平成 18 年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成 18 年 2 月 25 日

- 教育・薬・工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数 II・III・B(120 分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 数 II・B(80 分)
- 医学部は，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 数 II・III・B(100 分)
- 歯学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 II・III・B(100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とし，関数

$$f(x) = \sin 2x + 2a(\sin x - \cos x) + a^3 \quad (0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $t = \sin x - \cos x$ $(0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$ とおき，$f(x)$ を t の関数 $g(t)$ として表せ．また，t の値の範囲を求めよ．

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，$g(t)$ の最大値を $m(a)$ を求めよ．

(3) 関数 $y = m(a)$ のグラフをかけ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a，m，n を正の定数とし，

$$l : y = \frac{1}{2}x + a, \quad C : y = -mx^2 + nx$$

とする．直線 l と放物線 C は第 1 象限で接し，その接点の x 座標は 2 とする．次の問いに答えよ．

(1) m，n を a を用いて表せ．

(2) x 軸と C の $0 \leqq x \leqq 2$ の部分および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を S とし，x 軸と C で囲まれた図形の面積を T とする．条件 $T = 2S + 11$ を満たす a の値を求め，そのときの m，n，S，T の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 4\pi)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) $e^{-2x}\sin 2x$，$e^{-2x}\cos 2x$ の導関数を求め，不定積分 $\displaystyle\int e^{-2x}\cos 2x\,dx$ を求めよ．

(3) n を正の整数とするとき，曲線 $y = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_n を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ 関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極限を求め，グラフをかけ．

(2) m を実数とするとき，直線 $y = m(x-1)$ と曲線 $y = f(x)$ の交点の x 座標を求めよ．

(3) $m > 0$ のとき，(2) で求めた x 座標のうち，最小のものを α，最大のものを β として，$\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ を求めよ．

(4) $m > 0$ のとき，$y = m(x-1)$ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 $S(m)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ 四面体 OABC において，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = a, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = b, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = c$$
$$\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ, \quad \angle\mathrm{AOC} = \alpha, \quad \angle\mathrm{BOC} = \beta$$

とする．ただし，$0^\circ < \alpha < 90^\circ$，$0^\circ < \beta < 90^\circ$，$\alpha + \beta > 90^\circ$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を a，b，c，α，β を用いて表せ．

(2) 点 C から $\triangle$OAB を含む平面へ下ろした垂線を CH とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (k,\ l \text{ は実数})$$

とおくとき，k，l を a，b，c，α，β を用いて表せ．

(3) 四面体 OABC の体積 V を a，b，c，α，β を用いて表せ．

(4) a，b，c を定数とし，α，β が $\alpha + \beta = 120^\circ$ を満たしながら動くとき，V の最大値を求めよ．

$\boxed{\textbf{6}}$ 関数 $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値，変曲点を求め，増減，凹凸を調べて，グラフをかけ．ただし，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある $\sin x = \dfrac{1}{4}$ の解を α とし，α を用いて答えよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸，y 軸および直線 $x = \pi$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $t = \sin x - \cos x$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2x = 1 - t^2$$

したがって $\quad g(t) = 1 - t^2 + 2at + a^3$

また $\quad t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) \quad (0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$

よって $\quad \boldsymbol{g(t) = -t^2 + 2at + a^3 + 1 \quad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})}$

(2) (1) の結果より，$g(t) = -(t-a)^2 + a^3 + a^2 + 1$ であるから

(i) $a < -1$ のとき $\quad m(a) = g(-1) = a^3 - 2a$

(ii) $-1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき $\quad m(a) = g(a) = a^3 + a^2 + 1$

(iii) $\sqrt{2} < a$ のとき $\quad m(a) = g(\sqrt{2}) = a^3 + 2\sqrt{2}a - 1$

よって $\quad \boldsymbol{m(a) = \begin{cases} a^3 - 2a & (a < -1) \\ a^3 + a^2 + 1 & (-1 \leqq a \leqq \sqrt{2}) \\ a^3 + 2\sqrt{2}a - 1 & (\sqrt{2} < a) \end{cases}}$

