平成17年度　長崎大学2次試験前期日程(数学問題)
平成17年2月25日

- 教育・工学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ 数II・III・B(120分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$ 数II・B(80分)
- 医学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$ 数II・III・B(100分)
- 歯・薬学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ 数II・III(100分)

1 原点をO，放物線 $C : y = x^2$ 上の2点 $\mathrm{P}(-2,\ 4)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1)$ を通る直線を l，線分PQを $t : (1-t)$ に内分する点をRとする．ただし，$0 \leqq t \leqq 1$ とする．さらに l と y 軸との交点をNとする．次の問いに答えよ．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) Rが第1象限に含まれるような t の値の範囲を求めよ．ただし，座標軸はどの象限にも含まれないものとする．

(3) t の値が(2)で求めた範囲にあるとき，△ORNの面積を求めよ．

(4) t の値が(2)で求めた範囲にあるとき，C，線分PRおよび線分ORで囲まれた図形の面積を S_1 とし，C，線分RQおよび線分ORで囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1，S_2 を t で表せ．

2 円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ を通る直線 $l : y = x + 1$ および C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ を考える．ただし，$0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ とする．Qにおける C の接線 m と l との交点をRとする．次の問いに答えよ．

(1) QとRとの距離が1以下となるような α の値の範囲を求めよ．

(2) QとRとの距離が1のとき，l と m のなす鋭角 β について，$\cos\beta$ の値を求めよ．

$\boxed{3}$ $x>0$ で定義される関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$，$g(x)=\dfrac{a}{x}+b$ を考える．ただし，a，b は定数とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ．

(2) 原点を通り曲線 $y=f(x)$ に接する直線 l の方程式と，その接点 P の座標を求めよ．

(3) 曲線 $y=g(x)$ が P において l に接するような a，b の値を求めよ．

(4) a，b が (3) で求めた値のとき，$0<x<\sqrt{e}$ で $g(x)>f(x)$ となることを示せ．さらに $0<x\leqq\sqrt{e}$ と $y\geqq 0$ の範囲で，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および x 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{4}$ 楕円 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ と，E 上の点 $\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ $\left(0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．P における E の接線を l_1 とし，これに平行で E の反対側にある接線を l_2 とする．さらに，l_1 と直交する接線のうち，E の上側にあるものを m_1，下側にあるものを m_2 とする．また，m_1 の接点を $\mathrm{Q}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ とおく．m_2 と l_1，l_1 と m_1，m_1 と l_2 および l_2 と m_2 の交点を，それぞれ，A，B，C および D とする．次の問いに答えよ．

(1) l_1，l_2 の方程式と辺 AD の長さ L を α で表せ．また m_1，m_2 の方程式と辺 AB の長さ M を β で表せ．

(2) α と β の関係を求めよ．

(3) $t=\tan^2\alpha$ とおくとき，長方形 ABCD の面積 $S(t)$ を求めよ．

(4) $S(t)$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{5}$ p，q，r を正の実数とし，$p > r$ とする．

$$f(x) = x^3 - (2p + r)x^2 + (p^2 + q^2 + 2pr)x - (p^2 + q^2)r$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(r)$ を求めよ．

(2) x についての3次方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ．

(3) (2) で求めた解のうち，絶対値が最小のものを z_1，虚部が最小のものを z_2 とする．$\alpha = z_2 - z_1$ とし，複素数平面上で点 α を原点の周りに θ だけ回転した点を β とする．α と β を求めよ．

《**注**》複素数 $a + bi$ (a，b は実数, i は虚数単位) に対し，b をこの複素数の虚部という．

(4) β が実数となるとき，$\tan\theta$ を p，q，r で表せ．

$\boxed{6}$ 空間における3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が次の条件を満たしているものとする．

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \cos\theta \quad (0^\circ < \theta < 120^\circ)$$

