14}{9}\times\frac{2-\sqrt{7}}{3}+\frac{16}{9}=\frac{20+14\sqrt{7}}{27}$$
$$f(x_2)=-\frac{14}{9}x_2+\frac{16}{9}=-\frac{14}{9}\times\frac{2+\sqrt{7}}{3}+\frac{16}{9}=\frac{20-14\sqrt{7}}{27}$$

極値およびグラフの概形は次のようになる．

極大値 $f\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}}$

極小値 $f\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{20-14\sqrt{7}}{27}}$



(2) $y=f(x)$ と $y=m(x-1)$ の共有点の x 座標は

$$x^3-2x^2-x+2=m(x-1)\quad ゆえに\quad (x-1)\{x^2-x-(m+2)\}=0$$

2 次方程式 $x^2-x-(m+2)=0\cdots$① の判別式を D とすると

$$D=1+4(m+2)=4m+9$$

よって　$\boldsymbol{m>-\dfrac{9}{4}}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{4m+9}}{2}}$

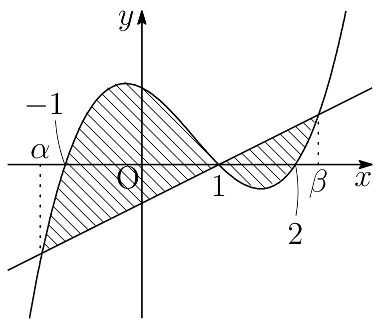
$\boldsymbol{m=-\dfrac{9}{4}}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{m<-\dfrac{9}{4}}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=1}$

(3) $m>0$ のとき，(2) の結果から，α，β は2次方程式 ① の解である．
したがって，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-(m+2)}$$

(4) $g(x)=f(x)-m(x-1)$ とおくと



$$g(x)=x^3-2x^2-(m+1)x+m+2$$

また，$g(x)$ の原始関数の1つを

$$G(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+(m+2)x$$

とおくと

$$\begin{aligned}S(m)&=\int_\alpha^1 g(x)\,dx-\int_1^\beta g(x)\,dx=\Big[\ G(x)\ \Big]_\alpha^1-\Big[\ G(x)\ \Big]_1^\beta\\&=2G(1)-\{G(\alpha)+G(\beta)\}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

このとき　$G(1)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}(m+1)+m+2=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{13}{12}\quad\cdots$②

$$\begin{aligned}G(\alpha)+G(\beta)=\frac{1}{4}(\alpha^4+\beta^4)-\frac{2}{3}(\alpha^3+\beta^3)-\frac{1}{2}(m+1)(\alpha^2+\beta^2)\\+(m+2)(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ここで，(3) の結果より

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+2(m+2)=2m+5,\\\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=1(2m+5)+(m+2)\cdot1=3m+7,\\\alpha^4+\beta^4&=(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\\&=1(3m+7)+(m+2)(2m+5)=2m^2+12m+17\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}G(\alpha)+G(\beta)&=\frac{1}{4}(2m^2+12m+17)-\frac{2}{3}(3m+7)\\&\qquad-\frac{1}{2}(m+1)(2m+5)+(m+2)\cdot1\\&=-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-\frac{11}{12}\quad\cdots③\end{aligned}$$

②，③ を $(*)$ に代入すると　　$\boldsymbol{S(m)=\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{5}{2}m+\dfrac{37}{12}}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC} = \boldsymbol{ac\cos\alpha},$
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{BOC} = \boldsymbol{bc\cos\beta}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，(1) の結果および $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= (k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = ka^2 - ac\cos\alpha = 0\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= (k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = lb^2 - bc\cos\beta = 0\end{aligned}$$

$a, b \neq 0$ であるから　$\boldsymbol{k = \frac{c}{a}\cos\alpha}$，$\boldsymbol{l = \frac{c}{b}\cos\beta}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = (k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot(k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= -kac\cos\alpha - lbc\cos\beta + c^2\\ &= -\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right)ac\cos\alpha - \left(\frac{c}{b}\cos\beta\right)bc\cos\beta + c^2\\ &= c^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = c\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

よって　$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ab\times c\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}}\end{aligned}$$