(3) (2) の結果から

(i) $a < -1$ のとき $\quad m'(a) = 3a^2 - 2 > 3\cdot(-1)^2 - 2 > 0$

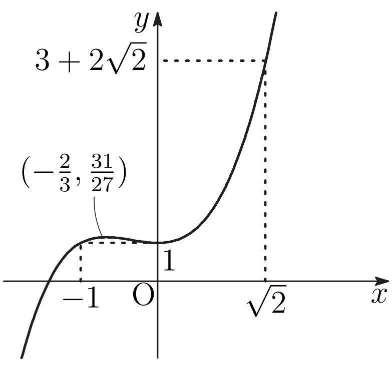
(ii) $-1 < a < \sqrt{2}$ のとき $\quad m'(a) = 3a^2 + 2a = a(3a+2)$

(iii) $\sqrt{2} < a$ のとき $\quad m'(a) = 3a^2 + 2\sqrt{2} > 0$

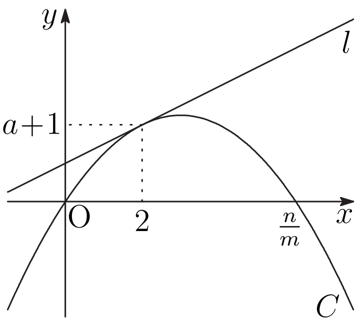
$m(a)$ の増減表は次のようになる．

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
m'	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
m	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$

よって，$y = m(a)$ のグラフは次のようになる．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) l と C の接点の座標は $(2,\ a+1)$.



$f(x) = -mx^2 + nx$ とすると

$$f'(x) = -2mx + n$$

$f(2) = a+1$, $f'(2) = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$-4m + 2n = a+1, \quad -4m + n = \frac{1}{2}$$

これを解いて　$\boldsymbol{m = \dfrac{a}{4},\ n = a + \dfrac{1}{2}}$

(2)
$$S = \int_0^2 (-mx^2 + nx)\,dx = \left[-\frac{m}{3}x^3 + \frac{n}{2}x^2\right]_0^2 = -\frac{8}{3}m + 2n$$

$$T = \int_0^{\frac{n}{m}} (-mx^2 + nx) = \frac{m}{6}\left(\frac{n}{m} - 0\right)^3 = \frac{n^3}{6m^2}$$

(1) の結果を上の 2 式に代入すると

$$S = -\frac{8}{3} \times \frac{a}{4} + 2\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}a + 1$$

$$T = \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)^3}{6\left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \frac{(2a+1)^3}{3a^2}$$

$T = 2S + 11$ であるから

$$\frac{(2a+1)^3}{3a^2} = 2\left(\frac{4}{3}a + 1\right) + 11 \text{ 整理すると}\quad 27a^2 - 6a - 1 - 0$$

したがって　$(9a+1)(3a-1) = 0$　$a > 0$ より　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$

これを上の諸式に代入して　$\boldsymbol{m = \dfrac{1}{12},\ n = \dfrac{5}{6},\ S = \dfrac{13}{9},\ T = \dfrac{125}{9}}$

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = e^{-x}\sin x$ とおくと

$$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = \sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，$f(x)$ の増減および極値は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$	4π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

極大値：$f(\frac{\pi}{4}) = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}}$，$f(\frac{9}{4}\pi) = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{4}\pi}}$

極大値：$f(\frac{5}{4}\pi) = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}}$，$f(\frac{13}{4}\pi) = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{13}{4}\pi}}$

(2)
$$\boldsymbol{(e^{-2x}\sin 2x)' = -2e^{-2x}\sin 2x + 2e^{-2x}\cos 2x}$$
$$\boldsymbol{(e^{-2x}\cos 2x)' = -2e^{-2x}\cos 2x - 2e^{-2x}\sin 2x}$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x) = 4e^{-2x}\cos 2x$$

よって $\displaystyle\boldsymbol{\int e^{-2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x) + C}$

(3) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} V_n &= \pi\int_0^{2n\pi}(e^{-x}\sin x)^2\,dx = \pi\int_0^{2n\pi} e^{-2x}\sin^2 x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{2n\pi}(e^{-2x} - e^{-2x}\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[-\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)\Big]_0^{2n\pi} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{8}(1 - e^{-4n\pi})} \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{\pi}{8}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ を微分すると　$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$f'(x) = 0$ の解を $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$，$x_2 = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ とおく．

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで，$f(x)$ を $f'(x)$ で割ることにより

$$f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) - \frac{14}{9}x + \frac{16}{9}$$