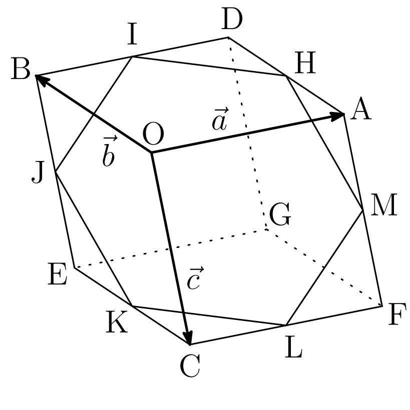
次に，点Oを始点とするベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{c}+\vec{a}$，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ の終点をそれぞれ，A，B，C，D，E，F，G とする．さらに，線分 AD，BD，BE，CE，CF，AF の中点を，それぞれ，H，I，J，K，L，M とする．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{IH}}$，$\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ とするとき，$\vec{u}$，$\vec{v}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) H，I，J の定める平面を α とする．K，L，M は α 上にあることを示せ．

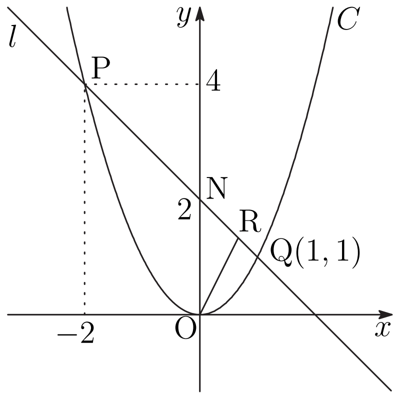
《**注**》P が α 上の点であるための必要十分条件は，$\overrightarrow{\mathrm{IP}} = s\vec{u} + t\vec{v}$ (s，t は実数) と表されることである．

(3) 多角形 HIJKLM は正六角形であることを示せ．



正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\boldsymbol{y=-x+2}$



(2) P$(-2,\ 4)$，Q$(1,\ 1)$ を $t:(1-t)$ に内分する点 R は

$$((1-t)\cdot(-2)+t\cdot 1,\ (1-t)\cdot 4+t\cdot 1)$$

すなわち　$(3t-2, -3t+4)$

R は第 1 象限にあるから

$$3t-2>0,\quad -3t+4>0$$

$0 \leqq t \leqq 1$ に注意して　$\boldsymbol{\frac{2}{3}<t\leqq 1}$

(3) (1)，(2) の結果から，N の y 座標は 2，R の x 座標が $3t-2$ であるから

$$\triangle\mathrm{ORN}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(3t-2)=\boldsymbol{3t-2}$$

(4) (3) の結果を用いて

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2}^{0}\{(-x+2)-x^2\}\,dx+\triangle\mathrm{ONR} \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{0}+(3t-2)=\boldsymbol{3t+\frac{4}{3}} \\ S_2 &= \int_{0}^{1}\{(-x+2)-x^2\}\,dx-\triangle\mathrm{ONR} \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}-(3t-2)=\boldsymbol{-3t+\frac{19}{6}} \end{aligned}$$

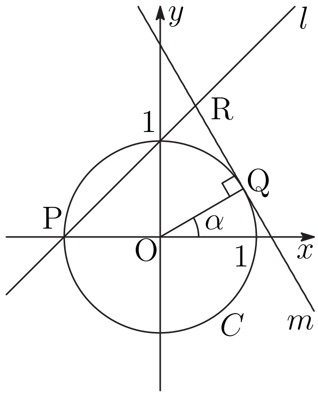
(5) $S_1:S_2=t:(1-t)$ であるから

$$\left(3t+\frac{4}{3}\right):\left(-3t+\frac{19}{6}\right)=t:(1-t)$$

したがって　$$\left(3t+\frac{4}{3}\right)(1-t)=t\left(-3t+\frac{19}{6}\right)$$

$0 \leqq t \leqq 1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{t=\frac{8}{9}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\qquad l : y = x + 1$



C の $\mathrm{Q}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ における接線 m の方程式は

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$$

l と m の交点 R は

$$\left(\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha},\ \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QR}} &= \left(\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha},\ \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right) - (\cos\alpha,\ \sin\alpha) \\ &= \frac{1-\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}(-\sin\alpha, \cos\alpha)\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ より，$\dfrac{1-\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} \geqq 0$ であるから

$$\mathrm{QR} = \frac{1-\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$\mathrm{QR} \leqq 1$ であるから

$$\frac{1-\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\alpha \geqq \frac{1}{2}$$