補足 $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ であるから，O を通り平面 OAB に垂直な直線を l とし，C から l に垂線 CD を引き，$\angle\mathrm{COD} = \gamma$ とすると

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

が成り立つから　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \mathrm{OD} = c|\cos\gamma| = c\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

(4) (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta &= 1-\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)-\frac{1}{2}(1+\cos 2\beta)\\
&= -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)\\
&= -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

$\alpha+\beta=120^\circ$ であるから

$$
\begin{aligned}
1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta &= -\cos 120^\circ\cos(2\alpha-120^\circ)\\
&= \frac{1}{2}\cos(2\alpha-120^\circ)
\end{aligned}
$$

このとき，$0^\circ<\alpha<90^\circ$，$0^\circ<\beta<90^\circ$，$\alpha+\beta=120^\circ$ であるから

$$30^\circ<\alpha<90^\circ \quad \text{ゆえに} \quad -60^\circ<2\alpha-120^\circ<60^\circ$$

よって，V の最大値は

$$2\alpha-120^\circ=0 \quad \text{すなわち} \quad \alpha=\beta=60^\circ\text{のとき} \quad \boldsymbol{V=\frac{\sqrt{2}}{12}abc}$$

■

6 (1) $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ より

$$f'(x)=1-\cos 2x-\sin x=2\sin^2 x-\sin x=\sin x(2\sin x-1)$$
$$f''(x)=2\sin 2x-\cos x=4\sin x\cos x-\cos x=\cos x(4\sin x-1)$$

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↘	極小	↗		↗	極大	↘		↘	

極小値 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$，極小値 $f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

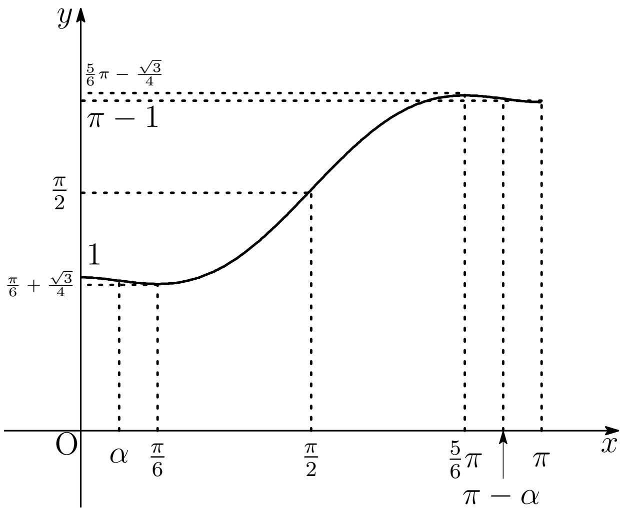
$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4},\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

変曲点は

$$\boldsymbol{\left(\alpha,\ \alpha+\frac{3}{16}\sqrt{15}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi-\alpha,\ \pi-\alpha-\frac{3}{16}\sqrt{15}\right)}$$

$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



(2)
$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\pi} \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x\right)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi} x^2\,dx + \int_0^{\pi} x(2\cos x - \sin 2x)\,dx \\ &\qquad + \int_0^{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^{\pi} x^2\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x(2\cos x - \sin 2x)\,dx &= \Bigg[\ x\left(2\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) \\ &\qquad + \left(2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\ \Bigg]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx \\ &\quad = \int_0^{\pi} \left(\cos^2 x - \sin 2x\cos x + \frac{1}{4}\sin^2 2x\right) dx \\ &\quad = \int_0^{\pi} \left\{\frac{1}{2}(\cos 2x + 1) - 2\sin x\cos^2 x + \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)\right\} dx \\ &\quad = \left[\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right) + \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\ \right]_0^{\pi} \\ &\quad = \frac{5}{8}\pi - \frac{4}{3}\end{aligned}$$

上の 3 式を $(*)$ に代入すると　$\dfrac{V}{\pi} = \dfrac{\pi^3}{3} + \dfrac{9}{8}\pi - \dfrac{16}{3}$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi^4}{3} + \dfrac{9}{8}\pi^2 - \dfrac{16}{3}\pi}$ ■