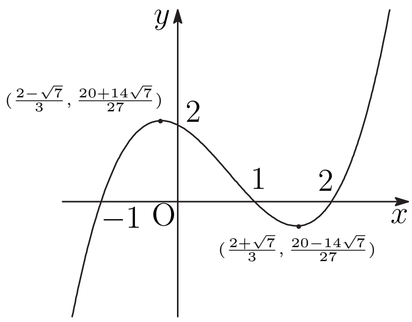
したがって

$$f(x_1) = -\frac{14}{9}x_1 + \frac{16}{9} = -\frac{14}{9} \times \frac{2-\sqrt{7}}{3} + \frac{16}{9} = \frac{20+14\sqrt{7}}{27}$$
$$f(x_2) = -\frac{14}{9}x_2 + \frac{16}{9} = -\frac{14}{9} \times \frac{2+\sqrt{7}}{3} + \frac{16}{9} = \frac{20-14\sqrt{7}}{27}$$

極値およびグラフの概形は次のようになる．

極大値 $f\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}}$

極小値 $f\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{20-14\sqrt{7}}{27}}$



(2) $y = f(x)$ と $y = m(x-1)$ の共有点の x 座標は

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = m(x-1)$　ゆえに　$(x-1)\{x^2 - x - (m+2)\} = 0$

2 次方程式 $x^2 - x - (m+2) = 0 \cdots$ ① の判別式を D とすると

$$D = 1 + 4(m+2) = 4m + 9$$

よって　$\boldsymbol{m > -\dfrac{9}{4}}$ **のとき**　$\boldsymbol{x = 1,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{4m+9}}{2}}$

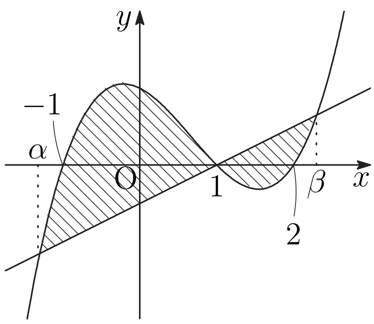
$\boldsymbol{m = -\dfrac{9}{4}}$ **のとき**　$\boldsymbol{x = 1,\ \dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{m < -\dfrac{9}{4}}$ **のとき**　$\boldsymbol{x = 1}$

(3) $m>0$ のとき，(2) の結果から，α，β は 2 次方程式 ① の解である．
したがって，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-(m+2)}$$

(4) $g(x)=f(x)-m(x-1)$ とおくと



$$g(x)=x^3-2x^2-(m+1)x+m+2$$

また，$g(x)$ の原始関数の 1 つを

$$G(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+(m+2)x$$

とおくと

$$\begin{aligned}S(m)&=\int_\alpha^1 g(x)\,dx-\int_1^\beta g(x)\,dx=\Big[\ G(x)\ \Big]_\alpha^1-\Big[\ G(x)\ \Big]_1^\beta\\&=2G(1)-\{G(\alpha)+G(\beta)\}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

このとき　$G(1)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}(m+1)+m+2=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{13}{12}\quad\cdots②$

$$\begin{aligned}G(\alpha)+G(\beta)=\frac{1}{4}(\alpha^4+\beta^4)-\frac{2}{3}(\alpha^3+\beta^3)-\frac{1}{2}(m+1)(\alpha^2+\beta^2)\\+(m+2)(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ここで，(3) の結果より

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+2(m+2)=2m+5,\\\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=1(2m+5)+(m+2)\cdot1=3m+7,\\\alpha^4+\beta^4&=(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\\&=1(3m+7)+(m+2)(2m+5)=2m^2+12m+17\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}G(\alpha)+G(\beta)&=\frac{1}{4}(2m^2+12m+17)-\frac{2}{3}(3m+7)\\&\qquad-\frac{1}{2}(m+1)(2m+5)+(m+2)\cdot1\\&=-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-\frac{11}{12}\quad\cdots③\end{aligned}$$

②，③ を $(*)$ に代入すると　　$\boldsymbol{S(m)=\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{5}{2}m+\dfrac{37}{12}}$

$\boxed{5}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC} = \boldsymbol{ac\cos\alpha}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{BOC} = \boldsymbol{bc\cos\beta}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，(1) の結果および $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = ka^2 - ac\cos\alpha = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = lb^2 - bc\cos\beta = 0$$