よって $\qquad \boldsymbol{30^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ}$

(2) l，m と x 軸のなす角は，それぞれ 45°，60° であるから，l と m のなす角は

$$45^\circ + 60^\circ = 105^\circ, \quad 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

したがって，求める鋭角 β は $\qquad 75^\circ$

よって
$$\begin{aligned}\cos\beta &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$$

$y = f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

(2) $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{\log t}{t}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{\log t}{t} = \frac{1-\log t}{t^2}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1-\log t}{t^2}x + \frac{2\log t - 1}{t}$$

この直線が原点を通ることから

$$\frac{2\log t - 1}{t} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \sqrt{e}$$

よって　　$\boldsymbol{l : y = \dfrac{1}{2e}x,\ \mathrm{P}\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)}$

(3) $g(x) = \dfrac{a}{x} + b$ を微分すると　$g'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$

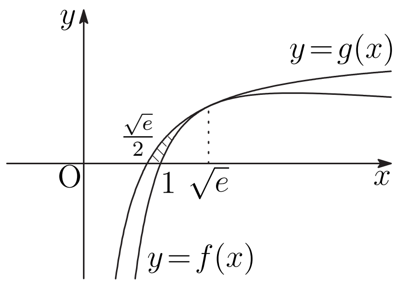
$y = g(x)$ の P における接線が l に一致するから

$$g(\sqrt{e}\,) = \frac{1}{2\sqrt{e}}, \quad g'(\sqrt{e}\,) = \frac{1}{2e}$$

したがって　　$\dfrac{a}{\sqrt{e}} + b = \dfrac{1}{2\sqrt{e}}, \qquad -\dfrac{a}{(\sqrt{e}\,)^2} = \dfrac{1}{2e}$

よって　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$

(4) $h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと



$$h(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{\log x}{x}$$

$$h'(x)=\frac{2\log x-1}{2x^2}$$

$0<x<\sqrt{e}$ において $h'(x)<0$，$h(\sqrt{e}\,)=0$

したがって，$0<x<\sqrt{e}$ において，$h(x)>0$

よって，$0<x<\sqrt{e}$ において　$g(x)>f(x)$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\sqrt{e}}{2}}^{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)dx-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\log x+\frac{x}{\sqrt{e}}\right]_{\frac{\sqrt{e}}{2}}^{\sqrt{e}}-\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\log 2} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) E の $\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ における接線 l_1 の方程式は

$$\frac{(a\cos\alpha)x}{a^2}+\frac{(b\sin\alpha)y}{b^2}=1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{\cos\alpha}{a}x+\frac{\sin\alpha}{b}y=1}$$

l_2 は P と原点に関して対称な点における接線の方程式であるから

$$\frac{(-a\cos\alpha)x}{a^2}+\frac{(-b\sin\alpha)y}{b^2}=1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{\cos\alpha}{a}x+\frac{\sin\alpha}{b}y=-1}$$

L は P から l_2 までの距離に等しいから

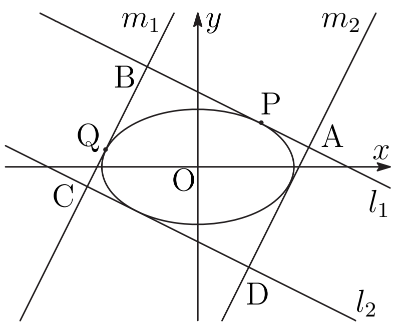
$$L=\frac{\left|\dfrac{\cos\alpha}{a}\cdot a\cos\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{b}\cdot b\sin\alpha+1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\alpha}{b}\right)^2}}=\boldsymbol{\frac{2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}}$$

m_1, m_2 および M は, l_1, l_2 および L の α を β にそれぞれ置き換えたものであるから

$$\boldsymbol{m_1:\ \frac{\cos\beta}{a}x+\frac{\sin\beta}{b}y=1,}$$

$$\boldsymbol{m_2:\ \frac{\cos\beta}{b}x+\frac{\sin\beta}{b}y=-1}$$

$$\boldsymbol{M=\frac{2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}}}$$