$a, b \neq 0$ であるから　$\boldsymbol{k = \dfrac{c}{a}\cos\alpha,\ l = \dfrac{c}{b}\cos\beta}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = (k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot(k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= -kac\cos\alpha - lbc\cos\beta + c^2\\ &= -\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right)ac\cos\alpha - \left(\frac{c}{b}\cos\beta\right)bc\cos\beta + c^2\\ &= c^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = c\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

よって　$V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}ab \times c\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{6}abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}}$

補足 $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ であるから，O を通り平面 OAB に垂直な直線を l とし，C から l に垂線 CD を引き，$\angle\mathrm{COD} = \gamma$ とすると

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

が成り立つから　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \mathrm{OD} = c|\cos\gamma| = c\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta &= 1-\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)-\frac{1}{2}(1+\cos 2\beta)\\ &= -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)\\ &= -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$\alpha+\beta=120^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta &= -\cos 120^\circ\cos(2\alpha-120^\circ)\\ &= \frac{1}{2}\cos(2\alpha-120^\circ)\end{aligned}$$

このとき，$0^\circ<\alpha<90^\circ$，$0^\circ<\beta<90^\circ$，$\alpha+\beta=120^\circ$ であるから

$$30^\circ<\alpha<90^\circ \quad \text{ゆえに} \quad -60^\circ<2\alpha-120^\circ<60^\circ$$

よって，V の最大値は

$$2\alpha-120^\circ=0 \quad \text{すなわち} \quad \alpha=\beta=60^\circ\text{のとき} \quad \boldsymbol{V=\frac{\sqrt{2}}{12}abc}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x$ より

$$f'(x) = 1 - \cos 2x - \sin x = 2\sin^2 x - \sin x = \sin x(2\sin x - 1)$$
$$f''(x) = 2\sin 2x - \cos x = 4\sin x\cos x - \cos x = \cos x(4\sin x - 1)$$

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	

極小値 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}}$，極小値 $f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

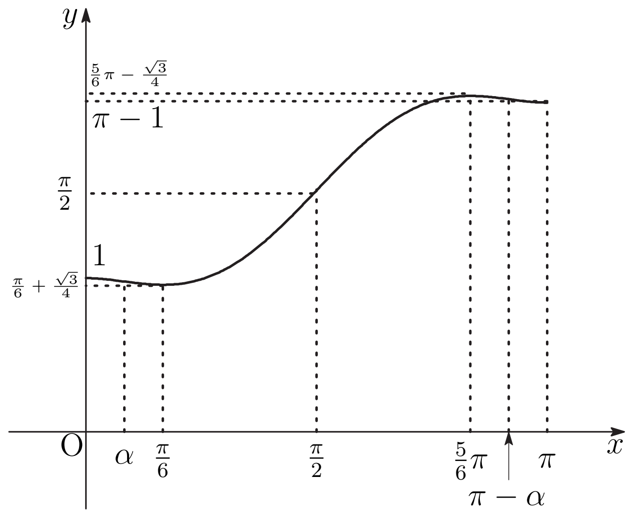
$\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

変曲点は

$$\boldsymbol{\left(\alpha,\ \alpha + \frac{3}{16}\sqrt{15}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi - \alpha,\ \pi - \alpha - \frac{3}{16}\sqrt{15}\right)}$$

$y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



(2)
$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right)^2 dx\\ &= \int_0^{\pi} x^2\,dx+\int_0^{\pi} x(2\cos x-\sin 2x)\,dx\\ &\qquad +\int_0^{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^{\pi} x^2\,dx=\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x(2\cos x-\sin 2x)\,dx &= \Bigg[\,x\left(2\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\\ &\qquad +\left(2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\,\Bigg]_0^{\pi}\\ &= \frac{\pi}{2}-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx\\ &\quad= \int_0^{\pi}\left(\cos^2 x-\sin 2x\cos x+\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)dx\\ &\quad= \int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}(\cos 2x+1)-2\sin x\cos^2 x+\frac{1}{8}(1-\cos 4x)\right\}dx\\ &\quad= \left[\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)+\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\,\right]_0^{\pi}\\ &\quad= \frac{5}{8}\pi-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

上の 3 式を $(*)$ に代入すると　$\dfrac{V}{\pi}=\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{9}{8}\pi-\dfrac{16}{3}$

よって　$\boldsymbol{V=\dfrac{\pi^4}{3}+\dfrac{9}{8}\pi^2-\dfrac{16}{3}\pi}$