(2) l_1 の法線ベクトル $\left(\dfrac{\cos\alpha}{a},\ \dfrac{\sin\alpha}{b}\right)$ と m_1 の法線ベクトル $\left(\dfrac{\cos\beta}{a},\ \dfrac{\sin\beta}{b}\right)$ は垂直であるから

$$\frac{\cos\alpha}{a}\cdot\frac{\cos\beta}{a}+\frac{\sin\alpha}{b}\cdot\frac{\sin\beta}{b}=0$$

よって $\qquad \boldsymbol{b^2\cos\alpha\cos\beta+a^2\sin\alpha\sin\beta=0}$

(3) (1) の結果から

$$S(t) = LM = \frac{2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}} \cdot \frac{2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}}$$
$$= \frac{4a^2b^2}{\sqrt{(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha)(b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta)}}$$

(2) の結果により

$$\begin{aligned} &(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha)(b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta) \\ =&(b^2\cos\alpha\cos\beta + a^2\sin\alpha\sin\beta)^2 + a^2b^2(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2 \\ =&a^2b^2\sin^2(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

P，Q の位置関係により，$0 < \beta - \alpha < \pi$ であるから

$$S(t) = \frac{4a^2b^2}{\sqrt{a^2b^2\sin^2(\beta - \alpha)}} = \frac{4ab}{\sin(\beta - \alpha)}$$

ここで,「$\alpha = 0$」「$\beta = \frac{\pi}{2}$」「$t = 0$」が同値であることを示す.
$t = 0$ のとき，$t = \tan^2\alpha$ であるから，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より　$\alpha = 0$
これを (2) の結果に代入すると　$b^2\cos\beta = 0$　すなわち　$\beta = \dfrac{\pi}{2}$
逆に，$\beta = \dfrac{\pi}{2}$ を (2) の結果に代入すると　$a^2\sin\alpha = 0$
$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\alpha = 0$　このとき　$t = \tan^2 0 = 0$

(i) $t = 0$ のとき，$\alpha = 0$，$\beta = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$S(0) = \frac{4ab}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)} = 4ab$$

(ii) $t > 0$ のとき，$\beta \neq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，(2) の結果により

$$\tan\alpha\tan\beta = -\frac{b^2}{a^2},\quad \tan^2\beta = \frac{b^4}{a^4\tan^2\alpha} = \frac{b^4}{a^4 t}$$

したがって

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$\begin{aligned}\tan^2(\beta-\alpha) &= \frac{\tan^2\beta - 2\tan\alpha\tan\beta + \tan^2\alpha}{(1-\frac{b^2}{a^2})^2}\\ &= \frac{\frac{b^4}{a^4t}+\frac{2b^2}{a^2}+t}{(1-\frac{b^2}{a^2})^2} = \frac{(a^2t+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2t}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin^2(\beta-\alpha)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(\beta-\alpha)} = 1 + \frac{(a^2-b^2)^2t}{(a^2t+b^2)^2}$$

したがって　　$S(t) = 4ab\sqrt{1+\dfrac{(a^2-b^2)^2t}{(a^2t+b^2)^2}}$

(i)，(ii) から　　$\boldsymbol{S(t) = 4ab\sqrt{1+\dfrac{(a^2-b^2)^2t}{(a^2t+b^2)^2}}}$

(4) (3) の結果から，$t=0$ のとき，最小値 $\boldsymbol{4ab}$ をとる.
また，$t>0$ であるから

$$\begin{aligned}1+\frac{(a^2-b^2)^2t}{(a^2t+b^2)^2} &= 1 + \frac{(a^2-b^2)^2t}{(a^2t-b^2)^2+4a^2b^2t}\\ &= 1+\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2t-b^2)^2t^{-1}+4a^2b^2}\\ &\leqq 1+\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2}\end{aligned}$$

上式において，等号が成立するのは，$t=\dfrac{b^2}{a^2}$ のときで，最大値は

$$S\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = 4ab\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2}} = \boldsymbol{2(a^2+b^2)}$$

解説

$\mathrm{Q}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ は，$\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ によって決定するので，β は α の関数と考えてよい．したがって，$f(\alpha)=\sin(\beta-\alpha)$ とおくと

$$f'(\alpha)=\cos(\beta-\alpha)\cdot\left(\frac{d\beta}{d\alpha}-1\right) \tag{1}$$

また，(2) で得られた α と β の関係式

$$b^2\cos\alpha\cos\beta+a^2\sin\alpha\sin\beta=0 \tag{2}$$

を α で微分すると

$$-b^2\left(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+a^2\left(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=0 \tag{3}$$

$f(\alpha)$ が極値をとるとき，(1) より

$$\text{(i)}\quad \beta=\alpha+\frac{\pi}{2}\qquad \text{または}\qquad \text{(ii)}\quad \frac{d\beta}{d\alpha}=1$$

(i) $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ を (2) に代入して整理すると

$$\frac{1}{2}(a^2-b^2)\sin 2\alpha=0\quad \text{ゆえに}\quad \alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{2}$$

したがって　$f(0)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)=1$　よって　$\dfrac{4ab}{f(0)}=4ab$

(ii) $\dfrac{d\beta}{d\alpha}=1$ を (3) に代入して整理すると

$$(a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta)=0\quad \text{ゆえに}\quad \beta=\pi-\alpha$$

これを (2) に代入して整理すると

$$-b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha=0\quad \text{ゆえに}\quad \tan\alpha=\frac{b}{a},\quad \tan\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=-\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$\sin^2(\beta-\alpha)=\frac{\tan^2(\beta-\alpha)}{1+\tan^2(\beta-\alpha)}=\frac{\left(-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^2}{1+\left(-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^2}=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$\sin(\beta-\alpha)>0$ であるから　$f(\alpha)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$　よって　$\dfrac{4ab}{f(\alpha)}=2(a^2+b^2)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = x^3 - (2p+r)x^2 + (p^2+q^2+2pr)x - (p^2+q^2)r$ より

$$f(r) = r^3 - (2p+r)r^2 + (p^2+q^2+2pr)r - (p^2+q^2)r = \mathbf{0}$$

(2) (1) の結果から，$f(x)$ は $x-r$ を因数にもつから，$f(x)=0$ は

$$(x-r)(x^2-2px+p^2+q^2)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=r,\ p\pm qi}$$

(3) $p>r$ より　$\sqrt{p^2+q^2}>p>r>0$　ゆえに　$|p\pm qi|>p>r>0$

したがって　$z_1=r$，$z_2=p-qi$　よって　$\alpha=z_2-z_1=\boldsymbol{p-r-qi}$

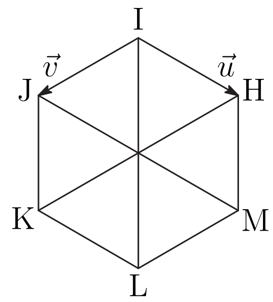
また
$$\begin{aligned}\beta &= \alpha(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= (p-r-qi)(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= \boldsymbol{(p-r)\cos\theta+q\sin\theta+\{(p-r)\sin\theta-q\cos\theta\}i}\end{aligned}$$

(4) β が実数であるとき，(3) の結果から

$$(p-r)\sin\theta - q\cos\theta = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\tan\theta = \frac{q}{p-r}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})}$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})}$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OK}} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{IK}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{OI}} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = \vec{u} + 2\vec{v}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{c} - \vec{b} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{IM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

よって，K，L，M は α 上にある．

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}} = -\vec{u} \qquad \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \vec{v} \qquad \overrightarrow{\mathrm{JK}} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{KL}} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{\mathrm{LM}} = -\vec{v} \qquad \overrightarrow{\mathrm{MH}} = -(\vec{u} + \vec{v})$$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{NH}} = -\vec{v} \qquad \overrightarrow{\mathrm{NI}} = -(\vec{u} + \vec{v}) \qquad \overrightarrow{\mathrm{NJ}} = -\vec{u}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NK}} = \vec{v} \qquad \overrightarrow{\mathrm{NL}} = \vec{u} + \vec{v} \qquad \overrightarrow{\mathrm{NM}} = \vec{u}$$

このとき

$$|\vec{u}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$
$$|\vec{v}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

$\vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$ であるから

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

HI，IJ，JK，KL，LM，MH および NH，NI，NJ，NK，NL，NM は等しいので，多角形 HIJKLM は正六角形である．